TRADUCTION COMPLEXE DES SIMILITUDES PLANES

RESSOURCE PRODUITE DANS LE CADRE DU PROJET PReNuM-AC

Cette ressource a été conçue à partir d'une production de:

Étudiant : Junior DILAMENO

Professeur ENS : Louis Marie MOUNKALA

Professeur des lycées : Cyr NGAMOUYIH

Cette ressource est accompagnée :

- de deux articles dont la lecture est conseillée en complément de la ressource:
  - "Etude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances" de Dany-Jack Mercier paru aux éditions Publibook en 2004. D.-J. Mercier, 2005 cmon0004 v1.22.
  - http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/64/petitx64.pdf
- d'exercices WIMS-dont certains construits spécifiquement pour le projet et répondant aux objectifs pédagogiques spécifiques énumérés dans la partie 1.2.
- d'exercices résolus dans la partie 5.4 avec une variation de procédures de résolution pour enrichir les possibilités d'action de l'élève.

[1]

[1] Cette ressource, enrichie par l'apport d'André MBIDA, est proposée comme sujet d'atelier au séminaire final de PReNuM AC en janvier 2015.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 : PRELIMINAIRES

1.1 But et objectif généraux de la ressource

Le but général de cette ressource est de contribuer à une élaboration des outils mathématiques théoriques, susceptibles de permettre à l'élève d'investir les situations et les notions reliées au concept "similitude plane", par la traduction (ou la représentation qui rend le plus compte de ce concept) dans le cadre algébrique de la définition géométrique de ce concept, de ses caractéristiques, de ses propriétés et de ses effets sur ces destinataires et par l'interprétation sur ces points, dans le cadre géométrique, de cette traduction complexe ou algébrique.

La définition géométrique d'une similitude plane renvoie à notre sens une propriété caractéristique qui rend comte de ce concept, qui conditionne la relation entre un point M et son image M' et qui permet la mise en évidence des rôles respectifs et articulés, des effets et de l'importance de ses éléments caractéristiques, de leurs propriétés, des propriétés de la similitude directe et de ses effets sur ses destinataires, à partir de cette définition.

La définition complexe d'une similitude plane renvoie à notre sens à la traduction complexe ou la représentation dans le cadre algébrique qui rend le plus compte de cette définition, de sa définition géométrique.

Cette représentation algébrique préserve les caractéristiques, les propriétés des éléments caractéristiques et de la similitude, leurs articulations et de leurs effets sur les objets mathématiques représentés ou convoqués. Dans cette représentation algébrique, l'affixe z' du point M' image du point M par cette similitude, peut être exprimée en fonction de z (traduction complexe de la relation entre le point M et son image M' par cette similitude), pour déterminer ce que nous appelons l'écriture complexe de cette similitude.

Les fonctions respectives des éléments caractéristiques d'une similitude plane dans sa définition géométrique seront également traduites dans le cadre algébrique à l'occasion de la traduction complexe d'une similitude plane.

Cette écriture complexe qui à est notre sens, la représentation algébrique (ou complexe) qui rend le plus compte du concept " similitude plane" dans le cadre algébrique est également appréhendée comme une traduction de la représentation analytique, et que nous appelons définition analytique d'une similitude plane.

L'objectif général de cette ressource est de permettre à l'élève d'appréhender la traduction complexe d'élément(s) caractéristique(s) d'une similitude plane, de sa définition géométrique, du rôle de ces éléments dans cette définition géométrique et d'être capable de d'identifier et de restituer ces éléments caractéristiques dans le cadre géométrique, leurs rôles respectifs et articulés et la définition géométrique de la similitude plane, à partir de son écriture complexe.

Les isométries affines du plan et les homothéties sont les transformations à partir desquelles l'élève devra être capable d'identifier une similitude de rapport k (k>0), de déterminer ses éléments caractéristiques et ses définitions géométrique, complexe ou analytique. Notre texte comporte trois parties essentielles.

Dans la première partie, nous donnons à travers quelques repères historiques, un aperçu de la genèse historique du concept "similitude" à travers une évocation des travaux de leurs auteurs.

Nous parlerons ensuite du public cible, des objectifs pédagogiques spécifiques de notre ressource, de la place de la ressource dans le programme de terminale C, de la répartition horaire et enfin du déroulement prévu des activités de la ressource.

Les deux dernières parties sont respectivement consacrées à l'étude des similitudes directes et des similitudes indirectes.

Pour toute la suite, on se place dans un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$). (On considère que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont unitaires, orthogonaux et qu'ils forment dans cet ordre, un angle orienté de mesure principale + $\frac{\pi}{2}$).

1.2 Objectifs pédagogiques spécifiques de la ressource

A la fin de ce cours :

- **Objectif pédagogique spécifique 1**

L'élève doit être capable de produire l'écriture complexe d'une similitude définie géométriquement par la donnée de ses éléments caractéristiques.

- **Objectif pédagogique spécifique 2**

L'élève doit être capable de produire l'écriture complexe d'une similitude définie géométriquement à partir d'une configuration plane (de points et de leurs images respectives).

- **Objectif pédagogique spécifique 3**

L'élève doit être capable de produire l'écriture complexe d'une similitude définie géométriquement comme composée d'une isométrie plane et d'une homothétie.

- **Objectif pédagogique spécifique 4**

L'élève doit être capable de produire l'interprétation complexe des éléments caractéristiques d'une similitude plane définie géométriquement.

- **Objectif pédagogique spécifique 5**

L'élève doit être capable de reconnaître une similitude plane à partir de son écriture complexe.

- **Objectif pédagogique spécifique 6**

L'élève doit être capable de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude plane identifiée, à partir de son écriture complexe.

- **Objectif pédagogique spécifique 7**

L'élève doit être capable de produire la forme réduite éventuelle d'une similitude plane identifiée, à partir de son écriture complexe.

- **Objectif pédagogique spécifique 8**

L'élève doit être capable de produire l'expression analytique d'une similitude plane identifiée, à partir de son écriture complexe.

- **Objectif pédagogique spécifique 9**

L'élève doit être capable de produire l'écriture complexe d'une composée de deux similitudes planes définies géométriquement par l'usage de l'outil de la traduction complexe.

- **Objectif pédagogique spécifique 10**

L'élève doit être capable d'interpréter à l'aide de la traduction complexe, les relations entre les points d'une figure géométrique (une configuration plane) en termes d'effets de similitudes planes

- **Objectif pédagogique spécifique 11**

L'élève doit être capable de déterminer le lieu géométrique du point variable M du plan, dont l'affixe z satisfait une condition en lien avec le(s) module(s) de nombre(s) complexe(s) du type $az + b$ ou $a\bar{z} + b$ ou l'argument.

- **Objectif pédagogique spécifique 12**

L'élève doit être capable de déterminer le lieu géométrique du point variable M du plan, dont l'affixe z satisfait une condition remplie par l'affixe z' du point M', en lien avec le module et l'argument du nombre complexe du type $\frac{z'-b}{z}$ ou $\frac{z'-b}{\bar{z}}$.

1.3 Relations avec les autres parties du programme

L'enseignement de la traduction complexe des similitudes planes convoque les notions de géométrie affine telles que les points, les vecteurs, les distances, les angles orientés, les homothéties, les isométries du plan, les nombres complexes et géométrie et l'introduction géométrique des similitudes planes.

1.4 Historique et motivations

1.4.1 Historique

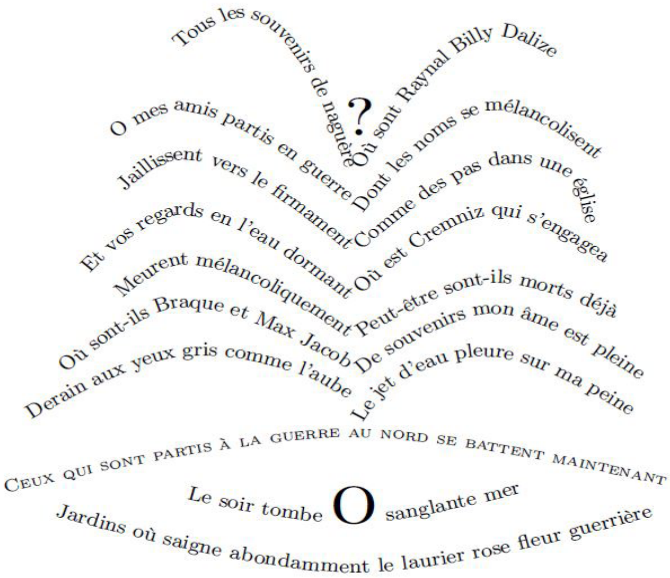
Les similitudes planes que nous étudions commencent avec EULER dans son traité publié en Octobre 1791 et intitulé *De centro similitudinis* (sur le centre de similitude). EULER considère que, si deux figures coplanaires sont semblables, alors il existe dans ce plan un certain point qui établit de manière similaire un rapport entre les segments de l'une ou l'autre figure, qu'il nomme segments homologues.

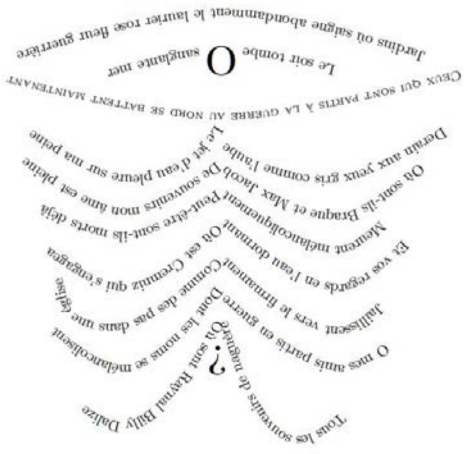
On a cru jusqu'ici que, dans son Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires, publié à Paris en 1806, ARGAND était le fondateur de la représentation moderne des nombres complexes comme lignes ayant une direction déterminée. Dès 1799, GAUSS a eu la même idée et déjà à la fin du XVII^{e} siècle, WALLIS dans son *A treatise of Algebra* (London, 1685), a essayé de donner aux nombres imaginaires une signification réelle.

Mais le mémoire de WESSEL, *om direktionensanalytiske*, présenté à l'académie des sciences de Copenhague le 10 mars 1797, imprimé en 1798 puis traduit en français en 1897 sous le titre *Essai sur la représentation analytique de la direction*, voit dans une multiplication d'un complexe par un autre, une rotation suivie d'une homothétie. Cette idée va inspirer le livre d'EDWARD THOMAS COPSON, *An introduction to the theory of functions of a complex variable* de 1935, où le mathématicien britannique utilise une représentation des nombres complexes comme matrices de similitudes.

1.4.2 Motivations

IMAGE DE DEUX FIGURES SIMILAIRES





Par l'agrandissement ou la réduction et le retournement convenables, chacune des deux figures ci-dessus peut être transformée en une figure superposable à l'autre.

Quelles sont les transformations affines du plan qui permettent par ce principe de reproduire la deuxième figure à partir de la première ou inversement? De quels types de transformations s'agit-il? Quels sont les éléments caractéristiques de chacune de ces transformations? Quelles sont les définitions géométrique, complexe et analytique de chacune de ces transformations et leurs articulations?

Notre étude est motivée par une contribution à la reconnaissance de ces transformations et à leurs traductions complexes.

1.5 Pré-requis

Comme nous l'avons souligné à l'introduction, les outils théoriques sur lesquels doivent reposer les activités de l'élève résident principalement dans les mises en relation et en articulation dans les cadres géométrique, algébrique et analytique des objets mathématiques en lien avec:

- les vecteurs, les distances, les angles orientés, etc. et les parties remarquables du plan affine euclidien: droites, cercles, figures géométriques, etc.
- les homothéties et les isométries du plan, leurs éléments caractéristiques, leurs propriétés et leurs effets sur certains objets géométriques du plan,
- les isométries du plan, leurs compositions et leurs décompositions en composées de réflexion et leurs effets sur les configurations du plan.

- les éléments caractéristiques, la définition géométrique, les propriétés des similitudes planes et leurs effets sur certains objets géométriques du plan.
- les nombres complexes et la géométrie dans le plan affine euclidien.
- les traductions complexes des distances et rapports de distances ; des vecteurs et mesures des angles orientés.
- les traductions complexes de l'invariance point par point et de l'invariance globale.
- les traductions complexes des homothéties et des isométries planes.

CHAPITRE 2 : TRADUCTION COMPLEXE DES SIMILITUDES DIRECTES

2.1 Traduction complexe d'une translation, d'une rotation et d'une homothétie

Le but de cette partie est de permettre à l'élève de se rappeler des articulations entre les définitions géométrique, complexe et analytique d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation du plan euclidien orienté et de leurs mises en relations, sur lesquelles reposent les définitions géométrique, complexe et analytique des similitudes directes et leur aspect opératoire.

Dans cette partie, chacune des transformations sus-évoquées (homothétie, rotation et translation) est définie par ses (ou son) élément(s) caractéristique(s).

Nous rappelons quelques notations dont nous allons nous servir dans la suite :

- $r = r(\Omega, \theta)$, la rotation de centre Ω et d'angle θ ($-\pi<\theta\leq\pi$).
- $h = h(\Omega, k)$, l'homothétie de centre Ω et de rapport k (k étant un réel non nul et différent de 1).
- $t = t_{\vec{u}}$, la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$. ($\alpha + i\beta$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$).
- ω, l'affixe du point $\Omega(x_0, y_0)$. ($\omega = x_0 + iy_0$).
- M, le point de cordonnées (x, y) et d'affixe $z = x + iy$ et M', le point de cordonnées (x', y') et d'affixe $z' = x' + iy'$.

Nous nous référons au cours sur les isométries du plan et sur les applications affine planes, pour rappeler dans cette partie les correspondances entre les différentes formes de définitions (géométrique, algébrique et analytique) d'une translation, d'une rotation et d'une homothétie.

Transformation	Définition géométrique	Définition complexe	Définition analytique
$t = t_{\vec{u}}$	$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$t(M) = M' \Leftrightarrow z' - z = \alpha + i\beta$ (forme z'=z+b)	$t(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}$
$h = h(\Omega, k)$	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$h(M) = M'$ $\Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)$ (forme z'=kz+b)	$h(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$
$r = r(\Omega, \theta)$	$r(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ et \\ Mes\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$	$r(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ (forme z'=$e^{i\theta}$z+b)	$r(M) = M' \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$
	$Nous\ rappelons\ que: pour\ M \neq \Omega,\ \left\lvert\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right\rvert = \frac{\lvert z'-\omega\rvert}{\lvert z-\omega\rvert} = \frac{\Omega M'}{\Omega M}\ \ et\ \ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = Arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta$		

2.2 Activités préparatoires

2.2.1 Activité 1

- **Énoncé de l'activité 1**

Soit s une similitude directe de centre Ω et d'angle θ et de rapport k qui transforme tout point M du plan en M' c'est-à-dire : s(M)=M'.

1) $Pour\ M \neq \Omega$, compléter les deux relations suivantes:

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M} = \cdots et\ \ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \cdots$$

2) Ω, M et M' sont les points d'affixes respectives z, z' et ω respectivement.

(i) $Pour\ M \neq \Omega$, compléter les relations :

$$\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \cdots\ \ et\ \ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = Arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \cdots$$

(ii) En déduire en fonction de k et θ la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ (z≠ω).

(iii) Déterminer en fonction de ω, k et θ , les deux nombres complexe a et b tels que : $z' = az + b$.

- **Analyse a priori de l'activité 1**
  - **Objectif pédagogique spécifique de l'activité 1**

L'activité 1 a pour objectif de permettre à l'élève de « savoir identifier la traduction complexe des éléments caractéristiques données dans le cadre géométrique, d'une similitude directe, afin d'appréhender leurs rôles, leurs effets et leur importance dans l'écriture complexe de cette similitude et d'être capable réciproquement d'extraire les caractérisations géométriques de ces éléments à partir de l'écriture complexe d'une similitude directe.

  - **Schéma adapté** : Cadre géométrique⟶cadre algébrique

  - **Justification de l'activité**

L'activité vise à construire le sens et les significations de la représentation algébrique (ou écriture complexe) d'une similitude directe définie dans le cadre géométrique par la donnée de ses éléments caractéristiques, en faisant émerger les représentations de ces éléments caractéristiques et de leurs fonctions dans le cadre algébrique.

- **Stratégies de réussite du sujet rationnel**

- La question 1) vise à permettre à l'élève de se placer sur la définition géométrique de la similitude s que nous rappelons : Pour tout point M différent de Ω et pour tout point M' du plan :

  s(M)=M'$\Leftrightarrow \frac{\Omega M'}{\Omega M} = k \;\; et \;\; Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$

  (θ, la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right)$).
- La question 2) vise à permettre à l'élève d'identifier k et θ, respectivement comme le module et l'argument principal du nombre complexe $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$: il s'agit d'une interprétation de ces deux caractéristiques de la similitude s dans le cadre algébrique.
- La question 3) vise à permettre à l'élève la production de la relation $z' = az + b$ et l'identification du rôle et l'interprétation algébrique des caractéristiques de s dans cette expression complexe.

Une autre stratégie de réussite consiste à partir de la forme réduite de la similitude s connue de l'élève ($s = hor = roh$) et de s'appuyer sur les rappels faits en 2.1 pour produire la relation $z' = az + b$ et caractériser les coefficients a et b du point de vue de l'interprétation algébrique des éléments caractéristiques de s.

- **Les sources des erreurs significatives de l'élève**

Nous entendons par erreurs significatives, les erreurs produites par l'élève et dont le traitement est non seulement constitutif du sens, de la construction de la connaissance visée, mais également permet son adaptation pertinente.

Les sources d'erreurs significatives de l'élève peuvent résider dans ses représentations et ses conceptions obstacles en lien avec :

- les relations entre les définitions géométrique, complexe et analytique d'une rotation, d'une translation et d'une homothétie,
- les définitions géométrique et analytique d'une similitude directe et de l'interprétation complexe de ses éléments caractéristiques en termes d'argument principal et de module,

- la mise en relation dans le programme de composition du point de vue algébrique (programme de calcul), entre les définitions complexe d'une rotation et d'une homothétie de même centre, dont la composée est la similitude directe,
- l'interprétation algébrique de la définition géométrique de s, notamment les changements de cadres qui affectent les rôles de ses éléments caractéristiques dans leurs manipulation par l'élève en situation, plus précisément dans le passage du cadre géométrique au cadre algébrique.

- **Activité 1 : solution**

1) Pour tout point M $(M \neq \Omega)$,

s(M)=M'$\Leftrightarrow$ $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k \;\; et \;\; Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$

2) Ω, M et M' sont les points d'affixes respectives z, z' et ω respectivement.

(i) $Pour\ M \neq \Omega$, on a les relations suivantes :

$$\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = \frac{\Omega M'}{\Omega M} \;\; et \;\; Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = Arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \ (*)$$

(ii) La forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ (z≠ω) en fonction de k et θ .

Les deux relations de (*) nous donnent le module et l'argument principal de $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$: donc $\frac{z'-\omega}{z-\omega} = ke^{i\theta}$.

3) Déterminons en fonction de ω, k et θ les deux nombres complexe a et b tels que : $z' = az + b$.

Pour tous nombres complexes z et z' (z≠ω),

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\theta} \;\; et \;\; z' = az + b \;\; si \;\; et\ selement\ si$$

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \;\; et\ z' = az + b.$$

Ce qui équivaut à $a = ke^{i\theta}$ et $b =$ (1-a) ω. Pour étendre cette propriété à tout nombre complexe z, on remarque que z'=ω, pour z=ω.

- **Conclusion de l'activité 1**

Toute similitude directe de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k, associe à tout point M du plan d'affixe z, le point M' d'affixe z' telles que $z' = az + b$ avec : $a = ke^{i\theta}$ et $b =$ (1-a) ω.

- **Condition d'existence dans le cadre algébrique, du centre de la similitude directe**

Dans l'écriture $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$ et $b = (1 - a)\,\omega$ de la conclusion précédente, la condition d'existence de ω, $a \neq 1$ (affixe du centre Ω de la similitude directe) détermine la caractérisation des coefficients a et b de l'écriture $z' = az + b$ qui permet à cette écriture de rendre compte d'une similitude directe à centre.

2.2.2 Activité 2

- **Énoncé de l'activité 2**

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2;\ 1)$ et de rapport 2 et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. 1) Donner les expressions analytiques respectives de h et r. 2) Déduire de la question 1) l'expression analytique de hor. 3) Déduire de la question 2) l'écriture complexe de hor.

- **Analyse a priori de l'activité 2**

  - **Objectif pédagogique spécifique de l'activité 2**

Cette activité vise à permettre à l'élève d'être capable de produire l'écriture complexe d'une similitude directe, définie comme la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre, au moyen des définitions analytiques respectives de l'homothétie et de la rotation.

  - **Schéma adapté :**

Cadre géométrique ⟶ cadre analytique ⟶ cadre algébrique

  - **Justification de l'activité 2**

L'activité vise à construire le sens et les significations du point de vue algébrique et du point de vue analytique de « la définition d'une similitude directe s comme composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre « en permettant aux élèves de mobiliser leurs connaissances sur les articulations entre les définitions complexes et analytiques d'une rotation et d'une homothétie et de leurs articulations dans la composition des ces transformations, pour produire la définition complexe de cette similitude.

  - **Choix de certaines variables de la situation**

En fixant des valeurs des éléments caractéristiques de la similitude s, faciles à manipuler dans les calculs convoqués par la résolution du problème posé, notre but est de permettre à l'élève un accès facile aux calculs que lui imposent la constitution du sens de ces caractéristiques, de leurs interprétations et de leurs usages, aux passages du cadre géométrique, au cadre algébrique, en transitant par le cadre analytique.

- **Stratégies de réussite du sujet rationnel**

- La question 1) vise à permettre à l'élève de produire les définitions analytiques de h et r en se servant des rappels que nous avons faits en 2.1. La donnée de ces deux expressions analytiques est suffisante pour déterminer l'expression analytique de la composée hor dans la question 2).
- La réponse à la question 3) détermine le principal objectif de l'activité 2 : elle vise à permettre à l'élève de produire l'écriture complexe de la similitude (identifiée comme hor), en s'appuyant sur son expression analytique.

- **Les sources des erreurs significatives de l'élève**

Les sources d'erreurs significatives de l'élève peuvent résider dans ses représentations et ses conceptions obstacles en lien avec:

- les relations entre les définitions géométrique, complexe et analytique d'une rotation, d'une translation et d'une homothétie,
- les définitions géométrique et analytique d'une similitude directe et sur l'interprétation complexe de ses éléments caractéristiques en termes d'argument principal et de module,
- la mise en relation dans le programme de composition du point de vue analytique, entre les définitions complexe d'une rotation et d'une homothétie de même centre, dont la composée est la similitude directe,
- l'interprétation algébrique de la définition géométrique de s, notamment les changements de cadres qui affectent les rôles de ses éléments caractéristiques dans leurs manipulation par l'élève en situation, plus précisément dans le passage du cadre géométrique au cadre algébrique,
- les interprétations géométrique, complexe et analytique des éléments caractéristiques d'une similitude directe, de leurs rôles respectifs et de leurs articulations dans le fonctionnement de ces définitions dans le passage du cadre géométrique au cadre algébrique, en passant par le cadre analytique qu'exige cette traduction complexe.

- **Convocation des cadres géométrique, analytique et algébrique**

L'activité préparatoire 2 convoque le cadre analytique pour traduire la définition géométrique d'une conique en définition complexe. Le cadre analytique permet le passage du cadre géométrique au cadre algébrique.

- **Activité 2 : solution**

Soit h l'homothétie de centre $\Omega(-2;\ 1)$ et de rapport 2 et soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Donnons les expressions analytiques respectives de h et r.

Désignons par : z, z' et ω les affixes respectives des points $M(x, y), M'(x', y')\ et\ \Omega(-2,1)$.

On a: $z = x + iy, z' = x' + iy'\ et\ \omega = -2 + i$.

D'après les rappels faits en 2.1 :

. h(M)=M'$\Leftrightarrow z' - \omega = 2(z - \omega) \Leftrightarrow z' = 2z - \omega$

$$\Leftrightarrow x + iy' = (2x + 2) + i(2y - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}.$$

. r(M)=M'$\Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$

$$\Leftrightarrow z' = iz + (1 - i)\omega \Leftrightarrow z' = iz - 1 + 3i.$$

r(M)=M'$\Leftrightarrow x' + iy' = (-y - 1) + i(x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$.

2) Déduisons de 1) l'expression analytique de hor.

Posons : $M' = s(M) = h(M_1) = hor(M)$ et $r(M) = M_1$; $z_1 = x_1 + iy_1$ désigne l'affixe du point M_1.

$r(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -y - 1 \\ y_1 = x + 3 \end{cases}$ et

$h(M_1) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x_1 + 2 = 2(-y - 1) + 2 = -2y \\ y' = 2y_1 - 1 = 2(x + 3) - 1 = 2x + 5 \end{cases}$

d'où $M' = s(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x + 5 \end{cases}$ (expression analytique de $s = hor$).

3) Déduisons-en l'écriture complexe de $s = hor$

$M' = s(M) \Leftrightarrow z' = (-2y) + i(2x + 5)$

$\Leftrightarrow 2i^2$y+ $i(2x + 5) = 2i(x + iy) + 5i = 2iz + 5i$

d'où $M' = s(M) \Leftrightarrow z' = 2iz + 5i.$

2.3 Définition complexe d'une similitude directe

2.3. 1 Applications affines particulières d'écriture complexe $z' = az + b$

Avant de proposer de manière générale la définition complexe et l'écriture complexe d'une similitude directe, à l'appui des deux activités précédentes, nous examinons dans cette partie les applications affines particulières d'écriture complexe de la forme $z' = az + b$, avec $a = 0$ ou $|a| = 1$.

Dans le paragraphe 2.1 de notre texte, nous avons traité des écritures complexes respectives $z' = z + b$ et $z' = e^{i\theta}z + b$ d'une translation et d'une rotation. Nous allons à présent, dans le sens contraire à cette démarche, dévisager les applications affines planes d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a = 0$ ou $|a| = 1$.

L'application affine du plan dont la définition complexe est $z' = b$ est une application affine constate c'est-à-dire la projection affine sur le point d'affixe b.

Supposons pour la suite que $a \neq 0$ et que $|a| = 1$. Pour ce, nous nous appuierons sur la conclusion de l'activité 1, que nous rappelons ici.

Toute similitude directe s de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k ; associe à tout point M du plan d'affixe z, le point M' d'affixe z' ($s(M) = M'$) telles que $z' = az + b$ avec : $a = ke^{i\theta}$ et $b = (1 - a)\omega$.

Remarques

Il ressort de cette configuration de l'écriture complexe $z' = az + b$ ($a = ke^{i\theta}$ et $b = (1-a)\omega$) d'une similitude directe s de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k, que :

- $a \neq 1$: c'est une conséquence de l'existence de $\omega = \frac{b}{1-a}$ (donc du centre de la similitude s, et partant de sa nature comme composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre).
- sous la condition $a \neq 1$, le réel positif k peut être égal à 1,

$(k = 1 \; et \; a = ke^{i\theta}) \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = e^{i\theta})$: cas d'une rotation d'angle θ.

- le réel θ de l'intervalle (des arguments principaux) $\left]-\pi, \pi\right]$, peut être égal à 0 (a=k : $a \in \mathbb{R}_+^*$) ou à π : cas d'une homothétie de rapport a.

(a=-k : $a \in \mathbb{R}_-^*$).

(Voir exercices résolus de 5.4.1)

2.3. 2 Définitions complexe et algébrique d'une similitude directe $S(\Omega,\theta,k)$

En nous démarquant de l'étude que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, nous nous plaçons dans cette partie dans le cas d'une similitude directe de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k, qui (selon la conclusion de l'activité 1), associe à tout point M du plan d'affixe z, le point M' d'affixe z' telles que : (i) $z' = az + b$ avec : $a = ke^{i\theta}$ et $b =$ (1-a) ω.

Nous allons tout d'abord proposer la définition complexe d'une similitude directe en se référent à sa définition géométrique : la traduction complexe de sa définition géométrique et la traduction complexe de ses éléments caractéristiques du point de vue de leurs fonctions respectives dans cette articulation de cadres géométrique et algébrique, avant de définir son écriture complexe et de préciser la traduction complexe de ses éléments caractéristiques définis initialement dans le cadre géométrique.

Rappelons tout d'abord la propriété « d'invariance point par point » de la similitude directe S :

Le point Ω d'affixe ω , centre de la similitude directe S, est le seul point du plan invariant par S ; c'est-à-dire, le seul point M du plan tel que $S(M) = M$.

Comme conditions d'existence de l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ et de l'existence du rapport de distances $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$, nous supposons pour la suite de cette partie que le point Ω d'affixe ω est différent du point M d'affixe z.

- **Traduction complexe de la définition géométrique**

La similitude directe S, de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k ; associe à tout point M du plan d'affixe z, le point M' d'affixe z' telles que $s(M) = M'$) si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k \ \ et \ \ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta$ (définition géométrique), où θ désigne la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)$.
- $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = \frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = k \ \ et \ \ Arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta$ (définition complexe), où θ désigne l'argument principal du quotient des affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$.

Notons par ailleurs que ces deux définitions reposent et revoient à deux énoncés équivalentes à l'énoncé : « M' est l'image de M par la similitude directe S », dans deux cadres différents.

(Voir exercices résolus de 5.4.1)

- **Traduction complexe d'objets mathématiques de la définition géométrique**

Nous nous appuyons dans cette traduction sur la relation entre un point et son affixe et les effets de cette relation sur les mises en relation et en articulation entre les objets mathématiques de la définition géométrique et leurs produits algébriques dans la traduction complexe d'une similitude directe.

Sous la condition de la caractérisation donnée dans la partie précédente, et pour élucider les relations et les articulations entre les deux définitions précédentes, on peut écrire que :

$$\frac{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}=\frac{\Omega M'}{\Omega M}\,e^{iMes\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)}=\frac{z'-\omega}{z-\omega}=ke^{i\theta}$$

Ce qui conduit à la traduction complexe suivant de la similitude directe :

Cadre géométrique		**Cadre algébrique**
Objet géométrique de la définition géométrique de la similitude directe S	Fonction dans la définition géométrique de la similitude directe S	Traduction complexe de l'objet géométrique de la définition directe S
Le rapport **k**	Rapport de distances $\frac{\Omega M'}{\Omega M}$ (coefficient de proportionnalité entre les distances)	Rapport de modules $\frac{\lvert z'-\omega\rvert}{\lvert z-\omega\rvert}$ (coefficient de proportionnalité entre les modules)
L'angle $\boldsymbol{\theta}$	Mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)$	Argument principal du quotient des affixes $\frac{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}=\left\lvert\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right\rvert=\frac{\lvert z'-\omega\rvert}{\lvert z-\omega\rvert}$
Relation $\boldsymbol{S(M) = M'}$	Fonction implicite d'articulation entre la condition métrique liée au rapport $\boldsymbol{k}$ et la condition angulaire liée à l'angle $\boldsymbol{\theta}$	Écriture complexe $\boldsymbol{z' = az + b}$ **;** avec **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{b} = (1\text{-a})\ \omega$
Le centre Ω	Sommet de l'angle orienté et origine dans la considération des distances ΩM et $\Omega M'$.	L'unique nombre complexe ω tel que $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=\boldsymbol{ke^{i\theta}}$.

- **Traductions complexes d'objets mathématiques qui interagissent dans la relation $\boldsymbol{S(M) = M'}$**

Le but de cette partie est d'élaborer les outils théoriques, susceptibles de permettre à l'élève de partir de la traduction complexe de la relation entre un point et son image ou l'écriture complexe d'une similitude directe, pour en préciser les éléments caractéristiques et appréhender leurs fonctions respectives dans la définition géométrique de cette similitude.

Comme nous l'avons souligné à l'introduction de cette ressource, l'écriture complexe d'une similitude directe $\boldsymbol{z' = az + b}$; avec **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{b} =$ (1-a) ω, est la représentation algébrique de la relation $\boldsymbol{S(M) = M'}$ entre un point M et son image M', qui rend le plus compte de cette relation et mieux encore de la similitude directe à travers les représentations algébriques ω et **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$, de ces éléments caractéristiques dans le cadre algébrique.

Nous proposons ici la traduction complexe des objets géométriques de la définition géométrique de la similitude directe S, dans la traduction complexe de la relation $S(M) = M'$(son écriture complexe), entre un point M et son image M' :

Cadre géométrique		**Cadre algébrique**
Objet géométrique de la définition géométrique de la similitude directe S	Fonction dans la définition géométrique de la similitude directe S	Traduction complexe de l'objet géométrique de la définition directe S
Le rapport **k**	Rapport de distances $\boldsymbol{\frac{\Omega M'}{\Omega M}}$	Module du coefficient complexe **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$ de $\boldsymbol{z' = az + b}$
L'angle $\boldsymbol{\theta}$	Mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right)$	Argument principal du coefficient complexe : **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$ de $\boldsymbol{z' = az + b}$
Relation $\boldsymbol{S(M) = M'}$	Fonction implicite d'articulation entre la condition métrique liée au rapport $\boldsymbol{k}$ et la condition angulaire liée à l'angle $\boldsymbol{\theta}$	Écriture complexe $\boldsymbol{z' = az + b}$; avec **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$ **et** $\boldsymbol{b} =$ (1-a) ω
Le centre Ω	Sommet de l'angle orienté et origine dans la considération des distances ΩM et $\Omega M'$.	L'unique nombre complexe **ω** tel que : **ω** $= \boldsymbol{a}$**ω** $+ \boldsymbol{b}$**,** avec **a=** $\boldsymbol{ke^{i\theta}}$**.**

- **Traduction complexe d'objets mathématiques dans la forme réduite**

Le but de cette partie est d'élaborer les outils théoriques, susceptibles de permettre à l'élève de produire l'écriture complexe d'une similitude directe et de traduire ses éléments caractéristiques dans le cadre algébrique, à partir de la donnée de cette similitude directe, comme composée ($S = hor = roh$) d'une rotation et d'une homothétie de rapport positif et de même centre que la rotation.

Nous proposons ici la traduction complexe des objets géométriques (rapport, angle, centre, relation $S(M) = M'$, etc.) de la définition géométrique de la similitude directe S, dans la traduction complexe de la sa forme réduite de la similitude directe donnée par ces trois éléments caractéristiques ($S = hor = roh$) :

Commençons tout d'abord par la traduction complexe des trois relations équivalentes $S(M) = M'$, $hor(M) = M'$ et enfin $roh(M) = M'$ entre le point M et son image M' par $S = hor = roh$. Posons $M_1 = r(M)$ et $M_2 = h(M)$ et considérons les affixes respectives z_1 et z_2 des points M_1 et M_2. Les trois relations équivalentes $S(M) = M'$, $hor(M) = M'$ et enfin $roh(M) = M'$ entre le point M et son image M' par $S = hor = roh$, peuvent se traduire par :
$S(M) = M' = roh(M) = r(M_2)$.

Nous alors deux programmes de calculs de z' comme affixe du point M'image de M par S :
$z_1 = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ et $z' = k(z_1 - \omega) + \omega$ (les traductions complexes respectives de $M_1 = r(M)$ et $M' = h(M_1)$, d'une part ; et d'autre part
$z_2 = k(z - \omega) + \omega$ et $z' = e^{i\theta}(z_2 - \omega) + \omega$ (les traductions complexes respectives de $M_2 = h(M)$ et $M' = r(M_2)$.

<table>
<tr><td colspan="2">Relation $S(M) = M'$ sous l'écriture $S = hor = roh$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cadre géométrique (registre affine)</td><td>$M \longmapsto M_1 = r(M) \longmapsto M' = h(M_1) = hor(M)$</td></tr>
<tr><td>$M \longmapsto M_2 = h(M) \longmapsto M' = r(M_2) = roh(M)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Programmes de calculs de $z' = az + b$, associés à $S = hor = roh$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cadre algébrique (registre complexe)</td><td>$z \longmapsto z_1 = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \longmapsto z' = k(z_1 - \omega) + \omega$</td></tr>
<tr><td>$z \longmapsto z_2 = k(z - \omega) + \omega \longmapsto z' = e^{i\theta}(z_2 - \omega) + \omega$</td></tr>
</table>

Nous venons de présenter la traduction complexe de la transformation d'un point M en un point M' par la similitude directe S, perçue sous sa forme réduite $S = hor = roh$, en termes de programmes de calcul de l'affixe z' du point M' à partir de l'affixe z du point M. Nous allons maintenant nous attarder sur la traduction complexe d'objets mathématiques qui interagissent dans ces programmes de calculs, pour mettre en évidence leurs rôles, leurs effets et leur importance dans la construction géométrique de l'image d'un point par une similitude directe.

Cadre géométrique		**Cadre algébrique**
Objet géométrique de la définition géométrique de la similitude directe S	Fonction dans la relation $S(M) = M'$ sous l'écriture $S = hor = roh$	Traduction complexe de la fonction de l'objet géométrique
Le rapport **k**	Rapport de l'homothétie h. Coefficient de colinéarité : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$; $\overrightarrow{\Omega M_2} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{MM_1} = k\overrightarrow{M_2M'}$.	Coefficient de proportionnalité entre les affixes respectives des vecteurs : $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M_1}$; $\overrightarrow{\Omega M_2}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_2M'}$.
L'angle $\boldsymbol{\theta}$	Angle de la rotation r . Angle au sommet commun des triangles isocèles en situation de Thalès ΩMM_1 et $\Omega M_2M'$.	Argument principal commun des nombres complexes $\frac{z_1-\omega}{z-\omega}$ et $\frac{z'-\omega}{z_2-\omega}$: $\frac{z'-\omega}{z_2-\omega} = \frac{z_1-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$
Relation $\boldsymbol{S(M) = M'}$	Fonction de détermination de M' à partir de M selon deux articulations à partir du centre Ω:	Deux programmes de calculs de z' à partir de z et z_1 et à partir de z et z_2 :
	$M \longmapsto M_1 \longmapsto M'$ $M_1 = r(M) = h^{-1}oS(M) = h^{-1}(M')$	$z \longmapsto z_1 \longmapsto z'$
	$M \longmapsto M_2 \longmapsto M'$ $M_2 = h(M) = r^{-1}oS(M) = r^{-1}(M')$	$z \longmapsto z_2 \longmapsto z'$
Le centre Ω	Centre commun de r et de h. Sommet commun des triangles isocèles en situation de Thalès ΩMM_1 et $\Omega M_2M'$.	ω est l'unique nombre complexe vérifiant : $\frac{z'-\omega}{z_2-\omega} = \frac{z_1-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$
Cas particulier du point O et de son image O' : $O' = \boldsymbol{S(O)}$	Image par S de l'origine O du repère orthonormé (O,$\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$)	Point d'affixe la constante b de l'écriture $\boldsymbol{z' = az + b}$
		$\lvert a\rvert = \left\lvert \frac{z' - b}{z} \right\rvert = \frac{O'M'}{OM}$
		Arg(a)=Mes$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}})$

2.4 Expression analytique, définition géométrique et définition algébrique

L'expression analytique de la similitude directe S relativement à un repère donné, renvoie à notre sens à la représentation dans le cadre analytique, plus précisément dans le registre des couples de nombres réels (identifiés comme coordonnées de points M et M'), qui rend le plus compte de la relation $S(M) = M'$ du cadre géométrique, plus précisément dans le registre des transformations du plan et dans le registre des points du plan. Cette représentation fournie :

- dans **le cadre algébrique**, les expressions respectives de la partie réelle x' et de la partie imaginaire y' de l'affixe z' du point $M' = S(M)$ en fonction des parties réelle x et imaginaire y de l'affixe z du point M.
- dans **le cadre analytique**, les expressions respectives de l'abscisse x' et de l'ordonnée y' du point $M' = S(M)$ en fonction des coordonnées x et y du point M.

Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe écrit sous la forme algébrique, sont des représentations dans le cadre algébrique qui rendent le plus compte des cordonnées du point dont ce nombre complexe (affixe de ce point) est le représentant algébrique. Pour modéliser ce point de vue, nous énonçons la propriété suivante :

Propriété

Soit S, la similitude directe, de centre le point Ω d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$, d'angle θ et de rapport k ; M et M', les points du plan d'affixes respectives $z = x + iy$ et z'=x'+y'. L'énoncé du cadre géométrique $s(M) = M'$ est équivalent à chacun des énoncés suivants :

(1) $z' = az + b$ (avec a= $ke^{i\theta}$ et $b =$ (1-a) ω) (cadre algébrique, dans le registre des nombres complexes)

(2) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\theta & k\sin\theta \\ -k\sin\theta & k\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ (cadre analytique, dans le registre des notations matricielles)

Une démonstration de cette propriété repose sur la forme algébrique de l'écriture $z' = az + b$ (avec a= $ke^{i\theta}$ et $b =$ (1-a) ω) et sur la propriété de l'égalité de deux nombres complexes écrits sous leurs formes algébriques.

2.5 Ecriture complexe, et détermination géométrique

Le but de cette partie est de fournir aux élèves les outils théoriques susceptibles de leur permettre de produire l'écriture complexe d'une similitude directe à partir d'un mode de détermination géométrique différent de la donnée explicite de ses trois éléments caractéristiques.

Nous nous intéressons dans cette partie à la traduction complexe (dans le cadre algébrique) de la relation générale du cadre géométrique $s(M) = M'$) selon les modes de la détermination géométrique d'une similitude directe.

Dans les lignes qui précèdent, nous avons exploré le mode de détermination géométrique d'une similitude directe par la donnée de son centre, de son rapport et de son angle (ses éléments caractéristiques).

Nous proposons ici quelques pistes des stratégies à adopter selon les registres convoqués par les données pertinentes de l'énoncé et la consigne, de la configuration du plan avec laquelle interagit la similitude directe et des effets de ces interactions, qui déterminent la détermination géométrique de cette similitude.

Nous nous centrons sur la similitude directe entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images respectives

La traduction complexe de la propriété caractéristique d'une similitude directe (que nous rappelons ici) peut constituer un outil de production de l'écriture complexe d'une similitude directe déterminée géométriquement par la donnée deux points et leurs images ou par la donnée de son centre, d'un point et son image.

Soit S, la similitude directe de centre le point Ω d'affixe ω, d'angle θ et de rapport k et M, N, M' et N' les points d'affixes respectives $z_M, z_N, z_{M'}$ et $z_{N'}$.

Pour M≠N et M'≠N', il y a équivalence entre :

(1) s(M)=M' et s(N)=N'

(2) $\frac{M'N'}{MN} = k \; et \; Mes\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta$)

(3) $\begin{cases} az_M + b = z_{M'} \\ az_N + b = z_{N'} \end{cases}$, (traduction complexe avec $a = ke^{i\theta}$ et b = (1-a) ω)

Dans la donnée d'un point N et de son image N' par la similitude S, on peut dans le raisonnement précédent, identifier M à Ω et obtenir les objets projetés.

2.6 Exercice d'application

Cet exercice met en évidence la particularité de la forme réduite d'une similitude directe en montrant que la même similitude peut s'écrire comme composée d'une rotation et d'une homothétie de centres différents.

- **Énoncé**

Soit f, la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telles que : $z' = 2iz + 2 + i$.

1) Montrer à l'aide du programme de calcul de $z' = 2iz + 2 + i$, que f peut s'écrire comme composée d'une rotation, et d'une homothétie de centres différents.
2) Montrer que pour tous les nombres complexes z et z', $z' = 2iz + 2 + i \Leftrightarrow z' - i = 2i(z - i)$.
3) En utilisant les deux programmes de calculs de $z' = 2iz + 2 + i$ suivants :
   (i) z$\longmapsto z_1 - i = i(z - i)\ et\ z_1 \mapsto z' - i = 2(z_1 - i)$
   (ii) z$\longmapsto z_2 - i = 2(z - i)\ et\ z_2 \mapsto z' - i = i(z_2 - i)$,
   Montrer que $f = roh = hor$ où r et h sont respectivement une rotation et une homothétie de centre commun, dont on précisera pour chacune d'elles, les éléments caractéristiques.

- **Solution**

1) Montrons à l'aide du programme de calcul de $z' = 2iz + 2 + i$, que f peut s'écrire comme composée d'une rotation, et d'une homothétie de centres différents.

Considérons le programme de calcul de z'=2iz+2+i suivant :

z$\longmapsto z_1 = 2z \mapsto z_2 = iz_1 \longmapsto z' = z_2 + 2 + i$; et désignons par M, M_1, M_2 et M' les point d'affixes respectives z, z_1, z_2 et z'.

D'après les rappels précédents et compte tenu du programme de construction de z' :

- $z' = z_2 + 2 \Leftrightarrow$ M'=$t(M_2)$, où t est la translation de vecteur $\vec{u}(2, 1)$.
- $z_2 = iz_1 \Leftrightarrow M_2$=$r_O(M_1)$, où r_O est la rotation de centre O et d'angle+ $\frac{\pi}{2}$;

  donc M'=$t(M_2) = tor_O(M_1)$
- $z_1 = 2z \Leftrightarrow M_1$=$h_O(M)$, où h_O est l'homothétie de centre O et de rapport 2 ;

  donc M' $= t(M_2) = toh_O(M_1) = tor_O oh_O(M) =$ f(M)

d'où : $f = tor_O oh_O = r'oh_O$. (r'= tor_O est une rotation, comme composée d'une translation et d'une rotation ; son centre n'est pas le point O puisque t(O)≠O et O est le centre de l'homothétie h_O).

Traduction affine du programme de calcul de $z' = 2iz + 2 + i$	$z \longmapsto z_1 = 2z$	$z_1 \longmapsto z_2 = iz_1$	$z_2 \longmapsto z' = z_2 + 2 + i$
	$h_O : M \longmapsto M_1$	$r_O : M_1 \longmapsto M_2$	$t : M_2 \longmapsto M'$
	$z \longmapsto z' = z_2 + 2 + i = (iz_1) + 2 + i = 2(iz) + 2 + i = 2iz + 2 + i$		
	$f = (tor_O)oh_O = r'oh_O : M \longmapsto M'$		

2) Montrons que pour tous les nombres complexes z et z',
$z' = 2iz + 2 + i \Leftrightarrow z' - i = 2i(z - i)$.
Pour tous les nombres complexes z et z' :
$z' = 2iz + 2 + i \Leftrightarrow z' - i = (2iz + 2 + i) - i = 2(iz + 1) = 2i(z - i)$

3) En utilisant les deux programmes de calculs de $z' = 2iz + 2 + i$ suivants :
(i) $z \longmapsto z_1 - i = i(z - i)$ et $z_1 \mapsto z' - i = 2(z_1 - i)$
(ii) $z \longmapsto z_2 - i = 2(z - i)$ et $z_2 \mapsto z' - i = i(z_2 - i)$,

4) Montrons que $f = roh = hor$ où r et h sont respectivement une rotation et une homothétie que nous préciserons.

Désignons par : Soit M, M_1, M_2, M' et J, les point d'affixes respectives z, z_1, z_2, z' et i ;

Soit $r = r\left(J, +\frac{\pi}{2}\right)$, la rotation de centre J et d'angle $+\frac{\pi}{2}$; et $h = h\,(J, 2)$, l'homothétie de centre J et de rapport 2.

Les deux programmes de calculs de $z' = 2iz + 2 + i$	$\boldsymbol{z \longmapsto z_1 - i = i(z - i)}$	$\boldsymbol{z_1 \mapsto z' - i = 2(z_1 - i)}$
	$\boldsymbol{z \longmapsto z_2 - i = 2(z - i)}$	$\boldsymbol{z_2 \mapsto z' - i = i(z_2 - i)}$
	$z \longmapsto z' - i = \boldsymbol{2(z_1 - i)} = \boldsymbol{i(z_2 - i)} = 2i(z - i)$	
Traduction affine		
Les deux programmes de décomposition de f sous la forme $f = roh = hor$	$r : M \longmapsto M_1$	$h : M_1 \longmapsto M'$
	$h : M \longmapsto M_2$	$r : M_2 \longmapsto M'$
	$f(M) = h(M_1) = hor(M)$ et $f(M) = r(M_2) = roh(M)$	

CHAPITRE 3 : TRADUCTION COMPLEXE DES SIMILITUDES INDIRECTES

3.1 Traduction complexe d'un antidéplacement du plan

Le but est de permettre à l'élève de se rappeler les définitions géométrique, complexe et analytique d'une réflexion, d'une symétrie glissée et de la composée triple d'une translation, d'une similitude directe et d'une réflexion, sur lesquelles reposent les définitions géométrique, complexe et analytique des similitudes indirectes.

Dans cette partie, chacune des transformations sus-évoquées (réflexion, similitude directe, et translation) est définie par ses (ou son) élément(s) caractéristique(s).

Par adoption de notations, nous désignons par :
$s = s(\Omega, \mathrm{k}, \theta)$, la similitude directe de centre Ω, de rapport k (k étant un réel positif et différent de 1) et d'angle θ ($-\pi<\theta\leq\pi$).
$S = S_{(\Delta)}$, la réflexion d'axe (Δ).
$t = t_{\vec{u}}$, la translation de vecteur $\vec{u}$.

3.1. 1 Écriture complexe d'une réflexion d'axe parallèle à $(x'Ox)$

- **Rappels**
  - La droite (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses (OI). Il existe une translation $t_{\overrightarrow{2u}}$ telle que $t_{\overrightarrow{2u}} = S_{(\Delta)} o S_{(OI)}$; on peut donc écrire $S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{2u}} o S_{(OI)}$.
  - La droite (Δ) est l'image de l'axe des abscisses par la translation $t_{\vec{u}}$.
- **L'écriture complexe de la réflexion $\boldsymbol{S}_{(\Delta)}$ est $\boldsymbol{z' = \bar{z} + z_{\overrightarrow{2u}}}$**

En effet, l'expression complexe de la réflexion d'axe (OI) étant $z' = \bar{z}$ et l'écriture complexe de la translation $t_{\overrightarrow{2u}}$ étant $z' = z + z_{\overrightarrow{2u}}$; par la règle de composition de $t_{\overrightarrow{2u}}\mathbf{o}\boldsymbol{S}_{(\boldsymbol{OI})}$**,** traduite en programme de calculs algébriques de l'affixe z' du point M' image du point M d'affixe z par $S_{(\Delta)}$, l'écriture complexe de $\boldsymbol{S}_{(\Delta)}$ est $\boldsymbol{z' = \bar{z} + z_{\overrightarrow{2u}}}$**.**

- **Exemples**

$z' = \bar{z} + 2i$ est l'écriture complexe de la réflexion $\boldsymbol{S_{(\Delta)}}$, (Δ) étant droite d'équation
$y = 1$, l'image de l'axe des abscisses par la translation de vecteur $\vec{u}(0,1)$.

L'expression analytique de $S_{(\Delta)}$ s'obtient à partir de sa définition complexe ou à partir de sa forme réduite $S_{(\Delta)} = t_{\overrightarrow{2u}} o S_{(OI)}$.

3.1. 2 Écriture complexe d'une réflexion d'axe non parallèle à $(x'Ox)$

- **Rappels**

  - La droite (Δ) rencontre l'axe des abscisses (OI) en un seul point Ω d'affixe notée ω. Il existe une rotation $r = r(\Omega, 2\theta)$ telle que $r = S_{(\Delta)} o S_{(OI)}$; on peut donc écrire $S_{(\Delta)} = r o S_{(OI)}$.
  - La droite (Δ) est l'image de l'axe des abscisses par la rotation de centre Ω et d'angle θ.

- **L'écriture complexe de la réflexion $\boldsymbol{S_{(\Delta)}}$ est $\boldsymbol{z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \bar{\omega}) + \omega}$**

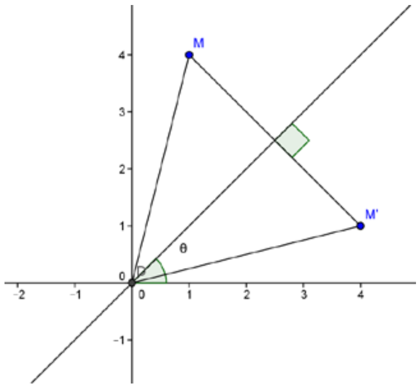
En effet, l'écriture complexe de la réflexion d'axe (OI) étant $z' = \bar{z}$ et l'écriture complexe de la rotation $r = r(\Omega, 2\theta)$ étant $\boldsymbol{z' = e^{i2\theta}(z - \omega) + \omega}$; par la règle de composition de $S_{(\Delta)} = r o S_{(OI)}$, traduite en programme de calculs algébriques de l'affixe z' du point M' image du point M d'affixe z par $S_{(\Delta)}$, l'écriture complexe de $\boldsymbol{S_{(\Delta)}}$ est $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \omega) + \omega$. ($\omega$ est un nombre complexe réel, solution réelle de l'équation $z = e^{i2\theta}(\bar{z} - \omega) + \omega$).

- **Exemples**

$z' = i\bar{z} - 2 + 2i = e^{i2\left(\frac{\pi}{4}\right)}(\bar{z} + 2) - 2$ est l'expression complexe de la réflexion $\boldsymbol{S_{(\Delta)}}$, (Δ) étant droite d'équation $y = x + 2$,l'image de l'axe des abscisses par la rotation de centre $\Omega(-2,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- L'expression analytique de $S_{(\Delta)}$ s'obtient à partir de sa définition complexe ou à partir de sa forme réduite $S_{(\Delta)} = r o S_{(OI)}$.
- Cas particulier : (Δ) passe par l'origine O

L'expression complexe de la réflexion $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ) est $z' = e^{i2\theta}\bar{z}$; où θ est l'angle de la rotation r_θ (de centre O) qui transforme la droite (OI) en (Δ).



L'expression analytique de $S_{(\Delta)}$ s'obtient à partir de sa définition complexe ou à partir de sa forme réduite $S_{(\Delta)}$=$r_{2\theta}$o$S_{(OI)}$.

3.1. 3 Écriture complexe d'une symétrie glissée

- **Rappels**
  - La composée $t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)}$ d'une translation de vecteur non nul $t_{\vec{u}}$ et d'une réflexion $S_{(\Delta)}$, est une symétrie glissée si le vecteur de la translation $\vec{v}$ est un vecteur directeur de l'axe (Δ) de la réflexion $S_{(\Delta)}$.
  - L'écriture d complexe d'une symétrie glissée $t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)}$, peut s'appuyer sur les écritures complexes respectives de la translation $t_{\vec{v}}$ et de la réflexion $S_{(\Delta)}$.
  - Si $S = t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)}$ est une symétrie glissée, alors $SoS = t_{\overrightarrow{2v}}$ et pour tout point M de l'axe (Δ) d'image M' ; M'appartient à (Δ) et $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
- **Exemple et remarques pertinentes**
  - Considérons la transformation affine S du plan d'écriture complexe :

    $z' = i\bar{z} + 3 + i$
  - **Justifions que S est une symétrie glissée**

- S est un antidéplacement du plan, vu son écriture complexe du type $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$.
- De plus S n'a pas de point invariant :

En effet l'équation complexe $z' = z$ (c'est-à-dire $z = i\bar{z} + 3 + i$) dont la solution est caractéristique de l'affixe d'un point invariant éventuel , n'a pas de solution complexe, car pour tout nombre complexe z de $\mathbb{C}$,

$$z = i\bar{z} + 3 + i \Leftrightarrow \begin{cases} z = i\bar{z} + 3 + i \\ \bar{z} = -iz + 3 - i \end{cases} \Leftrightarrow z = z + 4i + 4$$

S est une symétrie glissée, comme antidéplacement n'admettant pas de point invariant.

- **Déterminons le vecteur de translation $\vec{v}$ de la symétrie glissée S**

L'écriture complexe de SoS est :

$z' = i(\overline{i\bar{z} + 3 + i}) + 3 + i$=$4 + 4i = 2(2 + 2i)$: Le vecteur de translation $\vec{v}$ a pour affixe $2 + 2i$: $\vec{v}$ (2,2).

- **Déterminons l'axe (Δ) de la symétrie glissée S**

Un point M d'affixe z et d'image le point M' d'affixe z', appartient à l'axe (Δ) de la symétrie glissée S, si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Ce qui équivaut sous ces conditions à $\begin{cases} z' - z = 2 + 2i \\ z' = i\bar{z} + 3 + i \end{cases}$

(c'est-à-dire $z = i\bar{z} + 1 - i$)

$\begin{cases} z = i\bar{z} + 1 - i \\ z = x + iy \end{cases}$ ⇔(x-y-1)(1-i)=0 ; 1-i étant non nul, x-y-1=0 : l'axe (Δ) de la symétrie glissée S est la droite d'équation x-y-1=0.

L'expression analytique de la symétrie glissée S, peut s'obtenir à partir de son écriture complexe ou à partir de sa forme réduite $S = t_{\vec{v}} o S_{(\Delta)}$.

3.2 Activité préparatoire 1

- **Énoncé de l'activité 1**

Soit s une similitude indirecte.
1) Montrer que s s'écrit comme composée d'une similitude directe S et d'une réflexion $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).
2) On suppose que (Δ) est la droite (OI) (l'axe des abscisses). Déduire de 1) l'écriture complexe générale de la similitude indirecte s.

- **Analyse a priori de l'activité 1**

- **But et objectif de l'activité 1**

Le but de cette activité est de mettre en évidence par l'outil de la traduction complexe, la relation entre l'écriture complexe d'une similitude indirecte et celle d'une similitude directe.

L'objectif de l'activité 1 est de mettre en évidence l'expression complexe d'une similitude indirecte à l'appui de sa décomposition comme composée d'une similitude directe et d'une réflexion.

- **Schéma adapté** : Cadre géométrique⟶cadre algébrique
- **Justification de l'activité**

L'activité vise la construction du sens et de la signification algébriques, de « la définition d'une similitude indirecte s comme composée d'une similitude directe et d'une réflexion d'axe « l'axe des abscisses ». Cette activité permet en outre aux élèves de mobiliser leurs connaissances sur :

- la composition des similitudes de même sens ou de sens contraires,
- les écritures complexes respectives d'une similitude directe et de la réflexion d'axe « l'axe des abscisses » en vue de produire l'écriture complexe générale d'une similitude indirecte selon le programme de calcul de z' affixe de l'image M' d'un point M d'affixe z par cette similitude indirecte : $z \longmapsto z_1 = \bar{z} \longmapsto z' = a\, z_1 + b$ ($z' = a\bar{z} + b$).

- **Stratégies de réussite du sujet rationnel**

- La question 1) amène l'élève à convoquer la composée d'une similitude directe et d'une réflexion particulière et de la regarder sous l'angle de vue d'une similitude indirecte, en référence aux éléments du cours sur la définition géométrique des similitudes planes.
- La deuxième question permet à l'élève de transporter les caractérisations de la première question dans le cadre algébrique, en mettent à contribution les écritures complexes respectives d'une similitude directe, de la réflexion d'axe $(x'Ox)$ et celle de leur composée.

- **Source d'erreurs significatives de l'élève**

Les sources d'erreurs significatives de l'élève peuvent résider dans ses représentations et ses conceptions obstacles en lien avec :

- La nature de la composée de deux similitudes planes (directes, indirectes ou de sens contraires).
- La prise en compte du caractère involutif de toute réflexion
- La traduction algébrique de la similitude directe, de la réflexion et de leur composée.

- **Activité 1 : Solution**

1) Montrons que s se décompose comme composée d'une similitude directe S et d'une réflexion $S_{(\Delta)}$ d'axe (Δ).

s et $\boldsymbol{S}_{(\Delta)}$ sont deux similitudes indirectes donc $so\boldsymbol{S}_{(\Delta)}$ est une similitude directe (que nous désignons par S) :

$(so\boldsymbol{S}_{(\Delta)} = S$ et $\boldsymbol{S}_{(\Delta)}o\boldsymbol{S}_{(\Delta)} = id_P) \Leftrightarrow s = So\boldsymbol{S}_{(\Delta)}$. D'où toute similitude indirecte peut se décomposer comme composée d'une similitude directe et d'une réflexion.

2) Déduisons-en l'écriture complexe générale de la similitude indirecte s.
On se place dans cette partie dans le cas où $(\Delta)=(OI)$ (l'axe des abscisses).
De ce qui précède, les écritures complexes de s et de $\boldsymbol{S}_{(OI)}$ sont respectivement $z' = az + b$ et $z' = \bar{z}$.
Un programme de calcul de z' comme affixe de l'image M' du point M (d'affixe z) par la similitude indirecte $s = So\boldsymbol{S}_{(\boldsymbol{OI})}$ **,** peut s'écrire :

$z \longmapsto z_1 = \bar{z} \longmapsto z' = az_1 + b = a\bar{z} + b.$

L'écriture complexe générale d'une similitude indirecte est $\boldsymbol{z' = a\bar{z} + b}$.

3.3 Traduction complexe d'une similitude indirecte

3.3. 1 Écritures complexes des similitudes indirectes particulières

En nous référant à l'étude que nous avons faite au chapitre 1 et qui nous a permis d'identifier les similitudes directes du plan et leurs écritures complexes respectives du type $\boldsymbol{z' = az + b}$, avec des particularités sur le coefficients a et b, nous proposons ici une classification analogue des similitude indirectes :

Similitude directe	Écriture complexe de la similitude directe	Forme réduite et écriture complexe de la similitude indirecte associée	
$t = t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$	$t_{\vec{u}}oS_{(\boldsymbol{OI})}$	$z' = \bar{z} + b$
h, homothétie de rapport k	$z' = kz + b$	$hoS_{(\boldsymbol{OI})}$	$z' = k\bar{z} + b$
r, rotation d'angle θ	$z' = e^{i\theta}z + b$	$roS_{(\boldsymbol{OI})}$	$z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$
S, similitude directe de rapport k et d'angle θ	$z' = ke^{i\theta}z + b$	$SoS_{(\boldsymbol{OI})}$	$z' = ke^{i\theta}\bar{z} + b$

Interprétation géométrique de l'image d'un point par une similitude indirecte

- Le programme de calcul de $z' = a\bar{z} + b$ suivant :

$z \longmapsto \bar{z} \longmapsto z' = a(\bar{z}) + b$, nous autorise à appréhender toute similitude indirecte s comme la composée $SoS_{(OI)}$ de sa similitude directe associée S et de la réflexion d'axe (OI).

- L'image d'un point par une similitude indirecte s est l'image par la similitude directe associée, du symétrique de ce point par rapport à « l'axe des abscisses ».

3.3. 2 Traduction complexe des éléments caractéristiques d'une similitude indirecte

Le but de cette partie est de contribuer à la traduction complexe de la définition géométrique d'une similitude indirecte déterminée géométriquement par la donnée de son centre, de son axe et de son rapport et fournit par la composée d'une similitude directe comportant un centre, un rapport et un angle ave la réflexion d'axe $(x'Ox)$.

Nous partons de l'écriture complexe d'une similitude indirecte obtenue dans l'activité 1, avant de mettre en évidence les conditions d'existence et l'existence de ces caractéristiques sous ces conditions.

L'activité 1 nous a permis d'identifier l'écriture complexe d'une similitude indirecte, comme écriture complexe de la composée d'une similitude directe et de la réflexion d'axe (OI).

Nous allons tout d'abord à partir de cette approche identifier les similitudes indirectes dont les écritures complexes $z' = a\bar{z} + b$ se réclament du cas $|a| = 1$, avant de nous attarder sur les cas $|a| \neq 1$.

- **Similitudes indirectes sans centre**

Une similitude indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, admet un point invariant si et seulement s'il existe un nombre complexe ω tel que : $\omega = a\bar{\omega} + b$. Le centre d'une similitude indirecte s d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$ est quand il existe, le point Ω d'affixe ω telle que $\omega = a\bar{\omega} + b$.

En d'autres termes, ω est l'affixe du centre Ω d'une similitude indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ si et seulement si :
z'- $\omega = a(\bar{z} - \bar{\omega})$.

En effet $\omega = a\bar{\omega} + b \Leftrightarrow \begin{cases} \omega = a\bar{\omega} + b \\ \bar{\omega} = \bar{a}\omega + \bar{b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \omega = a\bar{a}\omega + a\bar{b} + b$$

$$\Leftrightarrow (1 - a\bar{a})\omega = a\bar{b} + b.$$

Le centre Ω de la similitude indirecte s d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, existe si et seulement si le nombre complexe ω existe . Examinons cette condition de près :

- Cas 1 : $1 - a\bar{a} = 0$ et que $a\bar{b}$+b=0 (par exemple les cas $z' = \bar{z}$ ou $z' = e^{i\theta}\bar{z}$) est le centre de la similitude s est le point O .
- Cas 2 : $1 - a\bar{a} = 0$ et $a\bar{b}$+b≠0,

La similitude indirecte s d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$, n'a pas de centre. C'est le cas, les similitudes indirectes d'écritures complexe $z' = \bar{z} + b$ ou $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$ (b non nul) ne sont pas des similitudes indirectes à centre.

- Cas 3 : $1 - a\bar{a} \neq 0$

  Le centre de la similitude indirecte s d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$ est le point Ω d'affixe ω telle que: $\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$.

- **Traduction complexe des éléments caractéristiques d'une similitude indirecte à centre**

Nous tenons tout d'abord à rappeler que si $1 - a\bar{a} = 0$ (c'est-à-dire si le module de a est égal à 1), la similitude indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ n'est pas une similitude indirecte à centre ; c'est le cas des réflexions et des symétries glissées du plan. Dans ce cas l'axe de la similitude indirecte s est tout simplement l'axe de la réflexion où de la symétrie glissée.

Nous nous plaçons dans cette partie dans le cas $1 - a\bar{a} \neq 0$; ce qui implique que l'écriture complexe de la similitude est z'= $ke^{i\theta}(\bar{z} - \bar{\omega}) + \omega$.

- **Le centre de la similitude indirecte d'écriture complexe** $z' = a\bar{z} + b$

Nous avons montré dans la partie précédente que si $|a| \neq 1$, le centre de la similitude indirecte d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ est le point Ω d'affixe ω telle que : $\boldsymbol{\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}}$.

- **Le rapport de la similitude indirecte d'écriture complexe** $z' = a\bar{z} + b$

Soit M le point d'affixe z et d'image le point M' d'affixe z', par la similitude indirecte de centre le point Ω d'affixe ω et d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$.

Pout trouver le rapport k de la similitude indirecte, exprimons la distance ΩM′ en fonction de la distance ΩM sous la forme $\Omega M' = k\,\Omega M$.

$$\Omega M' = |z' - \omega| = |a\bar{z} + b - (a\bar{\omega} + b)| = |a||\bar{z} - \bar{\omega}| = |a||z - \omega| = |a|\Omega M$$

Le rapport de la similitude indirecte d’écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ est $k = |a|$.

- **L’axe de la similitude indirecte d’écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$**

D’après le cours sur les similitudes indirectes, L’axe (Δ) de la similitude indirecte est la droite globalement invariante par cette similitude s.

Pour tout point M de (Δ) d’affixe z et pour tout point M' d’affixe z' ,

$$\boldsymbol{s(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z - \omega)} .$$

- L’axe (Δ) de la similitude indirecte est par définition l’axe de la réflexion dont la composée avec l’homothétie de centre Ω et de rapport k est la similitude indirecte.
- Une équation de droite fournie par cette caractérisation est une équation cartésienne de l’axe (Δ) de la similitude indirecte s .

3.4 Activité préparatoire 2

- **Énoncé**

Donner l’écriture complexe et l’expression analytique de la similitude indirecte s de centre $\Omega(1,2)$ de rapport $k = 2$ et d’axe la droite (Δ) d’équation $x - y + 1 = 0$.

- **Analyse a priori**

Cette activité vise la une mise en relation de la donnée des éléments caractéristiques d’une similitude indirecte avec son écriture complexe et son expression analytique.

- **Objectif de l’activité 2**

L’objectif pédagogique spécifique de l’activité préparatoire 2 est de permettre à l’élève d’être capable de convoquer, de mettre en relation, d’articuler et de donner signification à ses connaissances sur les éléments caractéristiques d’une similitude indirecte, en l’interprétant dans les cadres algébrique et analytique.

- **Schéma adapté** : Cadre géométrique⟶cadre algébrique⟶cadre analytique

- **Justification de l’activité**

L’activité 2 vise la construction du sens et de la signification algébriques et analytiques, de « la détermination d’une similitude indirecte par la donnée de ses éléments caractéristiques ».

Cette activité permet en outre aux élèves de mobiliser leurs connaissances sur :

- L’interprétation algébrique et analytique des éléments caractéristiques d’une similitude indirecte,
- La mise en évidence de cette interprétation dans l’écriture des définitions algébrique et analytique d’une similitude in directe.

- **Stratégies de réussite du sujet rationnel**

Les stratégies de réussite en termes d’attentes de l’enseignant résident dans :

- L’écriture complexe d’une homothétie et l’écriture complexe d’une réflexion dont on connaît les éléments caractéristiques.
- L’usage du programme de calcul pour traduire algébriquement et du point de vue de la composée de transformation, la forme réduite d’une similitude indirecte dont on connaît les définitions complexes ou analytiques de ses transformations composantes.
- La traduction analytique de l’écriture complexe d’une similitude indirecte.

- **Sources d’erreurs significatives de l’élève**

Les sources des erreurs pertinentes de l’élève peuvent résider dans leurs conceptions et leurs représentations erronées sur :

- L’écriture complexe d’une homothétie ou l’écriture complexe d’une réflexion dont on connaît les éléments caractéristiques.
- L’usage d’un programme de calcul algébrique (ou analytique) pour traduire algébriquement (ou analytiquement), la composée d’une homothétie et d’une réflexion dont l’axe contient le centre de l’homothétie.
- La traduction analytique de l’écriture complexe d’une similitude indirecte.

3.4.3 Activité 2 : solution

1) Écriture complexe de la similitude indirecte s

Soit s, est la similitude indirecte de centre $\Omega(1,2)$ de rapport $k = 2$ et d'axe la droite (Δ) d'équation $x - y + 1 = 0$. De ce qui précède, la formé réduite de la similitude indirecte s est : $s = hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh$

- Donnons tout d'abord l'écriture complexe de l'homothétie h.

h est l'homothétie de centre le point $\Omega(1,2)$ d'affixe $\omega = -1$ et de rapport $k = 2$.

Remarquons tout d'abord que le centre Ω de la similitude indirecte s appartient à l'axe de cette similitude.

L'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' - 1 - 2i = 2(z - 1 - 2i)$, c'est-à-dire $z' = 2z - 1 - 2i$.

- Donnons ensuite l'écriture complexe de la réflexion $S_{(\Delta)}$

(Δ) est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$

- Point d'intersection K de l'axe (Δ) avec l'axe des abscisses

Le point K de la droite (Δ) dont l'ordonnée est nulle est défini par : $K(-1,0)$.

- L'angle de la rotation de centre K qui transforme l'axe des abscisses en (Δ)

Le vecteur $\vec{v}(1,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) . Le vecteur a pour affixe le nombre complexe $z_{\vec{v}} = 1 + i = \sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$. D'où

L'axe (Δ) de la similitude indirecte s est l'image de l'axe des abscisses par la rotation de centre $K(-1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit $r = r(K,\frac{\pi}{2}) = S_{(\Delta)}oS_{(OI)}$ d'où $S_{(\Delta)} = roS_{(OI)}$.

Conclusion

- L'écriture complexe de la rotation r est : $z'+1=e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 1)$, c'est-à-dire $z' = iz - 1 + i$ et l'écriture complexe de $S_{(OI)}$ étant $z'=\bar{z}$, l'écriture complexe de la réflexion $S_{(\Delta)}$ est : $z' = i\bar{z} - 1 + i$.

- Écriture complexe de la réflexion $S_{(\Delta)}$

Nous venons de construire les écritures complexes respectives de h et $S_{(\Delta)}$ suivantes : h: $z' = 2z - 1 - 2i$ et $S_{(\Delta)}$: $z' = i\bar{z} - 1 + i$.

Par ailleurs $s = hoS_{(\Delta)}$; l'écriture complexe de $s = hoS_{(\Delta)}$ est :

$z' = 2(i\bar{z} - 1 + i) - 1 - 2i$; ce qui donne : $z'= 2i\bar{z} - 3$.

2) Définition analytique de la similitude indirecte s

A partir de l'étude que nous venons de faire, on peut conclure que l'expression complexe de la similitude indirecte s de centre $\Omega(1,2)$ de rapport $k = 2$ et d'axe la droite (Δ) d'équation $x - y + 1 = 0$ est : $z' = 2i\bar{z} - 3$.

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ et exprimons x' et y' en fonction de x et y sous la condition $z' = 2i\bar{z} - 3$.

$$\begin{cases} z' = 2i\bar{z} - 3 \\ z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases} \Leftrightarrow x' + iy' = (-3+2y) + i(2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -3 + 2y \\ y' = 2x \end{cases}.$$

3.5 Écriture complexe et expression analytique d'une similitude indirecte

Soit $S_{(\Delta)}$ la réflexion d'axe (Δ) passant par le point Ω d'affixe $\omega = x_0 + iy_0$, centre de l'homothétie de rapport positif k . On désigne par S la similitude indirecte $hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh$.

On considère M et M', les points d'affixes respectives $z' = x + iy$ et $z' = x' + y'$.

Dans les traductions complexe et analytique de la relation $S(M) = M'$, il ya équivalence entre les énoncés suivantes :

(i) $z' - \omega = ke^{i\theta}(\bar{z} - \bar{\omega})$

(ii) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kcos\theta & -ksin\theta \\ ksin\theta & kcos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ -y + y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

L'écriture algébrique de l'égalité (i) et la propriété de l'égalité de deux nombres complexes écrits sous leurs formes algébriques peuvent permettre de démontrer l'équivalence entre les énoncés (i) et (ii).

Remarque

Sous les conditions du théorème, l'écriture complexe de l'homothétie h est : $z' - \omega = k(z - \omega)$, l'écriture complexe de la rotation $r = S_{(\Delta)}oS_{(\boldsymbol{OI})}$ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ et l'écriture complexe de la réflexion $S_{(\boldsymbol{OI})}$ est $z' = \bar{z}$.

Par le programme de calcul de l'affixe z' du point M', image du point M d'affixe z par la similitude indirecte $s = hoS_{(\Delta)} = horoS_{(\boldsymbol{OI})}$, on :

$z' - \omega = ke^{i\theta}(\bar{z} - \bar{\omega})$: cette écriture complexe de la similitude indirecte s est équivalente aux conditions affine et matricielle de (ii).

3.6 Exercice d'application

- **Énoncé**

On considère la transformation s du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telles que : $z' = 2i\bar{z} + 2 + i$.

1) Montrer que s est une similitude indirecte.
2) Déterminer les éléments caractéristiques.
3) Donner la forme réduite de la similitude indirecte s.
4) Proposer deux programmes de construction de l'mage M' d'un point M par la similitude indirecte s.

- **Résolution de l'exercice d'application**

1. Montrons que s est une similitude indirecte.

Le programme de calcul : $z \longmapsto z_1 = \bar{z} \longmapsto z' = 2iz_1 + 2 + i = 2i\bar{z} + 2 + i$ de l'expression $z' = 2i\bar{z} + 2 + i$, nous permet d'appréhender la transformation s comme la composée de sa similitude directe associée S d'expression complexe $z' = 2iz + 2 + i$ et de la réflexion d'axe (OI), d'expression complexe $z' = \bar{z}$. La transformation s est une similitude indirecte.

2. Déterminons les éléments caractéristiques.

- **Le centre de la similitude indirecte s**

Le nombre complexe $\omega = \frac{a\bar{b}+\text{b}}{1-a\bar{a}} = \frac{2i(2-i)+2+i}{1-4} = -\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ est solution de l'équation $z = 2i\bar{z} + 2 + i$: le point $\Omega(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ est le centre de la similitude indirecte s.

- **Le rapport et l'axe de la similitude indirecte s**

- Le rapport de la similitude indirecte s est k=$|2i|$=2.
- **Déterminons l'axe de la similitude indirecte s**

M$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in (\triangle) \Leftrightarrow \boldsymbol{z'} - \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\omega}) \Leftrightarrow 2i\bar{z} + 2 + i + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i = 2(z + \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i)$

Cette condition conduit à $(\triangle)$: $\boldsymbol{3x - 3y - 1 = 0}$

- On peut vérifier que le point $\Omega(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$ appartient à l'axe $(\triangle)$ de la similitude indirecte s.

3. **Donner la forme réduite de la similitude indirecte s.**

- En conclusion**,** s est la similitude indirecte de centre le point $\Omega(-\frac{4}{3},-\frac{5}{3})$, de rapport k=2 et d'axe la droite $(\triangle)$ d'équation $3x-3y-1=0$.
- En posant $h=H(\Omega,2)$, on peut écrire que : s=ho$S_{(\triangle)}=S_{(\triangle)}oh$.

4. **Programme de construction de l'image d'un point par la similitude indirecte s**

La construction de l'image d'un point M par la similitude indirecte s peut se faire de deux manières différentes :

- La construction de l'image M_1 du point M par la réflexion $S_{(\triangle)}$, puis et enfin la construction de l'image M' du point M_1par l'homothétie h.
- La construction de l'image M_2 du point M par l'homothétie h, puis et enfin la construction de l'image M' du point M_2 par la réflexion $S_{(\triangle)}$.

CHAPITRE 4 : QUELQUES APPLICATIONS DES SIMILITUDES

4.1 Agrandissement et réduction de l'image "en grandeur réelle" d'un objet visible ou invisible

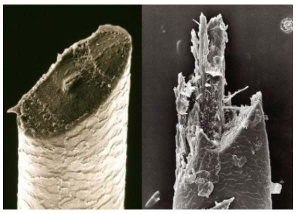
- **Agrandissement : image visible d'un objet du "monde insaisissable de l'infiniment petit"**

Dans le souci de permettre l'accès par la vue à "l'image en grandeur réelle" d'un objet du monde "insaisissable de l'infiniment petit", la production d'une représentation de cet objet par l'agrandissement de cette image à l'aide de dispositifs appropriés (microscopes, etc.) contribue à donner du sens au concept de "similitude" entre l'image "en grandeur réelle" de l'objet (inaccessible par la vue) et la représentation visible produite par l'instrument d'observation.

Photo agrandie de la poussière domestique

Œufs de papillon

La tête d'un embryon de poisson-zèbre, grossi 500 fois



A gauche : un poil de barbe coupé au rasoir manuel ; à droite : un poil de barbe coupé au rasoir électrique

Source : **dailygeekshow.com/.../le-monde-insaisissable-de-linfiniment-petit-comm.**

☐ **Réduction : représentation d'objet invisible et "très éloigné" et d'objet visible et "très grand".**

La production sur papier, écran ou sur tout autre support exploitable des représentations des planètes, continents, pays, des villes, localités, etc., permet à l'homme d'accéder aux objets invisibles ou insaisissables à cause de leur éloignement ou de la complexité de leur étendu. Dans les usages qui en sont faits, ces productions doivent leur pertinence et leur importance, à la similarité en termes de forme, de dimensions et d'apparence entre l'objet observé ou exploré et sa représentation fournie par l'instrument utilisé.

Système solaire
http://www.le-systeme-solaire.net/systemesolaire.html

Notre bonne vieille Terre vue du satellite [Suomi NPP](#) (voir [l'article de Geek Café](#))

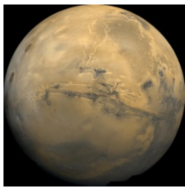
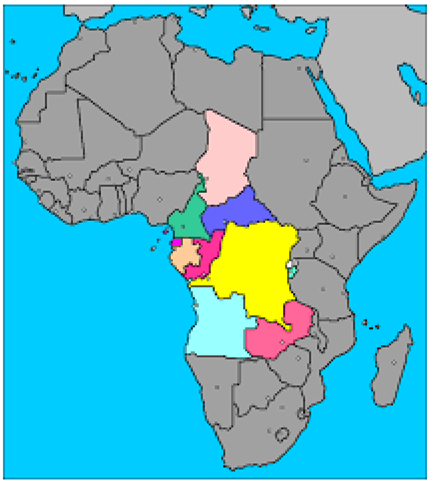


Photo de mars en 1980 prise par [le vaisseau Viking 1](#)



Carte de l'Afrique

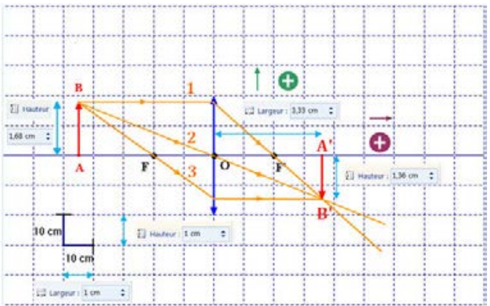
Carte de l'Afrique centrale

Carte du Congo Brazzaville

Source : http://www.luventicus.org/cartes/afrique/afriquecentrale.html

4.2 Objet et image en optique géométrique.

- "Similarité" entre l'image par une lentille convergente et l'objet



Échelle : 1,0 cm ↔ 10 cm

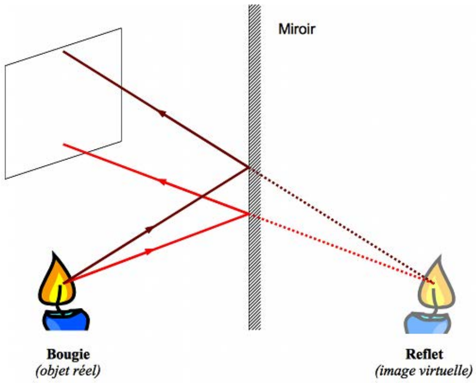
	Sur de dessin	En réalité
Taille de l'objet	1,7 cm	17 cm
Taille de l'image	1,4 cm	14 cm
Distance OA'	3,3 cm	33 cm

- **Caractéristiques de l'image : L'image est renversée et est plus petite que l'objet.**

Nature et rapport de la similitude plane mise en évidence?

Source : http://scphysiques2010.voila.net/1sph01c.htm

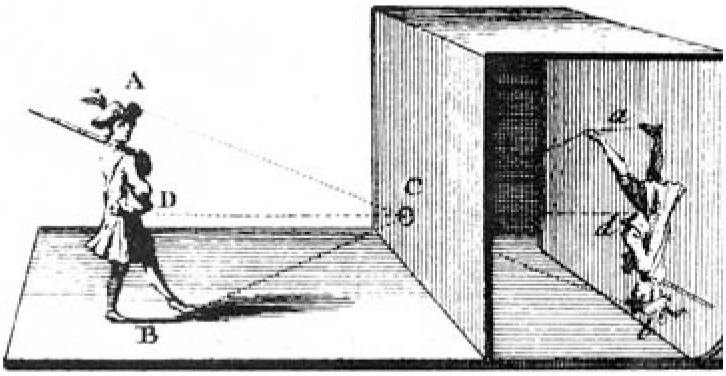
- **"Similarité" entre l'image par un miroir plan et l'objet**

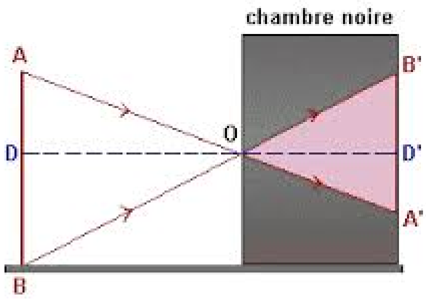


Une bougie et son image par un miroir plan

Nature et rapport de la similitude plane mise en évidence?

- **Le sténopé (ou chambre noire) : "similarité" entre l'image et l'objet**





"les débuts de la photo" :sténopé, chambre noire et claire

http://www.nicolasleclerc.com/2012/04/11/histoire-de-la-photo-1-chambre-noire-et-claire-stenope/

CHAPITRE 5 : EXERCICES

5.1 Devoir sur table

- **Énoncé du devoir sur table**

Donner l'écriture complexe de la similitude indirecte s de centre $\Omega(1,2)$, de rapport $k = 2$ et d'axe (Δ) la droite d'équation $y = 2$.

- **Analyse a priori du devoir sur table**
  - **L'objectif de l'exercice**

L'objectif de cet exercice est de permettre aux élèves de mobiliser leurs connaissances pour l'écriture complexe d'une similitude indirecte dont l'axe ne rencontre pas l'axe des abscisses comme nous l'avons considéré dans le théorème 2.4.2, pour provoquer un changement de regard sur la définition d'une similitude indirecte à trois caractéristiques (centre, rapport et axe).

- **Les objectifs pédagogiques spécifiques**

Les objectifs spécifiques de l'exercice résident dans notre souci de permettre à l'élève d'être capable de convoquer et de mettre en œuvre de manière adéquate :

- La relation entre les éléments caractéristiques d'une homothétie et d'une réflexion et leurs écritures complexes respectives.
- La relation entre l'équation cartésienne d'une droite et l'écriture complexe de la réflexion par rapport à cette droite
- Un programme de calcul algébrique permettant d'obtenir l'écriture complexe de s à partir des écritures complexes de l'homothétie et de la réflexion composante.

- **Sources d'erreurs significatives de l'élève**

Les sources d'erreurs significatives de l'élève peuvent résider dans ses représentations et ses conceptions obstacles en lien avec :

- La relation entre les éléments caractéristiques d'une homothétie ou d'une réflexion et leurs écritures complexes respectives.
- La relation entre l'équation cartésienne d'une droite et l'écriture complexe de la réflexion par rapport à cette droite

- Un programme de calcul algébrique permettant d'obtenir l'écriture complexe de s à partir des écritures complexes de l'homothétie et de la réflexion composante.

- **Corrigé du devoir sur table**

$s = hoS_{(\Delta)}$; h est l'homothétie de centre $\Omega(1,2)$ et de rapport 2 et $S_{(\Delta)}$, la réflexion d'axe (Δ) .

La droite (Δ) est l'image de l'axe des abscisses (OI) par la translation de vecteur $\vec{v}(0,2)$. On peut donc poser $t_{2\vec{u}} = S_{(\Delta)}oS_{(\boldsymbol{OI})}$; $S_{(\Delta)} = t_{2\vec{u}}oS_{(\boldsymbol{OI})}$.

L'écriture complexe de $S_{(\Delta)}$ est donc $z' = \bar{z} + 4i$ et l'écriture complexe de h est $z' - 1 - 2i = 2(z - 1 - 2i)$; c'est-à-dire $z' = 2z - 1 - 2i$.

L'écriture complexe de la similitude indirecte s est : $z' = 2(\bar{z} + 4i) - 1 - 2i$ c'est-à-dire $\boldsymbol{z' = 2\bar{z} - 1 + 6i}$.

5.2 Devoir « maison »

5.2.1 Devoir « maison » n°1

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O. Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre O qui transforme le point A en milieu du coté [BC].

5.2.2 Devoir « maison » n°2

OAB est un triangle rectangle isocèle en O et de sens direct. s est la similitude indirecte de centre O et qui transforme le point A en milieu du segment $[OB]$. Déterminer le rapport, l'axe de la similitude indirecte s, donner son écriture complexe et son expression analytique relativement à un repère convenablement choisi.

5.3 Exercices d'approfondissement

5.3.1 Similitudes directes

Exercice 1

A et B sont les deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Dans chacun des cas suivants, interpréter en termes de similitude directe de rapport k et d'angle θ, la relation z_B=$ke^{i\theta}z_A$.

1. $AB = 2$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
2. $z_A = -2e^{i\frac{\pi}{4}} z_B$
3. **2.** $z_B = (-2i)z_A$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, interpréter le point d'affixe z_A comme image d'un point B qu'on précisera par une similitude directe de votre choix dont on précisera les éléments caractéristiques et l'écriture complexe.

1. $z_A = 1 + i\sqrt{3}$
2. $AB = 2$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
3. $z_A = -2e^{i\frac{\pi}{3}} z_B$
4. $z_O = (-2i)z_A$
5. $z_A = \frac{1-\mathrm{i}}{1+i\sqrt{3}} z_B$
6. $z_B = (1 + i)z_A$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, proposer un programme de construction du point A d'affixe z_A, en tant qu'image du point I d'affixe 1 par une composée de deux similitudes directes dont on précisera les éléments caractéristiques :

1. $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ($\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$)
2. $z_A = -2(1 + i)e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $z_A = \frac{1-\mathrm{i}}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 4

A, B et C sont les points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . Dans chacun des cas suivants, déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe de centre A qui transforme B en C :

1. $z_B - z_A = (1 + i)(z_C - z_A)$.

2. $z_B - z_A = (1 - i)(z_A - z_C)$
3. $z_A - z_B = -2(1 + i)(z_C - z_A)$
4. $\frac{z_B - z_A}{z_A - z_C} = \frac{1+\mathrm{i}}{1+i\sqrt{3}}$

Exercice 5

Une similitude directe, de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 transforme un point B en un point C. Parmi les relations suivantes identifier et justifier celle (s) qui lie (nt) les affixes respectives z_A, z_B et z_C des points A, B et C.

1. $z_C - z_A = \left(1 - i\sqrt{3}\right)(z_B - z_A)$.
2. $z_B - z_A = \left(1 + i\sqrt{3}\right)(z_C - z_A)$
3. $z_C - z_A = \left(-1 - i\sqrt{3}\right)(z_A - z_B)$

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, donner l'écriture complexe et les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui à tout point $M\ (x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tels que :

1. $\begin{cases} x' = \sqrt{3}x - y + 1 \\ y' = x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} + 1 \end{cases}$

1. $x' = x + y\ et\ y' = -x + y$

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, donner l'écriture complexe de la similitude directe s :

1. $s = S_1 o S_2$ est la composée de S_1 la similitude directe, de centre $\Omega_1(0,1)$ d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 et de S_2 est la similitude directe, de centre $\Omega_2(1,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

2. S_1 est la similitude directe, de centre $\Omega_1(i)$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 ;

soS_1 est la similitude directe, de centre $\Omega(i)$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

5.3.2 Similitudes indirectes

Exercice 1

Soit s est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telles que $z' = \bar{z} + 1 - i$. A partir l'écriture complexe de la composée sos, donner la nature et les élément caractéristiques de s.

Exercice 2

1) Donner l'écriture complexe de la réflexion d'axe « la première bissectrice »
2) Donner l'écriture complexe de la réflexion d'axe (Δ) est la droite d'équation $x - y + 1 = 0$

Exercice 3

Soit s est la similitude indirecte d'axe (Δ) et d'écriture complexe de la forme z'$= ke^{i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + b$. Donner un vecteur directeur unitaire de l'axe (Δ).

Exercice 4

Donner un angle θ d'une rotation qui transforme l'axe (OI) en (Δ)**,** axe de la réflexion d'écriture complexe $z' = i\bar{z}$.

Exercice 5

Donner le centre et une équation cartésienne de l'axe de la similitude indirecte s qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2\bar{z} + 1 - 3i$.

Exercice 6

Déterminer l'écriture complexe, le centre, l'axe et le rapport de la similitude indirecte S qui transforme le point $A(i)$ en $B(1-5i)$ et le point $C(-1)$ en $D(-1-3i)$.

Exercice 7

Donner l'écriture complexe de la similitude indirecte s de centre $\Omega(1,2)$, de rapport $k=2$ et d'axe (Δ) la droite d'équation $y=2$.

Exercice 8

Donner l'expression analytique de la similitude indirecte s qui transforme les points $A(i)$ et $B(1)$ respectivement en B et $C(1+2i)$.

Exercice 9

Donner l'écriture complexe, la nature et les élément caractéristiques de la transformation du plan s qui à tout point $M\ (x,y)$, associe le point $M'(x',y')$ tels que : $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x-1 \end{cases}$

Exercice 10

Donner l'écriture complexe, la nature et les élément caractéristiques de la transformation du plan s qui à tout point $M\ (x,y)$, associe le point $M'(x',y')$ tels que :

$$\begin{cases} x' = 2x\cos\frac{\pi}{12} + 2y\sin\frac{\pi}{12} + 1 \\ y' = 2x\sin\frac{\pi}{12} - 2y\cos\frac{\pi}{12} - 1 \end{cases}$$

5.4 Exercices résolus sur les similitudes planes

Introduction

Pour toute la suite, on considère le repère orthonormé direct (O,$\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$) ; en d'autres termes O,I et J sont trois points distincts du plan affine euclidien orienté, qui constituent dans cet ordre les sommets d'un triangle rectangle isocèle direct d'hypoténuse $\sqrt{2}$ selon l'unité de mesure de longueur (cm, etc.), laissée au choix du sujet dans la réalisation perceptive de figures géométriques.

Le but de cette partie de faire émerger la dialectique du statut d'outil et d'objet de « la traduction complexe d'une similitude plane » (traduction ou interprétation) entre les cadres géométrique et algébrique en résonnance avec notre regard porté sur la ressource $RB32$, sous l'angle de vue des cadres et registres de représentations des différents objets mathématiques convoqués dans une situation investie qui donne du sens au concept « similitude plane ».

Les univers dans lesquels se déploie l'activité de l'élève peuvent être des milieux au sens large de branches ou de cadres mathématiques. Régine DOUADY(1986) a montré que les cadres mathématiques occasionnent et favorisent des opportunités de constructions de représentations des objets mathématiques théoriques : du cadre géométrique au cadre algébrique, analytique, perceptif, arithmétique, graphique, etc. Les jeux de cadres sont ainsi des générateurs de représentations des objets mathématiques théoriques, aussi précieux pour la compréhension et l'apprentissage que pour la recherche de l'élève en situation d'étude.

En prenant appuie sur les similitudes planes, l'objectif de cette partie est de contribuer à offrir à l'enseignant des opportunités d'élaboration des outils d'enseignement sous l'angle de vue des cadres et registres de représentations, afin de lui permettre de faire face plus efficacement aux manifestations des conceptions obstacles des élèves dans la perception, la convocation et l'usage des objets mathématiques convoqués dans de situations dont l'investissement impose de changements de cadres et de registres.

Dans cette perspective, nous nous appuierons particulièrement sur la traduction complexe et l'interprétation géométrique en retour de cette traduction des objets théoriques ayant une fonction d'outils ou d'objets dans les actions de l'investissement des situations qui donnent sens au concept « similitude plane », en partant des fondements des traductions et interprétations dans les cadres algébriques et géométrique des pré-requis en lien avec les nombres complexes et les isométries et homothéties planes (voir tableau) :

<table>
<tr><td rowspan="2">Objet géométrique théorique ayant le statut outil/objet dans l'action adéquate à mener</td><td colspan="2">Traduction et interprétation réciproques</td></tr>
<tr><td>Cadre géométrique</td><td>Cadre algébrique</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relation $S(M) = M'$ exprimée explicitement ou implicitement par les éléments caractéristiques de la similitude plane S</td><td rowspan="2">Définition géométrique de S dans le registre des points sans cordonnées (rôles explicites des éléments caractéristiques de S)</td><td>Définition algébrique de S dans le registre des nombres complexes sans parties réelle et imaginaire (rôle explicite des traduction algébrique des éléments caractéristiques de S)</td></tr>
<tr><td>Écriture complexe de S (rôle implicite des traduction algébrique des éléments caractéristiques de S)</td></tr>
<tr><td>Définition analytique de S dans le registre des points avec coordonnées (rôles implicites des éléments caractéristiques de S)</td><td>Forme algébrique de la traduction complexe de la relation $S(M) = M'$ dans le registre des nombres complexes avec parties réelle et imaginaire (rôle implicite des traduction algébrique des éléments caractéristiques de S)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Relation $S(M) = M'$ sous la condition $S = hoi = ioh$ (i désigne la rotation d'angle θ ou la réflexion d'axe (Δ) qui laisse invariant le centre Ω de l'homothétie h de rapport k)</td><td>Deux programmes de construction géométrique du point M'à partir du point M, dans le registre des points sans coordonnées :</td><td>Deux programmes de calculs algébriques de l'affixe z' du point M'à partir de l'affixe z du point M, dans le registre des nombres complexes sans leurs parties réelle et imaginaire :</td></tr>
<tr><td>$M \longmapsto M_1 = i(M) \longmapsto M' = h(M_1)$</td><td>$z \longmapsto z_1 \longmapsto z'$</td></tr>
<tr><td>$M \longmapsto M_2 = h(M) \longmapsto M' = i(M_2)$</td><td>$z \longmapsto z_2 \longmapsto z'$</td></tr>
<tr><td>Figure : une représentation perceptive de la relation $S(M) = M'$ sous la condition $S = hoi = ioh$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Points invariant par la similitude plane S (invariance point par point)</td><td>Le centre éventuel Ω de la similitude plane S</td><td>L'affixe ω du centre Ω, invariante par le programme de calcul</td></tr>
<tr><td>Axe (Δ) de la similitude indirecte S (lieu géométrique de l'invariance globale)</td><td>$M\epsilon(\Delta) \Leftrightarrow [S(M) = M'$ et $M'\epsilon(\Delta)]$
$\Leftrightarrow [S(M) = M'$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}]$</td><td>L'affixe z' de l'mage M' d'un point M d'affixe z de l'axe (Δ) de la similitude indirecte S vérifie :
z'- ω=k(z- ω)</td></tr>
</table>

5.4.1 Exercices résolus sur les similitudes directes planes

Les objectifs pédagogiques spécifiques des séries d'exercices 1,2,…et 12, visent la mise en relation de la définition géométrique et de la définition complexe d'un déplacement et d'une homothétie; de la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre (similitude directe $hor = roh = S(\Omega, \theta, k)$), par les traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique de leurs éléments caractéristiques, de leurs définitions géométriques et complexes, notamment la relation caractéristique géométrique ou algébrique entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z'.

Les exercices 13, 14 et 15 intègrent les objectifs pédagogiques spécifiques d'écriture complexe de la composée de deux similitudes directes et de la réciproque d'une similitude directe.

1. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique de l'élément caractéristique et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une translation

1) Exercice

Énoncé

Soit , la translation de vecteur $\vec{u}(3,2)$ qui transforme le point M d'affixe z en M' point d'affixe z'. Donner les valeurs des deux coefficients a et b de la relation $z' = az + b$.

Éléments de la solution

L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$; c'est-à-dire $z' = z + 3 + 2i$, puisque $z_{\vec{u}} = z_{3\vec{OI}+2\vec{OJ}} = 3 + 2i$.

$a = 1 \; et \; b = 3 + 2i$

2) Exercice

Énoncé

On considère la transformation du plan d'écriture complexe $z' = z + i - 2$. Donner la nature et l'élément caractéristique de cette transformation.

Éléments de la solution

Il s'agit de la translation de vecteur $\vec{u}(-2,1)$

3) Exercice

Énoncé

Soit $t_{\vec{u}}$, la translation le vecteur $\vec{u}$,qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 - 3i$ en B, point d'affixe $z_B = 2 + i$.

Donner l'affixe $z_{\vec{u}}$ du vecteur $\vec{u}$ de la translation $t_{\vec{u}}$ puis l'écriture complexe de $t_{\vec{u}}$. $z_{\vec{u}} = \cdots + i \ldots$ et $z' = \cdots z + \cdots$

Éléments de la solution

L'affixe du vecteur $\vec{u}$ de translation $t_{\vec{u}}$ est :

$$z_{\vec{u}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (2 + i) - (1 - 3i) = 1 + 4i.$$

L'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ est : $z' = z + z_{\vec{u}}$; c'est-à-dire $z' = z + 1 + 4i$.

2. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique des éléments caractéristiques et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une rotation

4) Exercice

Énoncé

Soit r, la rotation de centre le point $\Omega(1, -1)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Dans l'écriture complexe $z' = az + b$ de r, quels sont le module de a, l'argument principal de a et la valeur de $\frac{b}{1-a}$?

Éléments de la solution

$|a| = 1$, $Arg(a) = \frac{\pi}{3}$ et $\frac{b}{1-a} = 1 - i$ (affixe du centre $\Omega(1, -1)$)

5) Exercice

Énoncé

Soit r, la rotation qui aux deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$ associe respectivement les points A' et B' telles que $z_{A'} = 2i$ et $z_{B'} = 2 + 2i$. Donner l'écriture complexe de r. $z' = \cdots z +$ ...

Éléments de la solution

L'écriture complexe de r est du type $z'=e^{i\theta} z + b$. Par la traduction complexe des relations $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$ au moyen de cette équation, on a le système : $\begin{cases} z_{A'} = e^{i\theta} z_A + b \\ z_{B'} = e^{i\theta} z_B + b \end{cases}$; qui conduit à $e^{i\theta} = i$ et $b = 1 + i$.

$$z' = iz + 1 + i$$

6) Exercice

Énoncé

Soit r, la rotation de centre le point Ω d'affixe $\omega = -i$; qui transforme le point A d'affixe $z_A = 2 - i$ en A', point d'affixe $z_{A'} = -3i$.

Donner l'écriture complexe de r.

$z' = \cdots z +$ ...

Éléments de la solution

L'écriture complexe de r est du type $z'=e^{i\theta} z + b$. Par la traduction complexe des relations $r(A) = A'$ et $r(\Omega) = \Omega$ au moyen de cette équation, on a le système : $\begin{cases} z_{A'} = e^{i\theta} z_A + b \\ \omega = e^{i\theta} \omega + b \end{cases}$; qui conduit à $e^{i\theta} = -i$ et $b = 1 - i$.

$$z' = -iz + 1 - i$$

3. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique des éléments caractéristiques et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une homothétie

7) Exercice

Énoncé

Soit h, l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\omega = 1 - i$ et de rapport $k = -2$. Donner l'écriture complexe de h. $z' = \cdots z +$ ...

Éléments de la solution

L'écriture complexe de h est du type : $z' - \omega = k(z-\omega)$; ce qui se traduit par la relation: $z' = -2(z-1+i)+1-i$. d'où $z' = -2z+3-3i$.

8) Exercice

Énoncé

Soit h, l'homothétie qui aux deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+i$ et $z_B = 1-i$ associe respectivement les points A' et B' telles que $z_{A'} = 2+i$ et $z_{B'} = 2-3i$. Donner l'écriture complexe de h. $z' = \cdots z +$ ...

Éléments de la solution

L'écriture complexe de h est du type z'=$kz+b$. Par la traduction complexe des relations $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$ au moyen de cette équation, on a le système : $\begin{cases} z_{A'} = kz_A + b \\ z_{B'} = kz_B + b \end{cases}$; qui conduit à $k = 2$ et $b = 1+i$. $z' = 2z - i$.

9) Exercice

Énoncé

Soit h, l'homothétie de centre le point Ω d'affixe $\omega = -i$; qui transforme le point le point A d'affixe $z_A = 2$ en A', point d'affixe $z_{A'} = 1-\frac{1}{2}i$.

Donner l'écriture complexe de h. $z' = \cdots z +$ ...

Éléments de la solution

L'écriture complexe de h est du type z'=$kz+b$. Par la traduction complexe des relations $r(A) = A'$ et $r(\Omega) = \Omega$ au moyen de cette équation, on a le système : $\begin{cases} z_{A'} = kz_A + b \\ \omega = k\omega + b \end{cases}$; qui conduit à $k = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}i$. $z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i$.

4. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique des éléments caractéristiques et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une similitude directe $hor = roh = S(\Omega, \theta, k)$

10) Exercice

Énoncé

Soit s, la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $\omega = 2i$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Donner l'écriture complexe de s. $z' = \cdots z + \ \ldots$

Éléments de la solution

L'écriture complexe du type : s est $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ c'est-à-dire :

$z' = 2e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 2i) + 2i$; ce qui donne z'=($\sqrt{3}$+i)z+2+ $(2 - 2\sqrt{3})$ i.

11) Exercice

Énoncé

Soit s, la similitude directe de centre le point Ω d'affixe $\omega = i$, qui transforme le point A d'affixe $z_A = -2i$ en A', point d'affixe $z_{A'} = 2 + i$. Donner l'écriture complexe de s. $z' = \cdots z + \ \ldots$

Éléments de la solution

L'écriture complexe de s est du type z'=$az + b$. Par la traduction complexe des relations $s(A) = A'$ et $s(\Omega) = \Omega$ au moyen de cette équation, on a le système:

$\begin{cases} z_{A'} = az_A + b \\ \omega = a\omega + b \end{cases}$; qui conduit à $a = \frac{2}{3}i$ et $b = \frac{2}{3} + i$.

$z' = \frac{2}{3}iz + \frac{2}{3} + i$.

12) Exercice

Énoncé

Soit s, la similitude directe qui transforme les points I et B d'affixes respectives $z_I = 1$ et $Z_B = 2i$ en C et D respectivement tels que $z_C = 1 + i$ et $z_D = -2 + 2i$. Donner l'écriture complexe de la similitude directe s, l'affixe de son centre, son rapport et son angle.

$z' = \cdots z + \ \ldots$; affixe du centre : … ; rapport :… et angle : …

Éléments de la solution

$z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$; affixe du centre : 0 ; rapport : $\sqrt{2}$ et l'angle : $\frac{\pi}{4}$.

Écriture complexe d'une composée de similitudes directes

13) Exercice

Énoncé

Soit r_1, la similitude qui à un point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 donnée par $z_1 = i\,z - 1 - i$

Soit r_2, la similitude qui à un point M d'affixe z associe le point M_2 d'affixe z_2 donnée par $z_2 = (1-i)\,z - 1 + 3i$

Définir la transformation f qui envoie M_1 sur M_2 par son écriture complexe $z_2 = \cdots z_1 + \cdots$

Éléments de la solution

r_1 envoie M sur M_1 et f envoie M_1 sur M_2 ; comme r_2 envoie M sur M_2, on peut écrire que $r_2 = f o r_1$ et donc $f = r_2 o r_1^{-1}$.

L'écriture complexe de r_1^{-1}est : $z = -iz_1 - i + 1$. On a :

$z_2 = (1-i)\,z - 1 + 3i$=$(1-i)(-iz_1 - i + 1) - 1 + 3i$: z_2=(-1-i) $z_1 - 1 + i$

14) Exercice

Énoncé

Soit S_1, la similitude directe, de centre $\Omega_1(0,1)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et S_2 la similitude directe, de centre $\Omega_2(1,0)$, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Donner l'écriture complexe de la similitude $s = S_1 o S_2$

$z' = \cdots + \ldots,$.

Éléments de la solution

La détermination de l'écriture complexe de S_1 donne : $z_1 = (1-\sqrt{3}\,i)\,z - \sqrt{3}$

La détermination de l'écriture complexe de S_2 donne : $z_2 = \frac{1}{2}\,i\,z + 1 - \frac{1}{2}\,i$

Enfin $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right) z + 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} - i(\frac{1}{2} + \sqrt{3})$

15) Exercice

Énoncé

Soit S_1, la similitude directe, de centre $\Omega_1(i)$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2 et s la similitude telle que soS_1 est la similitude directe, de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

Donner l'écriture complexe de la similitude s : $z' = \cdots + \ \ldots$

Éléments de la solution

La détermination de l'écriture complexe de S_1 donne : $z_1 = 2\,i\,z + 2 + i$

La détermination de l'écriture complexe de soS_1 donne : $z' = \frac{1}{2}\,i\,z + \frac{1}{2} + i$

Comme s=($soS_1)oS_1^{-1}$ et l'écriture complexe de S_1^{-1} étant $z' = -\frac{1}{2}\,i\,z - \frac{1}{2} + i$

On a : $z' = \frac{1}{2}\,i\,(-\frac{1}{2}\,i\,z - \frac{1}{2} + i) + \frac{1}{2} + i$: $z' = \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}\,i$.

5.4.2 Exercices résolus sur les similitudes indirectes planes

Les objectifs pédagogiques spécifiques des séries d'exercices 1,2 et 3 visent la mise en relation de la définition géométrique et de la définition complexe d'un antidéplacement et d'une homothétie; de la composée d'une réflexion $S_{(\Delta)}$ et d'une homothétie dont le centre appartient à l'axe (Δ) de la réflexion (similitude indirecte $hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh = S(\Omega, (\Delta), k)$, par les traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique de leurs éléments caractéristiques, de leurs définitions géométriques et complexes, notamment la relation caractéristique géométrique ou algébrique entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z'. Nous montrons dans l'exercice 6 que la traduction complexe d'un élément caractéristique de $S(\Omega, (\Delta), k)$ aide à l'usage de d'un programme de calcul qui rend le plus compte de la composée $hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh = S(\Omega, (\Delta), k)$ pour déterminer les autre éléments caractéristiques de S(Ω, (Δ), k).

1. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique de l'élément caractéristique et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une réflexion d'axe(Δ)

   1) **Exercice** (réflexion: du cadre géométrique au cadre algébrique)

      Énoncé

Soit $S_{(\Delta)}$ la réflexion d'axe "la première bissectrice" (la droite d'équation $y = x$), qui à tout point M d'affixe z, associe son image M' d'affixe z' telles que : $z' = a\bar{z} + b$. Donner les valeurs des nombres complexes a et b.

Astuce

La caractéristique (l'axe) (Δ), de la réflexion $S_{(\Delta)}$ étant représentée dans le cadre analytique, plus précisément dans le registre des équations cartésiennes de droites du plan, on peut s'appuyer sur les relations entre les parties réelles et imaginaires respectives de z et z' fournies par cette équation pour obtenir l'écriture complexe projetée.

Éléments de la solution

$z' = a\bar{z} + b$ (a=1 et b=0)

   2) **Exercice**

      Énoncé (réflexion: du cadre géométrique au cadre algébrique)

Soit S, la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe son image M' d'affixe z' telles que $z' = i\bar{z} - 1 + i$. Montrer que S est une réflexion et donner une équation cartésienne de son axe (Δ).

Astuces

- Pour montrer que S est une réflexion, il suffit de montrer par "l'outil de la traduction complexe" que S est un antidéplacement qui admet un point invariant ou alors que S est un antidéplacement involutif (SoS=id_P).
- Pour déterminer une équation cartésienne de l'axe de S, il suffit de déterminer une relation caractéristique de l'axe entre les coordonnées x et y du point $M(x, y)$ tel que $S(M) = M$ par "l'outil de la traduction complexe de cette condition" et en tenant compte de la propriété de l'égalité de deux nombres complexes écrits sous la forme algébrique.
- Si $S_{(\Delta)}$ est la réflexion d'axe (Δ) et d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$, alors $z' - z = t(x, y)z_{\vec{n}}$ ($t(x, y)$ réel et $\vec{n}$, un vecteur normal de (Δ)) : cette propriété est la traduction complexe de la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{n}$, sous la condition $S(M) = M$. Une équation cartésienne de l'axe (Δ) s'écrit alors $t(x, y) = 0$. ($t(x, y)$ s'écrit sous la forme
$t(x, y)$=$\alpha x + \beta y + \gamma$ et est en outre un outil de production de l'écriture complexe de $S_{(\Delta)}$).

Éléments de la solution

- S est un antidéplacement puisque son écriture complexe est de la forme $z' = e^{i\theta}\bar{z} + b$ et plus précisément une réflexion car l'écriture complexe $z' = z$ de SoS.
- $(\Delta) : x - y + 1 = 0$.

2. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique des éléments caractéristiques et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une symétrie glissée

3) **Exercice** (symétrie glissée: du cadre algébrique au cadre géométrique)

Énoncé

Soit S, la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe son image M' d'affixe z' telles que $z' = i\bar{z} + 2i$. Montrer que S est une symétrie glissée et donner une équation cartésienne de son axe (Δ) et les composantes de son vecteur $\vec{v}$.

Astuces

- Pour montrer que S est une symétrie glissée, il suffit de montrer par "l'outil de la traduction complexe" que S est un antidéplacement qui n'admet pas de point invariant ou alors que S est un antidéplacement qui vérifie (SoS=$t_{2\vec{v}}$), $\vec{v}$ étant un vecteur non nul. Ce moyen permet en outre de déterminer ce vecteur $\vec{v}$ de la symétrie glissée.
- La détermination de l'axe (Δ) peut alors suivre par la traduction complexe de l'écriture $S_{(\Delta)}$=$t_{-\vec{v}}oS = Sot_{-\vec{v}}$. En effet la conjonction de propositions (SoS=$t_{2\vec{v}}$ et $S = t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}ot_{\vec{v}}$) est équivalente à

$S_{(\Delta)}=t_{-\vec{v}}\text{o}S = Sot_{-\vec{v}}$.

Éléments de la solution

Les écritures complexes respectives de $SoS=t_{2\vec{v}}$ et de $S_{(\Delta)}=t_{-\vec{v}}\text{o}S = Sot_{-\vec{v}}$ sont: z'=z+2(1+i) (expression complexe d'une translation) et $z' = i\bar{z} - 1 + i$. D'où $\vec{v}(1,1)$ et (Δ) la droite d'équation : $x - y + 1 = 0$.

4) **Exercice** (symétrie glissée: du cadre géométrique au cadre algébrique)

Énoncé

Soit S, la symétrie glissée d'axe la droite (Δ) d'équation $y = -x$, de vecteur $\vec{v}(1,-1)$ et qui à tout point M d'affixe z, associe son image M' d'affixe z'. Donner l'écriture complexe de S.

Éléments de la solution

- Écriture complexe de la translation $t_{\vec{v}}$: $z' = z + 1 - i$
- Donnons l'écriture complexe de la réflexion $S_{(\Delta)}$: $(\overrightarrow{OI}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$, donc $r(O, -\frac{\pi}{2}) = S_{(\Delta)}oS_{(x'Ox)}$; on a alors $S_{(\Delta)} = r(O, -\frac{\pi}{2})oS_{(x'Ox)}$

La traduction complexe du programme de construction de l'image du point M par $S_{(\Delta)}$: $M \longmapsto S_{(x'Ox)}(M) \longmapsto r(O, -\frac{\pi}{2})[S_{(x'Ox)}(M)]= S_{(\Delta)}(M)$ détermine le programme de calcul de l'affixe z' de $S_{(\Delta)}(M)$ suivant: $z \longmapsto \bar{z} \longmapsto z' = -i\bar{z}$.

- Écriture complexe de $S = S_{(\Delta)}ot_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)}$:

Un programme de calcul de z' affixe de $M' = S(M)$ en fonction de l'affixe z de M, sous la condition $S = S_{(\Delta)}ot_{\vec{v}} = t_{\vec{v}}oS_{(\Delta)}$ est :

$z \longmapsto z_1 = -i\bar{z} \longmapsto z' = z_1 + 1 - i$; d'où $z' = -i\bar{z} + 1 - i$.

3. Traductions réciproques dans les cadres géométrique et algébrique des éléments caractéristiques et de la relation entre un point M d'affixe z et son image M' d'affixe z' par une similitude indirecte $hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh = S(\Omega, (\Delta), k)$

5) **Exercice** (similitude indirecte $S(\Omega, (\Delta), k)$: du cadre géométrique au cadre algébrique)

Énoncé

Soit S, la similitude indirecte de centre $\Omega(1,1)$, d'axe la droite (Δ) d'équation : $y = 1$ et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de la similitude indirecte S.

Éléments de la solution en trois points

- Écriture complexe de l'homothétie h de centre $\Omega(1,1)$ et de rapport $k = 2$:

Traduction complexe de la définition géométrique (énoncé ouvert): $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$ dans le registre des affixes sans parties réelles et imaginaires, on a $z' - \omega = 2(z - \omega)$. Ce qui se traduit par :

$$z' - (1+i) = 2(z-(1+i)), \text{ d'où } z' = 2z - 1 - i.$$

- Écriture complexe de la réflexion d'axe (Δ) :

(Δ) est parallèle à l'axe des abscisses et $t_{2\overrightarrow{OJ}} = S_{(\Delta)} o S_{x'Ox}$ donc

$S_{(\Delta)} = t_{2\overrightarrow{OJ}} o S_{x'Ox} : z \longmapsto \bar{z} \longmapsto z' = \bar{z} + z_{2\overrightarrow{OJ}}$ d'où $z' = \bar{z} + 2i$.

- Écriture complexe de la similitude indirecte $S = hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh$

$S = hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh : z \longmapsto z' = \bar{z} + 2i \longmapsto z' = 2(\bar{z} + 2i) - 1 - i$

d'où $z' = 2\bar{z} - 1 + 3i$.

6) **Exercice** (interprétation de la traduction algébrique d'une similitude indirecte $S(\Omega, (\Delta), k)$: du cadre algébrique au cadre géométrique)

Énoncé

Soit S, la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe son image M' d'affixe z' telles que $z' = -3i\bar{z} + 3 + i$.

Montrer que S admet un unique point invariant Ω d'affixe ω. Proposer un programme de calcul de z'- ω qui rend le plus compte de la forme réduite $hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh$ de S. Déduire cette écriture le rapport de la similitude et donner une équation cartésienne de son axe (Δ).

Éléments de la solution

- $\omega = i$ est l'affixe du point invariant Ω de $S = hoS_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}oh$
- Les deux pas d'un programme de calcul sus-évoqué sont :

  $z - i \longmapsto z_1 - i = 3(z - i)$ et $z_1 - i \longmapsto z' - i = -i(\overline{z_1} - \bar{i})$

  Écriture complexe de h : $z_1 = 3z - 2i$ et écriture complexe de $S_{(\Delta)}$:

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i) .$$

CHAPITRE 6 : REFLEXIONS PEDAGOGIQUES SUR LES SIMILITUDES PLANES

6.1 Aperçu du parcours de l'élève vers les similitudes

La reconnaissance, la production et la reproduction par l'élève, dès le cours d'initiation d'objets sensibles iconiques, langagiers, des signes (les lettres, les chiffres, les ronds, les carrés, les rectangles, etc.) dans la lecture, l'écriture, le dessin, etc., en prenant en compte des critères en lien avec leurs formes, leurs dimensions, leurs caractéristiques perceptives, apparaissent à notre sens comme des situations de mise en évidence des propriétés des similitudes de l'espace ou du plan.

Nous présentons ici quelques compétences repérées dans les constructions de figures à l'école primaire, avant d'envisager une genèse du fonctionnement du concept de similitude plane de la sixième en classe de terminale C.

- **Au cycle primaire**

Dans les situations proposées aux élèves à l'école primaire, en lien avec l'agrandissement ou la réduction de figures géométriques, les compétences suivantes ont été repérées :

- Connaître les propriétés de l'agrandissement/réduction d'une figure
- Réaliser l'agrandissement d'une figure sur quadrillage
- Réaliser la réduction d'une figure sur quadrillage
- Réaliser l'agrandissement d'une figure sans quadrillage
- Réaliser la réduction d'une figure sans quadrillage
- Réaliser des tracés géométriques avec soin et précision
- Utiliser une situation simple de proportionnalité dans un problème d'agrandissement et de réduction de figures.

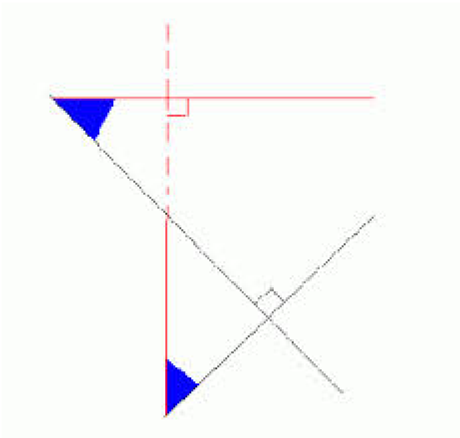
- **Au collège et au lycée**

Cycle	**1er cycle**	**2nde**	**1ère**	**T^{le}**
Objet mathématiques en lien avec les similitudes planes	- Symétrie par rapport à un point - Symétrie par rapport à une droite - Rotation - Translation - Théorème de Thalès etc.	- réflexion - translation - rotation - homothétie - etc.	Isométries du plan affines euclidiens et configurations planes	-Isométries et homothéties du plan, -Introduction géométrique de similitudes planes -Traduction complexe de similitudes planes

6.2 "Similarité" de triangles et similitudes planes

Thème de réflexion 1 :

Deux angles à cotés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires. Dans le cas où ces deux angles ne sont pas supplémentaires, leurs sommets (colorés en bleu sur la figure) forment avec les points d’intersection des supports de leurs cotés respectifs deux triangles.



1) Quel regard peut-on porter sur ces deux triangles sous l’angle de vue des similitudes planes ?
2) En termes de similitudes planes, quelles interprétations peut-on faire des concepts "triangles semblables", "triangles superposables", "triangles en situation de Thalès", etc.?

6.3 Le théorème de Thalès : une fenêtre de lecture de similitudes planes

Introduction

Le but de ce travail en atelier est de mettre à la disposition de l’enseignant des outils mathématiques théoriques, des outils méthodologiques, des outils épistémologiques et des outils didactiques susceptibles de lui permettre de contribuer plus efficacement à l’appropriation de concepts géométriques par l’élève.

Nous nous appuyons dans cet effort, sur le concept géométrique "similitude plane", ses éléments caractéristiques, ses propriétés, les interactions entre ces objets mathématiques du point de vue de leurs rôles, leurs effets et de leur importance dans ces interactions et dans les interactions de ce concept avec ses destinataires, dans les cadres géométrique, perceptif, algébrique, analytique et dans les registres de représentations (systèmes de signes) convoqués.

Les objets mathématiques théoriques sur lesquels nous nous centrons sont les objets géométriques (points, parties du plan, relations, transformations, etc. spécifiques au concept "similitude plane"), les grandeurs (longueur, rapport et angle) et les mesures éventuelles de ces grandeurs.

L’objectif de contenu réside dans:

- la mise en évidence de l'apport de l'outil "théorème de Thalès" dans la construction par l'élève du concept "similitude plane".
- la mise en évidence des articulations entres les quatre parties du programme *"nombres complexes et géométrie", "les isométries du plan" et "définitions géométriques des similitudes planes" et "traduction complexe des similitudes planes".*

L'objectif méthodologue est déterminé à notre sens dans l'élucidation dans les cadres sus-évoqués, des éléments caractéristiques, des propriétés et des procédés d'investissement de ce concept, des interactions entre ces objets mathématiques du point de vue de leurs rôles, leurs effets et de leur importance dans ces interactions et dans les interactions de ce concept avec ses destinataires.

Notre matériau est une configuration de triangles isocèles en situation de Thalès et un questionnaire dont les réponses conduisent successivement à :

- L'identification des objets mathématiques théoriques explicites, implicites, de leurs caractéristiques, leurs propriétés, des interactions entre ces objets mathématiques du point de vue de leurs rôles, leurs effets et de leur importance et la définition géométrique d'une similitude plane;
- La traduction dans les cadres algébrique et analytique, des objets mathématiques identifiés dans les cadres géométrique et perceptif.

Travail à faire en atelier

Pour toute la suite, on se place dans un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$). (On considère que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont unitaires, orthogonaux et qu'ils forment dans cet ordre, un angle orienté de mesure principale + $\frac{\pi}{2}$).

1. **Les données pertinentes**

Dans le plan euclidien orienté, on considère deux triangles isocèles directs en situation de Thalès $\Omega M M_1$ et $\Omega M_2 M'$. Les affixes respectives des points Ω , M , M_1 M_2 et M' seront respectivement désignées par ω, z, z_1, z_2 et z'.

On désigne par θ, la mesure principale de l'angle (orienté positivement) au sommet commun Ω des deux triangles isocèle et par (Δ) leur médiatrice commune issue de ce sommet et on pose : $k = \frac{\Omega M'}{\Omega M_1}$.

2. **Les consignes**

2.1.Représentation perceptive et traductions complexes des objets géométriques explicites

1) Construire les deux triangles $\Omega M M_1$ et $\Omega M_2 M'$.
2) Construire la droite (Δ).
3) Préciser les rôles, effets et importance des objets mathématiques Ω, θ, k et (Δ) dans ces constructions géométriques.
4) Donner la traduction complexe, dans le registre des nombres complexes :

- de chacun des triangles isocèles $\Omega M M_1$ et $\Omega M_2 M'$
- de la relation de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M_1}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$
- de la relation de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M_2}$
- Préciser la traduction complexe des objets mathématiques Ω, θ, k et (Δ) de leurs rôles, leurs effets et de leur importance dans les constructions géométriques de 1) et 2) de la partie 2.1.

2.2.Identification d'objets géométriques implicites particuliers

1) Quelles à votre sens, les transformations du plan qui trouvent du sens dans les constructions géométriques des questions 1) et 2) de 2.1?
2) Quelles sont leurs éléments caractéristiques, les définitions géométriques et leurs traductions complexes et les formes générales des écritures complexes de ces transformations?

2.3.Mise en relation des objets explicites avec les objets implicites

1) Quelles sont à votre sens, les deux transformations du plan qui sont les composées des transformations précédentes et qui trouvent du sens, dans deux programmes de constructions du point M' à partir du point M que comporte la figure construite?
2) Quelles sont les éléments caractéristiques, les définitions géométriques et les formes générales des écritures complexes respectives de ces deux transformations en fonction des points indiqués dans la partie des données pertinentes?
3) Définir les réciproques, les formes réduites respectives de ces deux transformations et leurs traductions complexes.

Traduction complexe des transformations convoquées

4) Donner la traduction complexe des éléments caractéristiques, de définitions géométriques et des écritures complexes respectives des deux transformations identifiées.

5) Donner la traduction complexe des réciproques, des formes réduites respectives (en termes de programmes de calculs) de ces deux transformations.

(**Indication** : chacune des deux transformations est la composée de l'autre par la réflexion d'axe "l'axe des abscisses").

6.4 Lieu géométrique et construction du centre d'une similitude plane

Thème de réflexion 3 :

Comment envisager la construction du centre d'une similitude plane de rapport différent de 1, à partir de la donnée d'un point et de son image, sous l'angle de vue du lieu géométrique d'un point variable M du plan affine euclidien ?

BIBLIOGRAPHIE

BELIN. *Géométrie, Math terminales* CE. Édition 1992

BONNET, V. *Cours de spécialité Mathématiques, terminale S*. Lycée Pontus de Tyard, France. Édition 2007

CIAM (Collection Inter Africaine de Mathématiques). *Terminale SM*. Édition2001

CIAM (Collection Inter Africaine de Mathématiques). *Terminale SE*. Édition2001

Collection Formation. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Édition Octare S, 2010

DÉCLIC Mathématiques *TermS* Enseignement obligatoire et de spécialité. Hachette Éducation 2005

Programme officiel de Mathématiques des classes de terminales C et E du Congo-Brazzaville.

Programme officiel de Mathématiques des classes de terminales C et E du Cameroun.

ROSSEEL Hilda et Maggy SCHNEIDER, *Des nombres qui modélisent Des transformations (2)*. Laboratoire de didactique des mathématiques, Facultés Universitaires de Namur. 2004

LIENS UTILS

www.chronos.activeweb.fr

www.schumath.free.fr