

MATHÉMATIQUES

Terminale D

DÉRIVATION

Que vise ce cours ?

Objectif Général :

Réaliser des activités sur les fonctions.

Objectif Spécifique :

Décrire les éléments qui définissent le comportement des fonctions.

Objectif Opérationnels :

A la fin de ce cours l'élève doit être capable, en utilisant la notion de nombre dérivé, de :

- étudier la dérivabilité d'une fonction en un point ;
- déterminer  l'équation de la tangente à une courbe en un point ;
- déterminer  une approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

Pourquoi étudier ce cours ?

Ce cours, déjà fait en classe de Première D, est le troisième cours de maths (d'après le programme de 2002 du Congo-Brazzaville) se faisant en Terminale D au début d'une année académique. Il constitue un cours de révision pour l'élève de Terminale D, lui permettant d'aborder la dérivation des fonctions composées et de comprendre les applications de la notion de dérivée dans l'étude des fonctions.

Avant d'aborder ce cours

La seule grande exigence, avant d'aborder ce cours est la maîtrise du calcul des limites. Si vous ne vous sentez pas à l'aise dans la détermination des limites des fonctions alors nous vous conseillons vivement de revoir votre cours sur le calcul de limites. Par contre, si vous êtes apte au calcul des limites alors prouvez-le en réussissant le test ci-dessous.

Test :

Trouve la bonne réponse et saisis la lettre A ou B ou C correspondant à cette réponse dans la case « ta réponse ».

Numéro	Question	Réponses			Ta réponse
		A	B	C	
1	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$	 ?	0	$-\infty$	
2	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^3) = ?$	$+\infty$	$-\infty$	?	
3	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1+x}{1-x^{1/2}} = ?$	0	$+\infty$	$-\infty$	
4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos 4x}{1+x^2} = ?$	$-\infty$	0	?	
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x} = ?$	8	4	16	

Solution du test :

Numéro	Réponse
1	A
2	B
3	C
4	B
5	A

Déroulement prévu

Pour l'élève :

Nous recommandons vivement à l'élève travaillant de façon autonome de commencer par traiter, pour chaque partie du cours, l'activité préparatoire proposée avant d'étudier le cours et résoudre les exercices qui y correspondent. Ainsi, l'élève devra suivre le schéma suivant.

Activité préparatoire → Cours → Exercices .

Pour l'enseignant :

Nous proposons, à l'enseignant souhaitant dispenser ce cours, une fiche pédagogique dans la laquelle figurent les différentes étapes prévues dans le déroulement de ce cours. Chaque étape est subdivisée en plusieurs phases et correspond à un objectif opérationnel précis. Ceci dit, rappelons les définitions de notions didactiques qui nous seront utiles.

- **La fiche pédagogique :** c'est un outil didactique, rédigée par un enseignant ou un groupe d'enseignants, dans lequel sont inscrits les renseignements et informations essentiels à la réalisation d'une séance d'enseignement / apprentissage.



- **La motivation :** C'est la phase qui permet la prise de contact avec l'objet d'apprentissage. Elle consiste à éveiller, à capter l'intérêt des apprenants au début et tout au long du cours.
- **Le contrat pédagogique :** C'est la  phase qui consiste à communiquer oralement ou par écrit le thème ou l'objectif opérationnel dans des termes adaptés au niveau de développement intellectuel des apprenants.
- **La vérification des pré-requis :** C'est la phase qui consiste à s'assurer si l'apprenant possède les connaissances antérieures nécessaires à l'acquisition des nouvelles connaissances.
- **Les acquisitions nouvelles :** C'est la phase  laquelle l'enseignant transmet en utilisant tous les moyens intéressants, les nouvelles connaissances aux apprenants.
- **La synthèse :** C'est la phase où l'enseignant fait un récapitulatif de ce qui a été dit ou fait pendant une séquence de cours.
- **L'évaluation :** C'est la phase pendant laquelle l'enseignant vérifie si les apprenants peuvent réaliser la performance attendue . On parle d'évaluation formative pour une évaluation qui a lieu au cours d'une séance de cours et servant à découvrir et à remédier aux difficultés des apprenants dans l'assimilation des connaissances enseignées.
- **La technique :** C'est l'ensemble des procédés employés pour obtenir un résultat déterminé.
- **La modalité :** C'est la manière ou la condition dans laquelle les apprenants vont travailler.
- **La consigne :** C'est l'énoncé de ce qu'il faut faire faire aux apprenants.



Fiche pédagogique

« pour l'enseignant »

Niveau : **Terminal D**

Discipline : **Mathématiques**

Thème : **Dérivation**

Sous-discipline : **Algèbre**

Date :

Durée estimée du cours : 8 h

Durée réelle du cours :

Effectif total :

Effectif garçons :

Effectif filles :

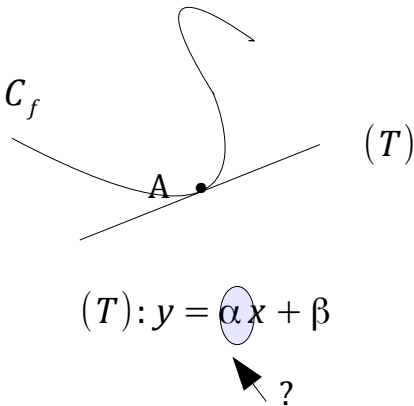
Matériel : Craies blanches ; règles graduées.

Documentation : voir bibliographie.

N.B : Les vides marqués en pointillés seront remplis par l'enseignant.

Étape 1. Objectif opérationnel 1 (0.0 1)

A la fin de cette séance de cours l'élève devra être capable de montrer qu'une fonction est dérivable (ou ne l'est pas) en un point ou dans un intervalle, en utilisant la définition de la dérivabilité d'une fonction.

0.0 1		
Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	temps
Motivation : (question posée par l'enseignant aux élèves) Supposons que vous disposez d'une fonction bien définie f. <u>Question</u> : Connaissez-vous un moyen permettant de calculer le coefficient directeur d'une tangente à la courbe de f en un point donné $A(x_A; y_A)$? <u>Illustration</u> : f et $A(x_A; y_A)$ sont connus . (T) Passe par A. On cherche un moyen de détermination de α. 	Audition attentive des élèves . Les élèves réfléchissent et tentent de répondre à la question .	5 min 5 min

Contrat pédagogique : Pour pouvoir répondre à la question précédente, il nous faudra connaître la notion de “dérivabilité d'une fonction”. C'est le premier objectif du présent cours dont le titre est « La Dérivation ».	Audition attentive .	5 min
Vérification des pré-requis : <u>Technique</u> : Présenter l'exercice-test au tableau . <u>Modalité</u> : Travail en groupe d'élèves d'un même banc. <u>Consigne</u> : Résolvez l'exercice-test.	Résolution de l'exercice-test . (voir page ii)	20 min
Activité préparatoire : AP 1 : Dérivabilité et Nombre dérivée	Les élèves recopient l' AP 1. Un élève volontaire résout l' AP 1 au tableau pendant que les autres suivent .	40 min
Acquisitions nouvelles : • Dérivabilité en un point ; • nombre dérivé ; • Dérivabilité à gauche et à droite ; • Dérivabilité sur un intervalle. <u>Technique</u> : Transmission orale et écrite du cours . <u>Modalité</u> : Travail individuel . <u>Consigne</u> : Noter les données dictées dans le calme . Synthèse : Posez des questions aux élèves sur les notions relatives à cette partie du cours.	Les élèves recopient le cours et posent éventuellement des questions.	50 min

Par exemple : • A quel moment dit-on qu'une fonction f est dérivable en a ? • Est-il vrai que toute fonction continue est dérivable ? • A quelle condition une fonction f est dérivable à droite en a ? <u>Évaluation formative :</u> • Résoudre les exemples a), b) et d) (voir page 12-13). • Résoudre l'exercice d'application 1.1. L'enseignant guide principalement le travail des élèves qui sont au tableau.	Les élèves répondent aux questions de synthèse . Trois élèves résolvent au tableau respectivement les exemples a), b) et d). Ensuite trois autres élèves traitent chacun une question de l'exercice d'application. Le reste des élèves suivent attentivement.	15 min 25 min 25 min
---	--	---

Étape 2. Objectif opérationnel 2 (O.0 2)

A la fin de cette séance de cours, l'élève devra être capable de déterminer la meilleure approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point donné, en se servant de la notion de nombre dérivé.

O.0 2		
Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	temps
Motivation : (question posée par l'enseignant aux élèves)		

Soit f une fonction définie sur D_f et $a \in D_f$. Supposons qu'on ne connaît pas l'expression analytique de f mais qu'on connaît les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$. Question : Peut-on trouver une fonction g qui approxime f au voisinage de a c'est-à-dire $g(x) \approx f(x)$ avec x proche de a. Si oui, comment trouver g ? Réponse : Oui, quant à comment trouver g, c'est ce que nous verrons dans cette deuxième partie du cours. Contrat pédagogique : L'objectif que nous nous fixons, dans cette deuxième partie du cours, est d'établir une formule donnant l'expression analytique de la meilleure approximation affine locale d'une fonction en un point où elle est dérivable. Aussi nous verrons l'aspect cinématique de la notion de nombre dérivé. Activité préparatoire : AP 2 : Approximation affine et vitesse instantanée Acquisitions nouvelles : • Approximation affine locale d'une fonction f en a ;	Audition attentive des élèves . Les élèves réfléchissent et tentent de répondre à la question . Audition attentive . Les élèves recopient l' AP 2. Un élève volontaire résout l' AP 2 au tableau pendant que les autres suivent.	5 min 5 min 5 min 35 min
---	--	--

Étape 3. Objectif Opérationnel 3 (O.O 3)

A l'issue de ce cours, l'élève doit être capable de déterminer la direction et l'équation de la tangente en un point à courbe donnée, en se servant de la notion de nombre dérivée.

O.O 3		
Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Temps
Motivation : (question posée aux élèves) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur I, (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$. D'après ce qui précède, nous savons que la courbe (C_f) admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation : $y = f'(a).x + b .$ <u>Question :</u> Trouvez le réel b. <u>Réponse :</u> $b = f(a) - f'(a).a$. Contrat pédagogique : Dans cette troisième et dernière partie cours, nous verrons comment déterminer la direction et l'équation de la tangente à une courbe en un point donné, en se servant de la notion de nombre dérivée.	Audition attentive des élèves. Les élèves réfléchissent et tentent de répondre à la question. Audition attentive des élèves.	5 min 5 min 5 min

Enfin, nous définirons la notion de fonction dérivée. Cette notion sera indispensable dans l'étude des fonctions. Activité préparatoire : AP 3 : Équation de la tangente . Acquisitions nouvelles : • Équation de la tangente à une courbe ; • interprétation graphique de la dérivabilité d'une fonction ; • fonction dérivée. <u>Technique</u> : Transmission orale et écrite du cours . <u>Modalité</u> : Travail individuel . <u>Consigne</u> : Noter les données dictées dans le calme . Synthèse : Posez des questions aux élèves sur les notions relatives à cette partie du cours. Par exemples : • Qu'est ce que une tangente à une courbe (C_f) en un point $A(a, f(a))$? • Soit f une fonction dérivable en a. Existe-t-il une différence entre tangente de f en a et meilleure approximation affine locale de f au voisinage de a ?	Les élèves recopient l' AP 3. Un élève volontaire résout l' AP 3 au tableau pendant que les autres suivent. Les élèves recopient le cours et posent éventuellement des questions. Les élèves répondent aux questions de synthèse .	40 min 50 min 10 min
--	---	---

• A quelle condition la courbe d'une fonction f admet en $A(a, f(a))$: une tangente vertical ? une tangente horizontale ? une tangente oblique ? • Qu'appelle-t-on fonction dérivée d'une fonction f. <u>Évaluation formative :</u> • Résoudre les exercices d'application 3.1 et 3.2. L'enseignant guide principalement le travail des élèves qui sont au tableau.	Pour chaque exercice d'application, Deux élèves traitent au tableau chacun une question.	40 min
--	---	---------------

Remarque :

Dans les tableaux ci-dessus, sont mentionnées :

- les activités de l'enseignant dans la colonne « Stratégies d'enseignement ».
- les activités de l'élève dans la colonne « Activités d'apprentissage ».
- la durée estimée pour chaque séquence de cours dans la colonne « Temps ».

SOMMAIRE

Partie 1	Dérivabilité	1
AP 1	Dérivabilité et Nombre dérivé	1
AP1	Corrigé	3
Cours		7
1.1	Dérivabilité en un point	7
1.2	Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite	10
1.3	Dérivabilité sur un intervalle	14
Exercices		16
 Partie 2	 Approximation affine	 20
AP 2	Approximation affine et vitesse instantanée	20
AP2	Corrigé	21
Cours		24
2.1	Approximation affine	24
2.2	Aspect cinématique	26
Exercices		29
 Partie 3	 Tangente à une courbe	 32
AP 3	Équation de la tangente	32
AP3	Corrigé	33
Cours		37

3.1 Tangente à une courbe en un point	37
3.2 Interprétation graphique	40
3.3 Fonction dérivée	44
Exercices	47
Devoir à faire en classe	53
Corrigé. Devoir à faire en classe	54
Devoir 1 (à faire la maison)	61
Devoir 2 (à faire la maison)	63
Bibliographie	65

Partie 1

Dérivabilité

Activité Préparatoire

AP 1 Dérivabilité et Nombre dérivé

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 ; \quad g(x) = \frac{1-x}{x} .$$

- 1) Déterminez les domaines de définitions D_f et D_g de f et g .
- 2) Soit $h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ tel que $1+h \in \mathbb{R}$ et $1+h \neq 0$. Calculez :

- $A_x = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}, \quad \forall x \in D_f.$
- $B_x = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}, \quad \forall x \in D_g.$
- $A_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} ; \quad B_h = \frac{g(1+h) - g(1)}{h}.$

3)

a) Calculez les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} A_h ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_h .$$

- Que constatez-vous ?

b) Que pouvez-vous dire des fonctions f et g ?

Indication : En fonction du caractère fini ou infini du résultat obtenu en calculant les limites $\lim_{x \rightarrow 1} A_x$ et $\lim_{x \rightarrow 1} B_x$, on dira que f ou g est dérivable en 1 ou ne l'est pas.

4) Tracez la courbe (C_f) de f .

5) On note : $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} A_x$ et $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$.

Tracez, dans le même graphe que (C_f) , les droites :

$$(T_1): y = f'(1) \cdot x - 1 \quad \text{et} \quad (T_2): y = f'(-1) \cdot x - 1.$$

(*) On remarquera que (T_1) et (T_2) sont les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

6) Que représentent les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$ pour les droites (T_1) et (T_2) respectivement.

(**) Les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$ sont appelés respectivement : nombre dérivé de f en 1 et en -1 .

AP 1 Corrigé

On dispose des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 ; \quad g(x) = \frac{1-x}{x}.$$

1) On trouve aisément : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

2) Pour $h \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$ tel que $1+h \in \mathbb{R}$ et $1+h \neq 0$. On a :

$$\bullet \quad A_x = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1}{x-1} = x+1, \quad \forall x \in D_f.$$

$$\bullet \quad B_x = \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \frac{1-x}{x(x-1)} = -\frac{1}{x}, \quad \forall x \in D_g.$$

$$\bullet \quad A_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = h+2.$$

$$\bullet \quad B_h = \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{-h}{h(1+h)} = \frac{-1}{1+h}.$$

3) a) On trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} = -1 ;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_h = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_h = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1.$$

• On constate que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} A_x = \lim_{h \rightarrow 0} A_h \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} B_x = \lim_{h \rightarrow 0} B_h.$$

b) D'après ce qui précède, il est clair que  $\lim_{x \rightarrow 1} A_x < \infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} B_x < \infty$.

DÉRIVATION

En tenant compte de l'indication (relative à la question 3), on peut dire que les fonctions f et g sont dérivables en 1 .

5) Étude de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 .$$

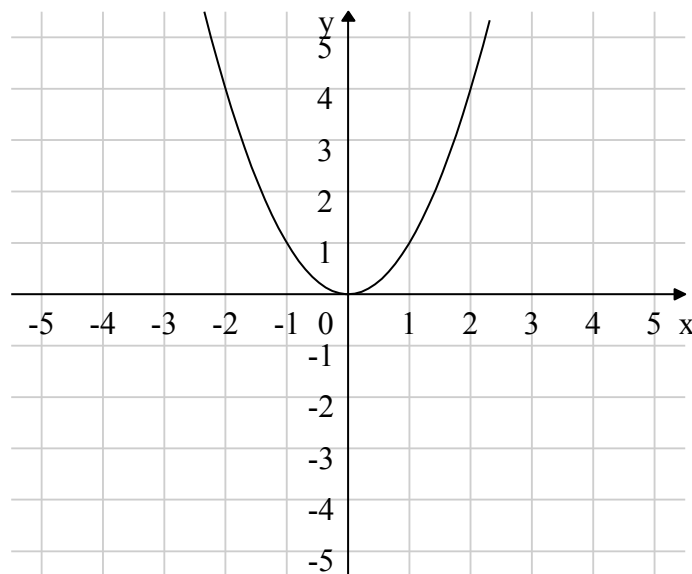
$$f(-x) = f(x) = x^2, f \text{ est paire.}$$

L'axe (Oy) est un axe de symétrie de C_f . L'intervalle d'étude de f se réduit à $]0 ; +\infty[$.

$\forall a, b \in]0 ; +\infty[$, on a : $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. f est donc croissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) .

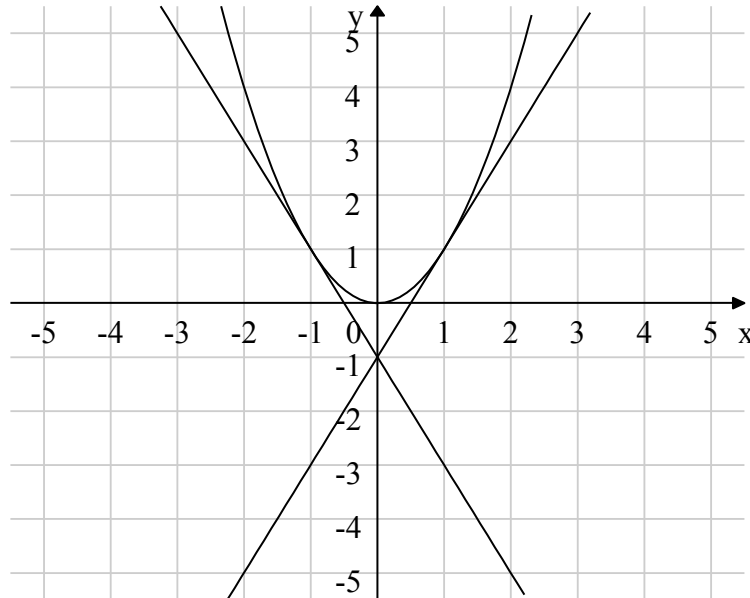
On obtient par symétrie la courbe (C_f) suivante :



5) On a $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} A_x = 2$ et $f'(-1) = -2$ donc :

$$(T_1): y = 2x - 1 \text{ et } (T_2): y = -2x - 1.$$

On obtient les graphes suivants :



- On voit graphiquement que (T_1) et (T_2) sont les tangentes à (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

6) Les équations des droites (T_1) et (T_2) sont de la forme :

$(T_1): y = f'(1).x - 1$ et $(T_2): y = f'(-1).x - 1$. On en déduit que les réels $f'(1)$ et $f'(-1)$, appelés respectivement nombres dérivés de f en 1 et en -1 , représentent les coefficients directeurs des droites (T_1) et (T_2) qui sont les tangentes à la courbe (C_f) aux points d'abscisse 1 et -1 respectivement.

Synthèse :



On retient de cette activité préparatoire les ~~notions~~ suivantes :

La dérivabilité :

- Une fonction réelle f sera dite **dérivable en un réel a** si la limite

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, qui est équivalente à la $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + a) - f(a)}{h}$, est finie.

Le nombre dérive :

- Lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est finie c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \eta \in \mathbb{R}$, le réel η est appelé nombre dérivé de f en a et c'est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe (C_f) au point d'abscisse a .

COURS

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1. Soit a un réel appartenant à D_f . On dit que f est dérivable en a si pour tout réel h non nul tel que $a + h \in D_f$, le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro.

On écrit : f est dérivable en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, a + h \in D_f \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- Le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé taux de variation de f entre a et $a+h$.
- Le taux de variation à un sens concret, il peut représenter une vitesse moyenne ; un débit moyen ; un coût moyen de fabrication d'un produit .
- Le réel l tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$ est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$. C'est le **coefficient directeur** de la **tangente** à la courbe représen-

tative de f au **point d'abscisse a** (une preuve sera donnée ultérieurement).

Autres définitions équivalentes :

- Faisant le changement de variable : $h = x - a$. Quand h tend vers 0, x tend vers a . Alors on obtient la définition suivante :

f est **dérivable** en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- f est **dérivable** en $a \in D_f$ si et seulement si :

$$\forall h \in \mathbb{R}, h \neq 0, a + h \in D_f \text{ on a } f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \quad (3)$$

où l est un réel et φ est une fonction de limite nulle en 0.

Point réflexion



A partir de (3), on peut aboutir à la définition de (1) de la manière suivante :

Pour tout réel h non nul tel que $a + h \in D_f$:

$$f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \text{ avec } l \text{ un réel.}$$

$$f(a+h) - f(a) = l.h + h.\varphi(h),$$

On obtient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l + \varphi(h).$$

En passant à la limite $h \rightarrow 0$ et sachant que $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1. *Si une fonction réelle à valeurs réelles est dérivable en un point alors elle est continue en ce point.*

Preuve :

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable au point $A(a, f(a))$ avec $a \in D_f$. Pour tout réel non nul h tel que $a+h \in D_f$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + l.h + h.\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad \text{☞} \quad (4)$$

Posons $h = x - a$.

Quand h tend vers 0, x tend vers a .

La relation (4) devient : $f(x) = f(a) + l.(x-a) + (x-a).\varphi(x-a)$ (5)

$$\text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x-a) = 0.$$

Après passage à la limite quand x tend vers a , on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

D'où f est continue en a ■

Point réflexion

Attention ! La réciproque du théorème 1 est fausse. Une fonction continue en un point n'est pas toujours dérivable en ce point. Par exemple la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ est continue au point d'abscisse 0 mais n'est pas dérivable en ce point (la justification sera faite ultérieurement).

1.2 Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite

Soit f une fonction à valeur réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I .

Définition 2. On dit que f est **dérivable à gauche en a** si la restriction de f à l'intervalle $I_g =]-\infty, a] \cap I$ est dérivable en a . Ce qui se traduit par :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I_g}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Remarques :

- Lorsque la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie alors on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a) .$$

- Le réel $f'_g(a)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en a .

Définition 3. On dit que f est **dérivable à droite en a** si la restriction de f à l'intervalle $I_d = I \cap [a ; +\infty[$ est dérivable en a . Ce qui se traduit par :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in I_d}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} .$$

Remarques :

- Lorsque la limite $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie alors on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) .$$

- Le réel $f'_d(a)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en a .

Nota Béné :

Une fonction f est dite dérivable en a si le nombre dérivé à gauche de f en a est égal au nombre dérivé à droite de f en a , c'est-à-dire :

$$f'_d(a) = f'_g(a) .$$

Par contre une fonction f n'est pas dérivable en a , si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$

- le nombre dérivé à gauche de f en a est différent du nombre dérivé à droite de f en a c'est-à-dire : $f'_g(a) \neq f'_d(a)$.

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a^- «à gauche» vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$

- la limite du taux de variation de f entre a et x , quand x tend vers a^+ «à droite» vaut l'infini c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty .$$



Exemples :

- a) La fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable en 1 car $f'_g(1) = f'_d(1) = 5$.
- b) La fonction f définie par : $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, est dérivable à gauche et à droite en 0 avec $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, mais elle n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

c) La fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \cos(x\pi) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
, n'est pas dérivable en 1 car $f'_g(1) = 0$ et $f'_d(1) = 1$.

d) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \tan\left(\frac{x\pi}{2}\right) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
, n'est

pas dérivable en 1. On peut remarquer qu'elle est dérivable à droite en 1 avec $f'_d(1) = 1$ mais qu'elle n'est pas dérivable à gauche en 1 puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$.

e) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \cos(x\pi) & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
, n'est

pas dérivable en 1 car $f'_g(1) = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$.

f) La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 est

dérivable en 1 car $f'_g(1) = f'_d(1) = 1$.

g) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas continue en 0.

1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction f est dite dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ lorsque f est dérivable en tout point de I .

Dans ce cas, on a :

$$\forall a \in I, \exists l \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l. \quad \text{💬}$$

Point réflexion

Question : Pourquoi a-t-on considéré l'intervalle **I ouvert** ?

Réponse : on considère un intervalle ouvert I pour s'assurer, à chaque fois que l'on choisit un élément a de I , de l'existence d'un réel h tel que $a + h$ appartienne à I . Ce qui n'est pas possible si l'intervalle I est fermé.

En langage mathématique, on écrit :

$$\text{l'intervalle } I \text{ est ouvert} \Rightarrow \forall a \in I, \exists h \in \mathbb{R}, a + h \in I.$$

Exercice d'application 1.1

Calculer le nombre dérivée de f en x_0 , dans les cas suivants :

a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$; $x_0 = -2$.

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$; $x_0 = 2$.

c) $f(x) = \sqrt{3x-2}$; $x_0 = 1$.

Solution :

a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On a : $f(-2) = 9$ et $f(x) - f(-2) = 5x^2 + 4x - 12 = (5x - 6) \cdot (x + 2)$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 5x - 6.$$

En passant à la limite : x tend vers -2 , on obtient :

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -16.$$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$. Il est clair que f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a : $f(2) = 4$ et $f(x) - f(2) = \frac{2x}{x-1} - 4 = -\frac{2(x-2)}{x-1}$,

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{2}{x - 1}.$$

D'où $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -2$.

c) $f(x) = \sqrt{3x-2}$. $f(x)$ existe si $3x - 2 \geq 0$, donc f est définie sur $[\frac{2}{3}; +\infty[$.

On a : $f(1)=1$ et $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{3x-2}-1}{x-1},$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{3x-2}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{3x-2}+1}{\sqrt{3x-2}+1},$$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}.$$

$$\text{D'où } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}.$$

Exercices

Exercice 1.1

Déterminer sans calcul le nombre dérivé en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = 2 - 3x + x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x).$

Exercice 1.2

Soient f la fonction cube : $x \mapsto x^3$, et a un nombre réel. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que f est dérivable en a et préciser $f'(a).$

Exercice 1.3

Soit f la fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}.$

En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que :

- 1) f est dérivable en tout réel a strictement positif;
- 2) f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 1.4

Déterminer sans calcul :

- 1) le nombre dérivé en 0 de la fonction f :

$$x \mapsto 1 - 2x + 3x \cdot \tan(x) .$$

- 2) le nombre dérivé en -1 de la fonction g :

$$x \mapsto 2x + (x + 1)^2 \cdot \sqrt{x^4 + 3} .$$

Exercice 1.5

Déterminer la limite de $\frac{\tan(x) - 1}{4x - \pi}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 1.6

Soit f la fonction définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = -2x + 5$.

- 1) Soit h un réel non nul, déterminer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2 + h$.

En déduire que f est dérivable en 2 et préciser le nombre dérivé $f'(2)$.

- 2) f est-elle dérivable en -3 ? Justifier.

Exercice 1.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

Démontrer que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Exercice 1.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x(2 - x)$. Démontrer que f est dérivable en 2 et déterminer le nombre dérivé $f'(2)$.

Exercice 1.9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, par : $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Démontrer que f est dérivable en -1 et déterminer le nombre dérivé $f'(-1)$.

Exercice 1.10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, par : $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Démontrer que f est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé $f'(3)$.

Exercice 1.11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^3$.

Démontrer que, pour tout réel non nul h : $\frac{(-2+h)^3 + 8}{h} = 12 - 6h + h^2$.

En déduire que f est dérivable en -2 et déterminer le nombre dérivé $f'(-2)$.

Exercice 1.12

Soit f la fonction définie sur $[-3 ; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3+x}$.

Pour tout réel non nul $h > -4$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}.$$

En multipliant et en divisant le numérateur et le dénominateur par :

$$\sqrt{4+h} + 2, \text{ démontrer que : } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}.$$

En déduire que f est dérivable en 1 et déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

Exercice 1.13

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 + |x-1|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la dérivée de cette fonction pour $x=-2$ et pour $x=2$.

2) La fonction est-elle dérivable pour $x=1$?

Dans les deux cas, on appliquera la définition de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

Partie 2 Approximation affine

Activité Préparatoire

AP 2 Approximation affine et Vitesse instantanée

Considérons une fois encore la fonction f définie par : $f(x) = x^2$, pour tout réel x . Soit k la fonction définie par : $k(x) = f(2) + (x - 2) \cdot f'(2)$ pour tout réel x , avec :

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

1) Calculez : $f(1,75)$ et $k(1,75)$; $f(1,95)$ et $k(1,95)$; $f(2,15)$ et $k(2,15)$; $f(2,35)$ et $k(2,35)$; $f(2,55)$ et $k(2,55)$.

2) Quel constat faites-vous ?

(*) La fonction k est appelée approximation affine de f pour x proche de 2.

3) Soit M un mobile se déplaçant suivant la loi horaire :

$$f(t) = t^2 \text{ en mètre, } t \text{ en seconde.}$$

a) Combien de temps le mobile met-il pour parcourir 100 m ?

b) Soit h un réel non nul tel que $2 + h$ appartient à $[0 ; 4]$.

Quelle est, en fonction de h , la vitesse moyenne de M entre

les instants 2 et $2 + h$.

c) Calculez la limite, quand h tend vers 0 , de cette vitesse moyenne.

(**) Cette limite est appelée vitesse instantanée du mobile M à l'instant $t = 2$.

AP 2 Corrigé

1) $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$$k(x) = f(2) + (x - 2) \cdot f'(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4,$$

$$\text{On a : } k(x) = 4x - 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(1,75) = 3,0625, \quad k(1,75) = 3;$$

$$f(1,95) = 3,8025, \quad k(1,95) = 3,8;$$

$$f(2,15) = 4,6225, \quad k(2,15) = 4,6;$$

$$f(2,35) = 5,5225, \quad k(2,35) = 5,4;$$

$$f(2,55) = 6,5025, \quad k(2,55) = 6,2.$$

2) On constate que : pour des valeurs de x proches de 2 ,

$$f(x) \approx k(x).$$

Ce qui justifie le fait que la fonction k soit appelée approximation affine de f au voisinage de 2.

3) a) Lorsque le mobile parcourt 100 m on a :

$$f(t) = t^2 = 100 \quad \text{donc} \quad t = 10\text{ s}.$$

Le mobile met 10 s pour parcourir 100 m .

b) Par définition, la vitesse moyenne M est :

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Dans le cas présent, il s'agit de la vitesse moyenne du mobile entre les instants 2 et $2 + h$. On a :

$$M = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 4.$$

c) On a : $\lim_{h \rightarrow 0} M = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 4) = 4.$

De même, on peut écrire : $\lim_{h \rightarrow 0} M = f'(2) = 4.$

En tenant compte de (**), on conclut que la vitesse du mobile à l'instant $t = 2$ est égale au nombre dérivée de la loi horaire du mobile en $t = 2$, ce qui vaut 4 m/s .

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire les notions suivantes :

Approximation affine :

- Une approximation affine d'une fonction f au voisinage de x_0 est une fonction affine φ telle que pour tout x proche de x_0 :
 $\varphi(x) \approx f(x)$. 
- Pour une fonction réelle f dérivable en x_0 , la fonction affine g définie par $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est une approximation affine de f au voisinage de x_0 .

Vitesse moyenne et instantanée :

- La vitesse moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 correspond au taux de variation de la loi horaire de ce mobile entre les instants t_1 et t_2 .
- La vitesse d'un mobile à un instant t correspond au nombre dérivée en t de la loi horaire de ce mobile en t .

Cours

2.1 Approximation affine

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$, $a \in D_f$. Une fonction g est une approximation affine de f au voisinage de a si g est une fonction affine telle que : ~~$f(x) \approx g(x)$~~ pour tout x proche de a c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Notons $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{On a : } \begin{cases} f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + h.\varepsilon(h) \\ \text{et} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

La relation (1) montre que lorsque h est très proche de 0, $f(a+h)$ est très proche de $f(a) + h.f'(a)$.

On dit que $f(a) + h.f'(a)$ est une **approximation** ou une **valeur approchée** de $f(a+h)$, pour h suffisamment proche de 0.

On note :

$$f(a+h) \approx f(a) + h.f'(a) \text{ pour } h \text{ proche de } 0.$$

De même, en posant $x = a + h$, la relation (1) donne :

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + (x-a).\varepsilon(x) \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

on trouve l'approximation : $f(x) \approx f(a) + (x-a).f'(a)$ pour x proche de a . Ainsi, on déduit la propriété suivante :

Propriété : Soit une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

La fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(a) + (x-a).f'(a)$ est une **approximation affine** de la fonction f au voisinage de a .

Exemples :

Pour tout réel h suffisamment proche de 0, on a :

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1 + 3h \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad ; \quad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h.$$

Qu'est ce qu'une meilleure approximation affine locale ?



~~Généralement, il est possible qu'une fonction f ait plusieurs approximations affines locales autour d'un point a . Cependant,~~ la meilleure approximation affine locale de f autour de a est la fonction affine M_f telle que pour toute approximation affine g de f autour de a , on ait :

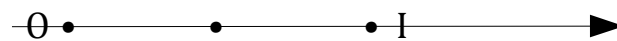
$$|f(x) - M_f(x)| \leq |f(x) - g(x)| \quad \text{pour } x \text{ proche de } a.$$

Remarques :

- La fonction : $x \in \mathbb{R} \mapsto f(a) + (x-a).f'(a)$ est la  **meilleure approximation affine** locale de f au voisinage de a .
- Pour une fonction donnée $f : D_f \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, on ne peut prétendre trouver la meilleure approximation affine locale de f au voisinage de $a \in D_f$ qu'au cas où l'on sait que f est dérivable en a .

2.2 Aspect cinématique

Considérons un mobile se déplaçant sur un axe $(x'x)$ de repère (O, I) .



On suppose que la position du mobile est repérée par une fonction $f: t \mapsto f(t)$ (la loi horaire du mouvement). La variable t désigne le temps. Si f est dérivable en t_0 alors **la vitesse instantanée** V_{t_0} du mobile à l'instant t_0 est le nombre dérivé de f en t_0 c'est-à-dire :

$$V_{t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+t_0) - f(t_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Exercice d'application 2.1

1) Déterminer la meilleure approximation affine de $f(x)$  ~~quand x tend~~
~~vers~~ x_0 , dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2 - 3x - 4$; $x_0 = 0$.

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$; $x_0 = -1$.

2) En considérant le cas a), calculer les valeurs approchées de $f(0,2)$ et $f(1,5)$. Laquelle des deux valeurs approchées est la plus proche de la valeur exacte y correspondant ? Dites pourquoi.

Solution :

1)

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Commençons par calculer $f'(0)$. On a : $f(0) = 4$ et $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x - 3$,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3.$$

Nous savons que la meilleure approximation affine d'une fonction g au voisinage de a est la fonction M_g définie par :

$$M_g(x) = g'(a)(x - a) + g(a).$$

Soit M_f la meilleure approximation affine de f au voisinage de 0, on a :

$$M_{f,0}(x) = f'(0)x + f(0),$$

$$M_{f,0}(x) = -3x + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x-4}$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{4\}$.

Calculons d'abord $f'(-1)$.

$$\text{On a : } f(-1) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad f(x) - f(-1) = \frac{11}{5} \cdot \frac{x+1}{x-4},$$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{x-4},$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\frac{11}{25}.$$

D'où la meilleure approximation affine de f au voisinage de -1 est :

$$M_{f,-1}(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1),$$

$$M_{f,-1}(x) = -\frac{11}{25}x + \frac{9}{25}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) Notons V_1 et V_2 les valeurs approchées de f respectivement en 0,2 et 1,5. On a : $V_1 = M_{f,0}(0,2) = 3,4$ et $V_2 = M_{f,0}(1,5) = -0,5$.

Par ailleurs, $f(0,2) = 3,44$ et $f(1,5) = 1,75$. On voit que V_1 est plus proche de la valeur exacte $f(0,2)$ qu'elle approxime, comparé à V_2 . Cela, s'explique par le fait que 0,2 est plus proche de 0 comparé à 1,5.

Exercices

Exercice 2.1

Un mobile M se déplace sur une droite (D) munie d'un repère $(O ; \vec{i})$.
À chaque instant $t \geq 0$, on repère sa position par son abscisse :

$$x(t) = 6t - 3t^2.$$

- 1) Déterminer la vitesse v_0 de ce mobile à l'instant $t = 0$.
- 2) Décrire le mouvement du mobile sur la droite (D) .
- 3) Quelle est la vitesse du mobile lorsqu'il change de direction ?
- 4) Quelle est la vitesse du mobile lorsqu'il repasse en O ?

Exercice 2.2

On laisse tomber un objet du sommet d'une falaise à l'instant $t = 0$.
On estime qu'à chaque instant, l'altitude (en mètres) de l'objet est donnée par : $a(t) = 100 - 5t^2$.

- 1) Quelle est la hauteur de la falaise ?
- 2) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint le sol ?

Exercice 2.3

Un objet est lancé verticalement vers le haut à l'instant $t = 0$. Pendant la phase ascendante, la hauteur (en mètres) de cet objet à l'instant t est : $h(t) = 1 + 7t - 5t^2$.

- 1) De quelle hauteur lance-t-on cet objet ?
- 2) Déterminer sa vitesse ~~en fonction~~ de t .
- 3) Quelle hauteur maximale atteint-il ?



Exercice 2.4

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $(3+h)^2$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer mentalement des valeurs approchées de $(2,95)^2$ et de $(3,04)^2$.

Exercice 2.5

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $\frac{2}{4+h}$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour calculer des valeurs approchées de : $\frac{2}{3,91}$ et $\frac{2}{4,03}$.

Exercice 2.6

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $(1+h)^3$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer des valeurs approchées de : $(1,02)^3$ et $(0,96)^3$.

Exercice 2.7

- 1) Déterminer la meilleure approximation affine de $\sqrt{4+h}$ lorsque h est proche de 0.
- 2) Utiliser cette approximation pour déterminer des valeurs approchées de : $\sqrt{3,93}$ et $\sqrt{4,06}$.

Exercice 2.8

Soit f une fonction dérivable en tout réel a telle que :

$$f(1) = 2, \quad f'(1) = 3 \quad \text{et} \quad f'(1,2) = 2.$$

- 1) Utiliser la meilleure approximation affine de f au voisinage de 1 pour déterminer une valeur approchée de $f(1,2)$.
- 2) Utiliser la meilleure approximation affine de f au voisinage 1,2 pour déterminer une valeur approchée de $f(1,4)$.

Exercice 2.9

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

- 1) Démontrer que f est dérivable en 1 et en déduire que, lorsque h est proche de 0, on a $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2}$.

- 2) a) Démontrer que, pour $h > -1$, on a :

$$1 + \frac{h}{2} - \sqrt{1+h} = \frac{h^2}{4\sqrt{1+h} + 4 + 2h}.$$

- b) En déduire que, pour h appartenant à $[-0,5; 0,5]$, l'erreur

commise en remplaçant $\sqrt{1+h}$ par $1 + \frac{h}{2}$ est inférieure à $\frac{h^2}{4}$.

- 3) Utiliser ce résultat pour déterminer des valeurs approchées des réels $\sqrt{1,08}$ et $\sqrt{0,94}$ en donnant un majorant de l'erreur sous la forme d'une puissance de 10.

Partie 3 Tangente à une courbe

Activité Préparatoire

AP 3 Équation de la tangente

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.

- 1) Rappelez le domaine de définition D_g de g .
- 2) Soit $a \in D_g$ et h un réel non nul tel que $a+h \in D_g$.
 - Comment appelle-t-on le rapport : $T_a = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$?
 - Calculez $\lim_{h \rightarrow 0} T_a$.
 - Que peut-on conclure.
- 3) Tracer dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_g de g .
- 4) Tracez la droite (T) passant par les points $A(1; -1)$; $B(0; 1)$.
 - En se référant au graphique obtenue, que peut-on dire de (T) par rapport à C_g .
- 5) Calculez $g'(1)$ et $g(1)$. **Indication :** $g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} T_1$.

6) On considère la droite (D) d'équation : $y = g'(1).(x-1) + g(1)$.

- Vérifier que les points A et B appartiennent à (D) .
 - En déduire l'équation de (T) .
-

AP 3 Corrigé

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^2$.

1) On trouve : $D_g = \mathbb{R}$.

2) Soit $a \in D_g$ et h un réel non nul tel que $a+h \in D_g$.

- Le rapport $T_a = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ est appelée taux de variation de g entre a et $a+h$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} T_a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(a+h)^2 + a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2a) = -2a$.
- L'élément a étant quelconque dans D_g , on peut conclure que g est dérivable sur D_g .

3) Étude de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = -x^2.$$

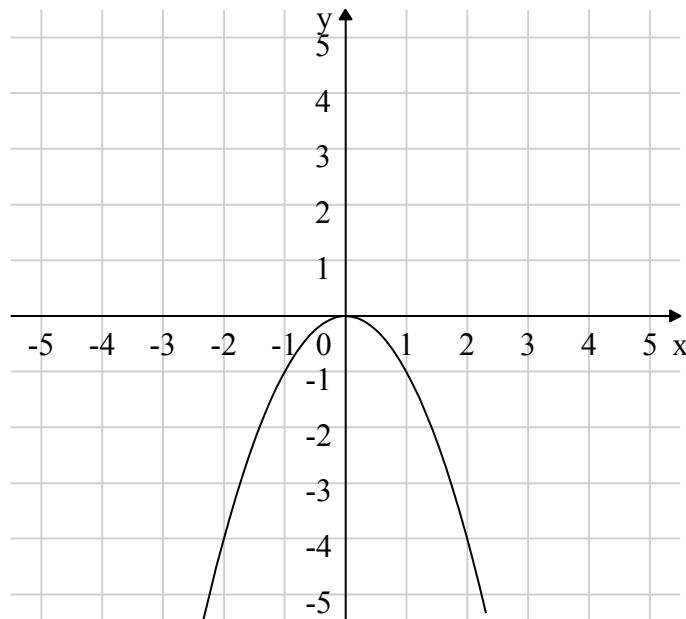
$$g(-x) = g(x) = -x^2, g \text{ est paire.}$$

L'axe (Oy') est un axe de symétrie de C_g . L'intervalle d'étude de g se réduit à $]0; +\infty[$.

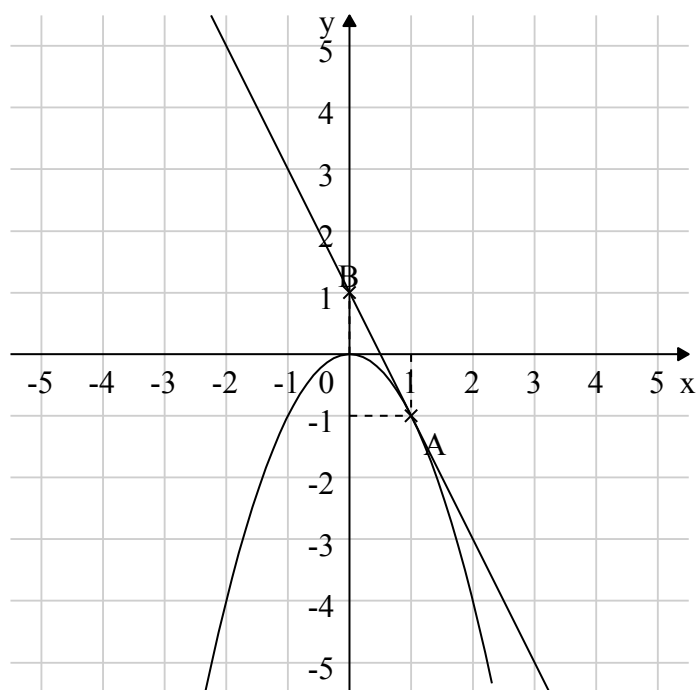
$\forall a, b \in]0; +\infty[$, on a : $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. f est donc décroissante sur $]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy') .

On obtient par symétrie la courbe (C_g) suivante :



4) Traçons la droite (T) .



- En se référant au graphe tracé, on peut dire que la droite (T) est la tangente à C_g au point $A(1; -1)$.

5) On a : $g(1) = -1$ et $g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} T_1 = -2$

$$\text{avec } \lim_{h \rightarrow 0} T_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(1+h)^2 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 2) = -2.$$

6) $(D) : y = g'(1) \cdot (x-1) + g(1).$

$$\text{Soit } (D) : y = -2x + 1.$$

- Il est aisé de vérifier que les points A et B appartiennent à (D) .
- Les droites (D) et (T) passent toutes les deux par les points $A(1; -1)$ et $B(0; 1)$, donc elles sont identiques.

On en déduit que (T) a pour équation :

$$(T) : y = g'(1).(x-1) + g(1).$$

Soit
$$(T) : y = -2x + 1.$$

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire, on retient ceci :

Équation de la tangente à une courbe :

- Lorsqu'une fonction f est dérivable en a c'est-à-dire $f'(a)$ existe et est fini, la tangente à la courbe C_f en a admet une équation de la forme :

$$y = f'(a).(x-1) + f(a) .$$

Cours

3.1 Tangente à une courbe en un point

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I , (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $a \in I$.

Définition 4. En supposant que la fonction f est dérivable en a , la droite (T) passant par $A(a, f(a))$ et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée tangente à la courbe (C_f) au point a .

Remarque :

Supposons que la fonction f est dérivable en a . Alors (C_f) admet au point $A(a, f(a))$ une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Il en découle que l'équation de (T) est de la forme :

$$y = f'(a).x + b \text{ avec } b \in \mathbb{R}.$$

On a : $f(a) = f'(a).a + b$, puisque $A(a, f(a)) \in (T)$.
 $b = f(a) - f'(a).a$.

D'où l'équation de (T) est : $y = f'(a).(x - a) + f(a)$.

On s'aperçoit que la tangente (T) n'est autre que la fonction qui à tout réel x associe $(x-a) \cdot f'(a) + f(a)$. Ainsi, nous avons la propriété suivante.



Propriété. Supposons que f est dérivable en a . La tangente (T) à la courbe (C_f) est la meilleure approximation affine de f au voisinage de a .

Exercice d'application 3.1

Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f représentative de f , au point M_0 d'abscisse x_0 :

a) $f(x) = x^3 - 5x + 4$; $x_0 = -2$.

b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$; $x_0 = 1$.

Solution :

a) $f(x) = x^3 - 5x + 4$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Commençons par déterminer $f'(-2)$.

On a : $f(-2) = 6$ et $f(x) - f(-2) = x^3 - 5x - 2 = (x+2)(x^2 - 2x - 1)$,

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = x^2 - 2x - 1,$$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 7.$$

Ainsi, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -2 est la droite (T_{-2}) d'équation : $f'(-2)(x + 2) + f(-2)$, 

$$\text{soit } (T_{-2}) : 7x + 8. \quad \text{$$

b) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, la fonction f est définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ et dérivable sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$.

Calculons $f'(1)$:

$$\text{On a : } \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{2x - 1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{2x - 1} + 1}{\sqrt{2x - 1} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 1},$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1, \text{ avec } f(1) = 1.$$

L'équation de la tangente (T_1) à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est :

$$(T_1) : x + 1. \quad \text{$$

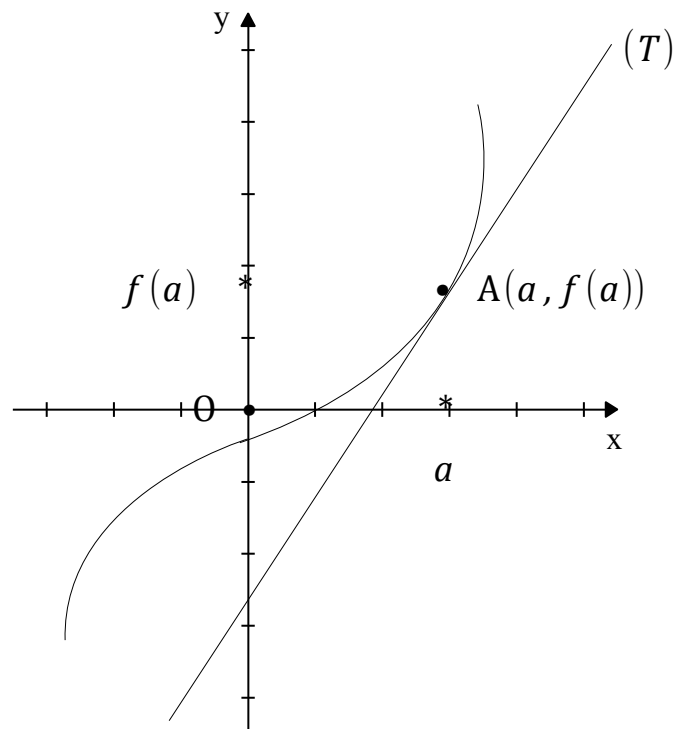
3.2 Interprétation graphique

1^{er} cas : f est dérivable en a

Théorème 2. si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors pour tout $a \in I$, la courbe représentative de f admet au point d'abscisse a une tangente non verticale d'équation :

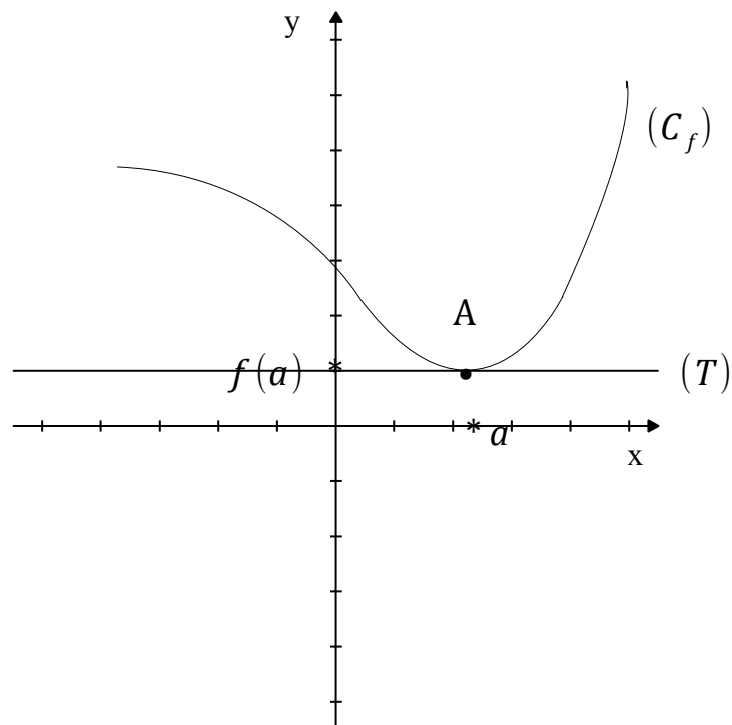
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Illustration :



Cas particulier : Si une fonction f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$ alors sa courbe représentative (C_f) admet une tangente horizontale d'équation : $y = f(a)$.

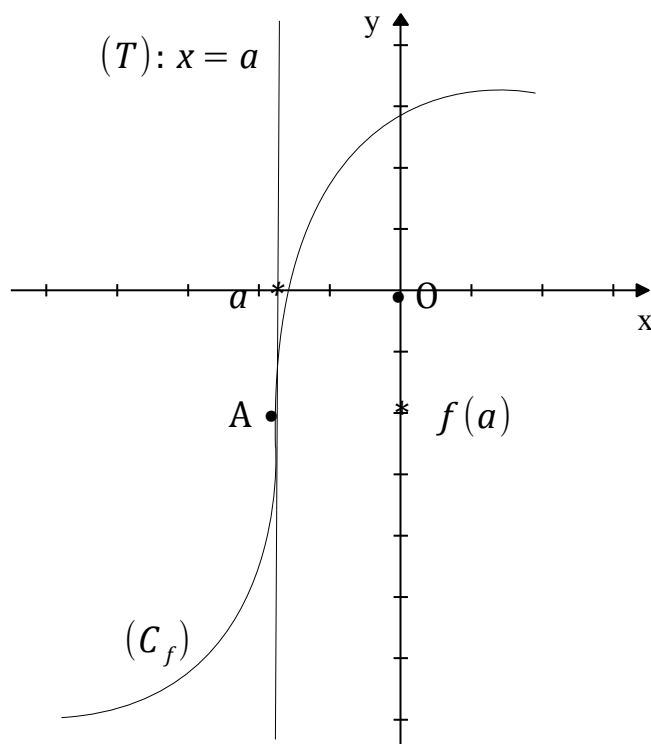
Illustration :



2^{ieme} cas : f n'est pas dérivable en a

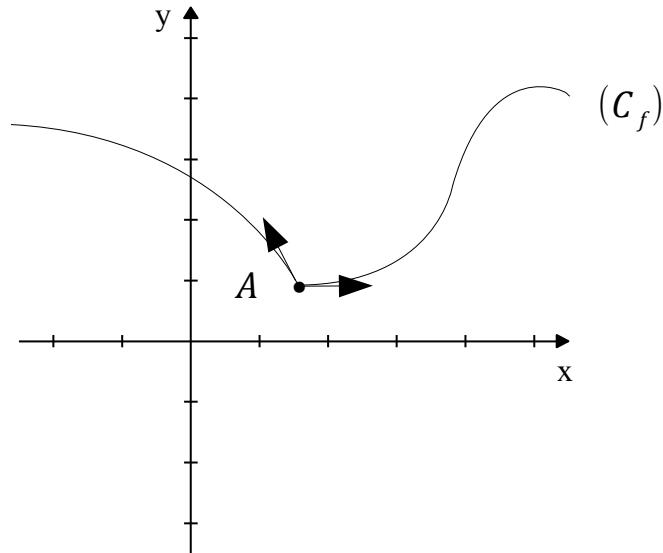
- Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un réel a et n'est pas dérivable en a avec $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \infty$ alors la courbe représentative (C_f) de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente verticale d'équation $x = a$.

Illustration :



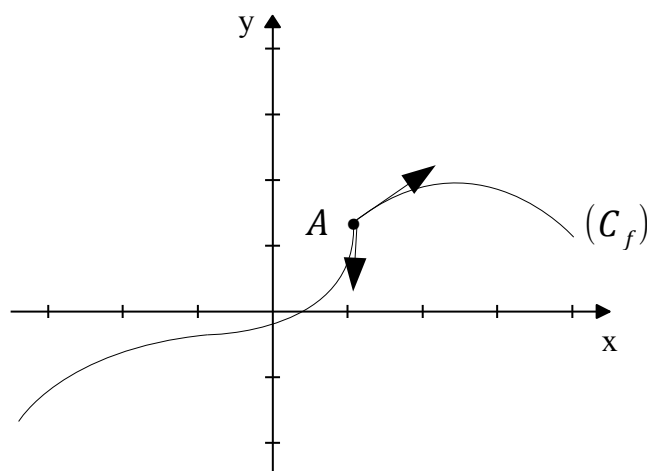
- Si une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = l$ et $f'_d(a) = k$; $(l, k) \in \mathbb{R}^2$; $l \neq k$ alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente, oblique ou horizontale, à gauche en a et une autre, oblique ou horizontale, à droite en a .

Illustration :



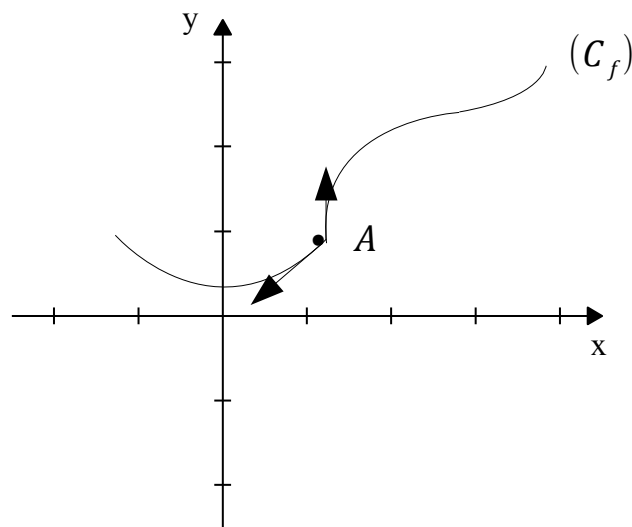
- Si une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = \infty$ et $f'_d(a) = k$; $k \in \mathbb{R}$; alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente verticale à gauche en a et une demi-tangente, oblique ou horizontale, à droite en a .

Illustration :



- Si une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas dérivable en $a \in I$ avec $f'_g(a) = l$ et $f'_d(a) = \infty$; $l \in \mathbb{R}$; alors la courbe représentative (C_f) de f admet au point A d'abscisse a : une demi-tangente, oblique ou horizontale, à gauche en a et une demi-tangente verticale à droite en a .

Illustration :



3.3 Fonction dérivée

Nous proposons ici, une succincte introduction à la notion de fonction dérivée. Un développement plus large de cette notion sera présenté dans la ressource intitulée : Fonction dérivée.

Définition 6. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On appelle fonction dérivée de f sur I , la fonction f' qui à tout élément x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x .

On écrit :

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Notation : Au lieu de f' (notation de Newton), la fonction dérivée peut également être notée par : $\frac{df}{dx}$ (notation de Leibniz). On écrit :

$$\frac{df}{dx} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{df}{dx}(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Exercice d'application 3.2

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ elles sont définies :

a) $f(x) = \frac{1}{x} + x^4.$

b) $f(x) = 3x + \sqrt{2x - 1}.$

Solution :

a) $f(t) = \frac{1}{t} + t^4$, f est définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f(t) - f(x) = -\frac{t-x}{t \cdot x} + (t-x)(t^3 + t^2 \cdot x + t \cdot x^2 + x^3),$$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{1}{t \cdot x} + t^3 + t^2 \cdot x + t \cdot x^2 + x^3,$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{1}{x^2} + 4x^3.$$

La fonction dérivée de f est donc la fonction f' définie par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 4x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

b) $f(t) = 3t + \sqrt{2t-1}$, f est définie sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Soit $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, on a :

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + \sqrt{2t-1} - \sqrt{2x-1},$$

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + (\sqrt{2t-1} - \sqrt{2x-1}) \cdot \frac{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$f(t) - f(x) = 3(t-x) + \frac{2(t-x)}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 3 + \frac{2}{\sqrt{2t-1} + \sqrt{2x-1}},$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

D'où on trouve la fonction dérivée :

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}, \quad \forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[.$$

Exercices

Exercice 3.1

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente à la parabole P d'équation :

$$y = x^2 - 3x, \text{ au point } A(-1; 4).$$

Exercice 3.2

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole H d'équation :

$$y = \frac{3}{x}, \text{ au point } A(3; 1).$$

Exercice 3.3

On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que la tangente à la parabole P d'équation : $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ en

son point d'abscisse 1 coupe l'axe des abscisses au point $B\left(\frac{5}{2} ; 0\right)$.

Exercice 3.4

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

Soit a un réel strictement positif et Δ la tangente à la courbe (C_f) en son point A d'abscisse a .

- 1) Déterminer une équation de Δ .
- 2) La droite Δ coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C .

Que peut-on dire du point A pour le segment $[BC]$?

Exercice 3.5

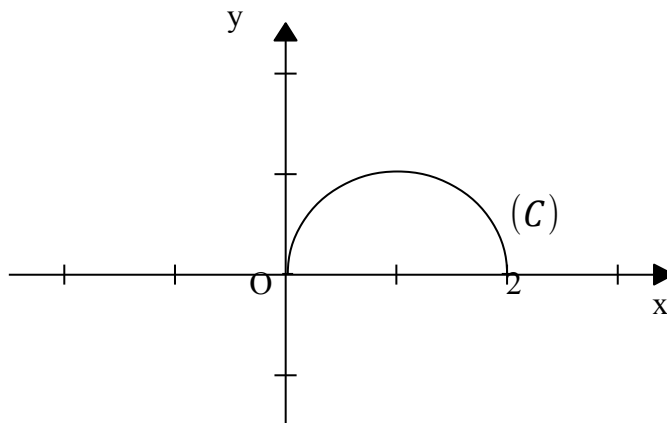
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et P la parabole représentant f dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x ,
 $f'(x) = 2x - 5$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à P au point $E(4 ; 0)$.

- 3) Existe-t-il un point M de P en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x$.
- 4) Soit a un réel. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe P au point A d'abscisse a . En déduire que la courbe P admet deux tangentes passant par l'origine O du repère.

Exercice 3.6

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2]$, dont la courbe représentative (C) est le demi-cercle de la figure ci-dessous :



- 1) Comment voit-on graphiquement que f n'est pas dérivable en 0 ?
- 2) Justifier qu'un point $M(x;y)$ du plan, appartient à (C) si et seulement si :
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de $f(x)$, pour tout x de $[0 ; 2]$.

3) Retrouver le résultat de la question 1) par un calcul.

Exercice 3.7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 5$.

- 1) Pour tout réel a , justifier la dérivabilité de f en a et préciser $f'(a)$.
- 2) Soit m et p deux réels quelconques.
Quelle est la fonction dérivée de la fonction affine $x \mapsto mx + p$ définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

- 1) En utilisant la définition du nombre dérivé de f en a , démontrer que la fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f'(x) = 3x^2$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point $A(1 ; 1)$.

Exercice 3.9

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -0,5x^2 + 2x$.

- 1) Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
- 2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0) = 1$ et pour tout réel t , $f'(t) = 2 - t$.

On considère la fonction $\phi = f - g$.

- a) Démontrer que , pour tout réel a et tout réel non nul h :

$$\frac{\phi(a+h) - \phi(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + a - 2 + 0,5h.$$

- b) Établir que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et justifier que ϕ est une fonction constante.

- c) En déduire que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1.$$

En résumé :

La dérivation donne la clé de trois (3) grands problèmes apparemment non connexes : vitesse instantanée ; tangente ; approximation locale . Comme on peut le constater, la dérivée mesure une variation instantanée, alors que le taux de variation mesure lui, une variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (passage du global au locale c'est-à-dire une dérivée est la limite d'un taux de variation).

Devoir surveillé

Durée : 2 h 30 min

Documents non autorisés

Exercice 1 :

Calculer, en appliquant la définition, **la nombre** dérivé de la fonction f en x_0 . On donne : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$; $x_0 = 2$.

Exercice 2 :

1) Soit la fonction g définie sur $] -\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty [$ par :

$$g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Déterminer une équation de la tangente, au point d'abscisse 2, à la courbe représentative C_g de g .

Préciser les demi-tangentes, aux points d'abscisses 1 et -1, à C_g .

2) Soit la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x^2 + x|$.

Préciser les demi-tangentes, aux points d'abscisses 0 et -1, à la courbe représentative de h .

Exercice 3 :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{(x-1)(|x|+1)} & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$ et $x=1$.

Corrigé : devoir surveillé

Exercice 1 :

Pour $x=2$, on a $f(2) = \sqrt{3}$; donc $f(x) - f(2) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3}$.

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - f(2) &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{3})(\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} \\ f(x) - f(2) &= \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{(x-2)(x+1)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} \\ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2 :

1) On a $g(x) = x + \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - 1$.

La fonction polynôme u est dérivable et strictement positive sur $] -\infty ; -1[$ et $] 1 ; +\infty[$. La fonction g est donc dérivable sur ces intervalles. 

Pour tout $x \in] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty[$, $g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

La tangente T à C_g au point d'abscisse 2 a une équation de la forme $y = g'(2)(x - 2) + g(2)$.

Comme $g(2) = 2 + \sqrt{3}$ et $g'(2) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$, une équation de T

est : $y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}(x - 2) + 2 + \sqrt{3}$.

$$\text{Soit } y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Demi-tangente au point d'abscisse 1 :

Si $x \in] 1 ; +\infty[$, $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} - 1}{x - 1}$.

On a : $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1 + \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x - 1}$

Comme $x - 1 > 0$, on a :

$$x - 1 = \sqrt{(x - 1)^2} \text{ et } \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 1 + \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}},$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty$ donc g n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 1$

mais sa courbe représentative admet en ce point une demi-tangente verticale c'est-à-dire parallèle à l'axe yOy' . 

Demi-tangente au point d'abscisse -1 :

Si $x \in]-\infty ; -1[$, $\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1} + 1}{x + 1}$.

On a : $\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = 1 + \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 1)}}{x + 1}$.

Comme $x + 1 < 0$, on a $x + 1 = -\sqrt{(x + 1)^2}$,

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = 1 - \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}},$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(1)}{x + 1} = -\infty$ donc g n'est pas dérivable à gauche en $x_1 = -1$

mais sa courbe représentative admet en ce point une demi-tangente verticale. 

2) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = |x(x + 1)|$.

- Si $x \in]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$, $h(x) = x^2 + x$.
- Si $x \in [-1 ; 0[$, $h(x) = -x^2 - x$.

- La restriction h_1 de h sur $] -\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty [$ est définie par $h_1(x) = x^2 + x$. La fonction h_1 est dérivable sur $] -\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty [$ car c'est une fonction polynôme et $h'_1(x) = 2x + 1$.

La fonction h est donc dérivable sur $] -\infty ; -1 [\cup] 0 ; +\infty [$, dérivable à gauche en $x = -1$ et dérivable à droite en $x = 0$. On a :

$$h'_g(-1) = h'_1(-1) = -1 \quad \text{et} \quad h'_d(0) = h'_1(0) = 1.$$

- La courbe représentative C_h de h admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente à gauche, d'équation :

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ y = h'_g(-1)(x - (-1)) + h(-1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y = -x - 1 \end{cases}.$$

- La courbe C_h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à droite, d'équation :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y = h'_d(0).x + h(0) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x \end{cases}.$$

- La restriction h_2 de h sur $[-1 ; 0]$ est définie par $h_2(x) = -x^2 - x$.

La fonction h_2 est dérivable sur $[-1 ; 0]$ et $h'_2(x) = -2x - 1$.

La fonction h est donc dérivable sur $] -1 ; 0 [$; elle est dérivable à droite en -1 et dérivable à gauche en 0 . On a :

$$h'_d(-1) = h'_2(-1) = 1 \quad \text{et} \quad h'_g(0) = h'_2(0) = -1.$$

- La courbe C_h admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente à droite, d'équation :

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y = h'_d(-1) \cdot (x - (-1)) + h(-1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ y = x + 1 \end{cases}.$$

- C_h admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche, d'équation :

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y = h'_g(0) \cdot x + h(0) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ y = -x \end{cases}.$$

Exercice 3 :

Commençons par observer que sur $\mathbb{R} - \{1\}$ on a :

$$f(x) = \frac{|x(x-1)|}{(x-1)(|x|+1)},$$

on est conduit à distinguer les trois intervalles :

$$]-\infty ; 0], [0 ; 1[\quad \text{et} \quad]1 ; +\infty[.$$

- Sur $]-\infty ; 0]$, on a $|x(x-1)| = x(x-1)$ et $|x| = -x$, donc :

$$f(x) = f_1(x) = \frac{x}{-x+1}.$$

- Sur $[0 ; 1[$, on a : $|x(x-1)| = -x(x-1)$ et $|x| = x$, donc :

$$f(x) = f_2(x) = -\frac{x}{x+1}.$$

- Sur $]1 ; +\infty[$, on a : $|x(x-1)| = x(x-1)$ et $|x| = x$, donc :

$$f(x) = f_3(x) = \frac{x}{x+1} = -f_2(x).$$

1)

Étude de f au point $x = 0$:

a) Continuité : On a, d'une part $f(0) = 0$, d'autre part,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_2(x) = 0.$$

Finalement on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Par conséquent, la fonction f est continue en 0.

b) Dérivabilité : Tout revient à étudier la limite $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

– Sur $] -\infty ; 0]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f_1(x)}{x} = \frac{1}{-x+1}, \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

– Sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f_2(x)}{x} = -\frac{1}{x+1}, \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

La fonction f n'est donc pas dérivable en $x = 0$, mais elle admet une dérivée à gauche $f'_g(0) = 1$ et une dérivée à droite $f'_d(0) = -1$.

Remarque : On pouvait également observer que :

– Sur $] -\infty ; 0]$, on a :

$$f'(x) = f'_1(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_1(t) - f_1(x)}{t - x} = \frac{1}{(-x+1)^2}, \quad \text{donc} \quad f'_g(0) = 1.$$

– Sur $[0 ; 1]$, on a :

$$f'(x) = f'_2(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_2(t) - f_2(x)}{t - x} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \text{ donc } f'_d(0) = -1.$$

Étude de f au point $x = 1$.

a) Continuité :

On a, d'une part $f(1) = -\frac{1}{2}$, d'autre part

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x) = -\frac{1}{2} = f(1)$$

et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_3(x) = \frac{1}{2} \neq f(1).$$

La fonction f n'est donc pas continue au point $x = 1$; elle est continue à gauche de ce point, mais elle ne l'est pas à droite.

b) Dérivabilité :

La fonction f n'étant pas continue au point $x = 1$, n'est pas dérivable en

ce point ; cependant elle admet une dérivée à gauche $f'_g(1) = f'_2(1) = -\frac{1}{4}$

et une dérivée à droite $f'_d(1) = f'_3(1) = \frac{1}{4}$.

Devoir 1 (à faire la maison)

A rendre au bout d'une semaine

Exercice 1 :

Deux mobiles M_1 et M_2 se déplacent sur un axe $(O, \vec{i})$. Le mouvement de M_1 est donné par l'équation horaire : $x_1(t) = -t^2 + 4t + 1$ et celui de M_2 par $x_2(t) = t^2 - 2t + 1$. Unité de temps : la seconde ; unité de l'espace : le centimètre.

- 1) Construire dans le même repère les diagrammes des espaces, c'est-à-dire les courbes représentatives de :

$$t \mapsto x_1(t) \text{ et } t \mapsto x_2(t).$$

- 2) Construire dans le même repère les diagrammes des vitesses, c'est-à-dire les courbes représentatives de : $t \mapsto x'_1(t)$ et $t \mapsto x'_2(t)$.

- 3) Déterminer graphiquement, puis par le calcul, les instants où les mobiles se rencontrent.

- 4) Déterminer les instants où les mobiles ont :

- la même vitesse ;
- des vitesses opposées.

Exercice 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 + px + q$ et C sa courbe représentative.

- 1) Calculer $f'(x)$. A quelle(s) condition(s) l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle deux racines distinctes $x_1 ; x_2$. Calculer alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
- 2) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $f(x) = 0$ ait trois racines distinctes est que x_1 et x_2 existent avec $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

En déduire que pour que l'équation $f(x) = 0$ ait trois racines distinctes, il faut et il suffit que l'on ait : $4p^3 + 27q^2 < 0$.

- 3) Étudier le cas où l'on a : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Devoir 2 (à faire la maison)

A rendre au bout d'une semaine

Exercice 1 :

On considère l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et le point $H(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$.

- 1) Écrire l'équation d'une droite de coefficient directeur m et passant par H .
- 2) Cette droite coupe la parabole en deux points M_1 et M_2 , d'abscisses x_1 et x_2 . Écrire l'équation admettant x_1 et x_2 pour racines.
- 3) Écrire les équations des tangentes à la parabole aux points M_1 et M_2 .
- 4) Soit T le point d'intersection de ces tangentes. Déterminer les coordonnées du point T en fonction de x_1 et x_2 . En déduire l'ensemble des points T lorsque m varie dans $\mathbb{R}$ et préciser le point où la parallèle menée par T à l'axe des ordonnées coupe le segment $[M_1 ; M_2]$.

Exercice 2 :

L'équation horaire du mouvement d'une pierre que l'on lâche dans un puits est celle du mouvement uniformément varié s'écrivant :

$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{avec} \quad g = 9,8 \text{ m.s}^2.$$

On lâche la pierre à l'instant $t = 0$, à l'ouverture du puits.

- 1) Exprimer, en fonction de la profondeur x du puits, le temps mis par le son pour parcourir la distance x sachant qu'il parcourt 343 mètres par seconde.
- 2) $\frac{74}{35}$ s après avoir lâché la pierre, on perçoit le bruit de son entrée dans l'eau. Calculer la profondeur du puits et la vitesse de la pierre au moment où elle atteint l'eau.

Bibliographie

- [1] Mathématiques Déclic, 1^{re} S, Réservé aux enseignants ;
J.P BELTRAMONE, V. BRUN ; Hachette-Éducation, 2007.
ISBN : 978-2-01-135444-0

- [2] Mathématiques Fractale , Terminale S ;
H. CARNEC, G. HAYE , M. NOUET ; BORDAS, 1994.
ISBN : 2-04-020978-6

- [3] Maths Obligatoire et Spécialité, Exos résolus, Term S ;
C. RENARD, G. ROCHE ; Hachette-Éducation, 2005.
ISBN : 2.01.169109.5