

Projet PRENUM-AC

Année 2012

Espaces Vectoriels

Production :

Concepteur :

Francioli Clostone MAHOUNGOU Étudiant à l'école Normale Supérieure de
l'Université Marien Ngouabi, Congo-Brazzaville.

Sous la direction de :

Antoine OUASSISSOU FILAKEMBO Enseignant à l'Ecole Normale Supérieure
de Brazzaville.

Et de

Lazare NKOUMBOU, Enseignant au Lycée Chaminade de Brazzaville

Table des matières

Introduction	1
Objectifs	1
Pré-requis	1
Schéma Pédagogique	1
1.Espaces vectoriels, sous-espaces	3
1.1 Combinaison Linéaire	9
1.2 Sous-espaces vectoriels	9
1.3 Famille Génératrice	11
1.4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie	12
2 .Base et Dimension d'un espace vectoriel	14
2.1 Base	14
2.2 Dimension	14
2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel	15
2.5 Rang d'un système de vecteurs	16
3. Somme de sous-espaces vectoriels	18
3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels	18
3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels	18
3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires	20
Pourquoi faire des exercices ?	22
4. Exercices d'applications	23
5. Devoir sur table	25
6. Devoirs maison	29
7. Exercices d'approfondissement	31
Bibliographie	35

Introduction

Objectifs

L'objectif de cette leçon est d'acquérir les différentes notions liées aux espaces vectoriels et à leurs éléments qui sont des vecteurs.

Ce que doit appréhender l'apprenant

A l'issue de ce cours, l'apprenant devra être capable d'assimiler les notions de base sur les espaces vectoriels :

- structure et sous-structure.
- Familles de vecteurs libres, liées, bases, rang .
- Dimension.

Mots-clés :

Structure d'espace vectoriel, Combinaison Linéaire, Sous-espace vectoriel, Famille génératrice, Famille libre, Famille liée.

Pré-requis

Pour aborder ce cours, l'apprenant doit posséder les notions de base sur :

- Les ensembles.
- Les lois internes sur un ensemble.

Schéma Pédagogique

Pédagogie : Cours/ exercices, autoévaluation.

Activité induite : S'auto-former, s'évaluer.

Niveau : Enseignement Secondaire.

Public cible : Apprenant et Enseignant.

Langue de L'apprenant : Français.

Proposition d'utilisation

Ce cours servira de pré-requis pour :

- Les applications linéaires
- Les systèmes linéaires
- La géométrie vectorielle

Technique

Date de publication :

Type de contenu : [text](#), [ressource interactive](#).

Format : [PDF](#)

Relation : [cette ressource fait partie du cours de Mathématiques de Terminale D et C](#)

Type de ressource : [Pédagogique](#)

[Durée : 7 heures](#)

Place dans le programme

Pour aborder ce cours, on devra faire préalablement les cours suivants : les nombres complexes, les polynômes.

1.Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

Temps prévu pour cette première partie 2 heures.

Activités préparatoires

Activité 1

Considérons deux points distincts dans un plan. Alors la droite qui les relie définit une **direction**, et une flèche sur cette droite définit un **sens**.

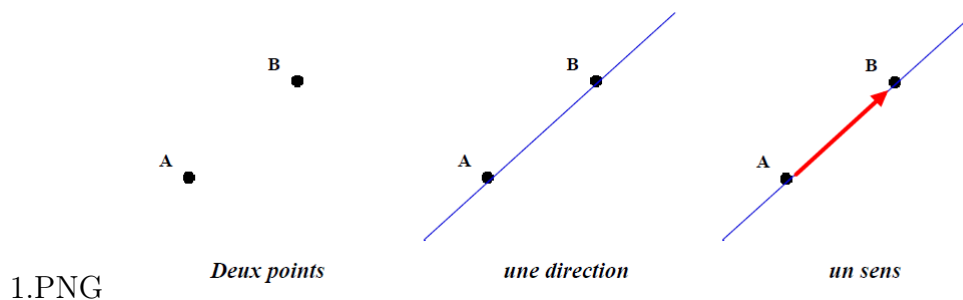


FIGURE 1 –

Deux points avec une direction, un sens et une longueur définissent un **vecteur** du plan noté $\vec{AB}$.

Donc sur deux vecteurs de même origine, on peut définir deux opérations (cohérente avec ce qui est fait en physique sur la notion de **force**).

- **L'addition** : règle du parallélogramme.
- **Le produit d'un vecteur par un nombre**. On obtient un vecteur de même direction et de "longueur" multipliée par $|k|$.
 - Si $k > 0$, alors on a un vecteur de même sens
 - Si $k < 0$, alors on a un vecteur de sens contraire.

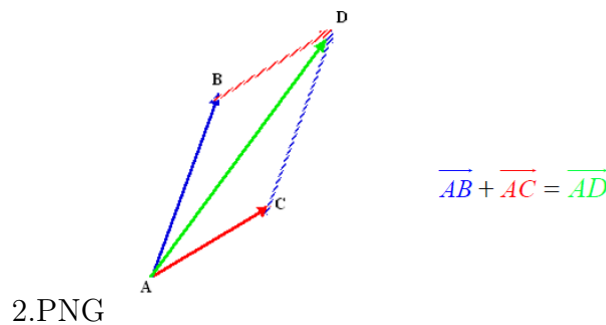


FIGURE 2 –

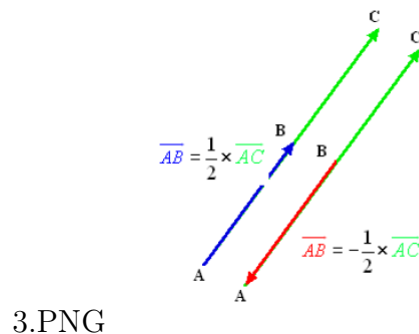


FIGURE 3 –

Activité 2

L'expression $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, dont les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ appartiennent à $\mathbb{R}$, est un **polynôme** de degré $\leq n$. On peut comme précédemment définir deux opérations sur les polynômes :

- **L'addition**

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ et $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$.

Alors

$$(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

On obtient encore un polynôme $P + Q$ qui est également de degré $\leq n$.

- **La multiplication**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Alors la multiplication de λ par le polynôme P donne :

Pour

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

on a

$$(\lambda.P)(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \dots + (\lambda a_n)x^n$$

Nous obtenons également un polynôme λP de degré $\leq n$.

Observation

Nous constatons que les ensembles suivants : l'ensemble des vecteurs, l'ensemble de polynôme de degré $\leq n$ et bien d'autres encore, pourtant très différents les uns des autres, se ressemblent en fait au travers deux opérations : **l'addition** (+) et **la multiplication par un réel** ($\times$).

Pour éviter de répéter les caractéristiques et propriétés de ces ensembles, il existe un "modèle" qui vérifie un nombre minimum de propriétés ou axiomes. Ce "modèle" est appelé **Espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

Historiquement c'est à [Peano](#) que revient le mérite, d'avoir défini de façon axiomatique le concept espace vectoriel sur un corps de **scalaires**. Le terme **scalaires** (du latin scalaris = escalier, échelle) est utilisé au sens **numérique**.

Définition 1.1

Soit E un ensemble muni de deux opérations : une **addition**

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (u, v) &\longmapsto u + v \end{aligned}$$

et une **multiplication**

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, u) &\longmapsto \lambda u. \end{aligned}$$

On dit que E , muni de ces deux opérations, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si pour tout $u, v, w \in E$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

- Addition :
 1. $\forall (u, v, w) \in E \times E \times E, \quad u + (v + w) = (u + v) + w$ (Associativité)
 2. $\exists ! e \in E, \forall u \in E, \quad u + e = e + u = u$ (e est noté Élément neutre pour l'addition)
 3. $\forall u \in E, \exists v \in E, \quad u + v = v + u = e$ (v est le symétrique de u sur E)
 4. $\forall (u, w) \in E \times E, u + w = w + u$ (Commutativité)Ces propriétés font de $(E, +)$ un groupe commutatif.
- Multiplication :
 5. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall v \in E; \quad \lambda(\mu v) = (\lambda \mu)v$ (Associativité)
 6. $\forall v \in E, \quad 1v = v$ (1 est Élément neutre pour la multiplication par un réel)
 7. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall v \in E, \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
 8. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (v, w) \in E \times E, \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des nombres réels, et les éléments de E sont appelés vecteurs.

Propriétés d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u \in E$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$P_3 : \lambda.u = O_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = O_E$$

$$P_4 : -(\lambda.u) = (-\lambda).u = \lambda(-u) \quad \text{où le symbole } - \text{ indique l'addition}$$

Exemple 1.1

1. L'ensemble des vecteurs du plan muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels.
3. l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et dérivable d'ordre n est un espace vectoriel
4. l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel.
5. L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel.

Exemple 1.2**Pour quoi cet exemple ?**

Nous avons fait le choix de cet exemple car il permet à l'enseignant de faire fonctionner les différents axiomes donnés dans la définition de l'espace vectoriel et il permet aussi à l'apprenant de voir comment s'applique ces axiomes dans la pratique.

Montrons que $\mathbb{R}^2$ muni des lois internes $+$ et externes $\times$ telles que :

$$\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \end{cases}$$

Méthode

- Montrons que la loi $+$ est **commutative** sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $u(x, y)$ et $v(x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit ici de montrer que $u + v = v + u$.

$$\begin{cases} u + v = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (x' + x, y' + y) \\ u + v = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y) = v + u \end{cases}$$

Donc

$$u + v = v + u$$

D'où la loi $+$ est commutative sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrons que la loi $+$ est **Associative** sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $u(x, y)$, $v(x', y')$ et $w(x'', y'')$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit de montrer que $(u + v) + w = u + (v + w)$.

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= [(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') \\ &= [(x + x', y + y')] + (x'', y'') \\ &= (x + x', y + y') + (x'', y'') \\ &= (x + x' + x'', y + y' + y'') \\ &= [(x, y) + (x' + x'', y' + y'')] \\ &= (x, y) + [(x' + x'', y' + y'')] \\ &= (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] \\ (u + v) + w &= u + (v + w) \end{aligned}$$

Donc la loi $+$ est Associative sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrons que la loi $+$ admet un **élément neutre** sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $e(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$.

Il s'agit de montrer que $u + e = e + u = u$.

$$\begin{aligned} u + e &= (x, y) + (e_1, e_2) \\ &= (x + e_1, y + e_2) = (x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + e_1 = x \\ y + e_2 = y \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e + u &= (e_1, e_2) + (x, y) = (x, y) \\ &= (e_1 + x, e_2 + y) = (x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e_1 + x = x \\ e_2 + y = y \end{cases} \implies \begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 0 \end{cases}$$

D'où $e(0, 0)$ est l'élément neutre de la loi $+$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Montrons que tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique pour la loi $+$.

Il s'agit de montrer que pour $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $u'(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $u + u' = u' + u = (0, 0)$.

$$\begin{aligned} u + u' &= (x, y) + (x', y') = (0, 0) \\ &= (x + x', y + y') = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u' + u &= (x', y') + (x, y) = (0, 0) \\ &= (x' + x, y' + y) = (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' + x = 0 \\ y' + y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

On a $u + u' = u' + u = (0, 0)$.

Donc tout élément $u(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique $u'(-x, -y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(x, y), v(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.

$$\begin{aligned} \lambda.(u + v) &= \lambda.[(x, y) + (x', y')] = \lambda.[(x + x', y + y')] \\ &= \lambda.(x + x', y + y') = (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') \\ &= (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') = \lambda.(x, y) + \lambda.(x', y') \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$.

- Montrons pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\lambda(\mu.u) = (\lambda\mu).u$.

$$\begin{aligned} \lambda(\mu.u) &= \lambda[\mu(x, y)] = \lambda[(\mu x, \mu y)] = \lambda.(\mu x, \mu y) \\ &= (\lambda\mu x, \lambda\mu y) = ((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) \\ \lambda(\mu.u) &= (\lambda\mu).u \end{aligned}$$

- Montrons que pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu).u &= (\lambda + \mu).(x, y) = [(\lambda + \mu).x, (\lambda + \mu).y] \\ &= [(\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y)] = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y) \\ &= (\lambda x, \lambda y) + (\mu x, \mu y) = \lambda(x, y) + \mu(x, y) \\ (\lambda + \mu).u &= \lambda.u + \mu.u \end{aligned}$$

- Montrons que pour $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $1.u = u.1 = u$.

$$\begin{aligned} 1.u &= 1.(x, y) = (1.x, 1.y) = (x, y) = u \\ 1.u &= u \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u.1 &= (x, y).1 = (x.1, y.1) = (x, y) \\ u.1 &= u \end{aligned}$$

Donc $1.u = u.1 = u$

Ainsi 1 est l'élément neutre pour la loi multiplicative $\times$.

Les huit axiomes étant vérifiés, alors l'espace $\mathbb{R}^2$ muni des lois $+$ et $\times$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Analyse à Priori.

Dans cet exemple, l'apprenant aura tendance à négliger le dernier axiome qui pour lui n'a pas trop d'intérêt du fait que pour lui $1u = u$.

L'exemple suivant éclaircit cet axiome.

Exemple 1.3

Pour quoi cet exemple ?

Cet exemple montre l'intérêt de l'axiome $1.u = u.1 = u$ que l'apprenant sera tenté de négliger et c'est donc l'occasion pour l'enseignant de le faire fonctionner.

Vérifions si l'espace $\mathbb{R}^2$ muni des lois $+$ et $\cdot$ défini par :

$$\begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \lambda.(x, y) = (0, \lambda y) \cdot \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que pour $u(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$1.u = 1.(x, y) = (1.x, 1.y) = (x, y) \neq (0, y).$$

On conclut que l'espace $\mathbb{R}^2$ muni des lois $+$ et $\cdot$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1

Dans la définition de l'espace vectoriel, il suffit qu'une condition ne soit pas vérifiée pour que ce ne soit pas un espace vectoriel.

Exemple 1.4

Tout plan passant par l'origine est un espace vectoriel (par rapport aux opérations habituelles l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel).

Le plan est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0$$

où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Notons E ce plan. Soient (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) deux éléments de E .

Autrement dit,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = 0$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$$

Alors $(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1)$ est aussi dans E car on a

$$a(x_0 + x_1) + b(y_0 + y_1) + c(z_0 + z_1) = 0$$

Les autres propriétés sont faciles à vérifier.

Remarque 1.2

Nous avons parlé en introduction des vecteurs du plan. Nous venons de voir que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel, alors nous allons établir un lien que l'on peut faire entre les vecteurs du plan et les éléments de $\mathbb{R}^2$.

Si on munit le plan d'un repère (on parle alors de plan affine), alors chaque point est repéré par des coordonnées. Si O est l'origine du repère, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique point M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

Ainsi, la notation $\vec{u} = (x, y)$ qui sera largement utilisée dans la suite de cette ressource, signifie que x et y sont les coordonnées de l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ dans le plan affine. On appelle x l'abscisse et y l'ordonnée.

En conséquence, si (a, b) et (c, d) sont les coordonnées des extrémités des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} + \vec{v}$ aura pour coordonnées $(a + c, b + d)$. De même, les coordonnées de l'extrémité du vecteur $k \cdot \vec{u}$, $k \in \mathbb{R}$, seront (ka, kb) .

1.1 Combinaison Linéaire

Soient u et v deux éléments de E , appelés **vecteurs** et soient α et β deux éléments de $\mathbb{R}$ appelés **scalaires** : le vecteur $\alpha u + \beta v$ s'appelle une combinaison linéaire des vecteurs u et v .

Définition 1.2

Soient $u_1, \dots, u_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E . On appelle combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$ tout vecteur s'écrivant :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels ou des **scalaires** c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{R}$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Dans toute la suite l'ensemble E désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

La notion de sous-espace vectoriel est un outil fort et très pratique pour montrer qu'un sous ensemble non vide ou une partie de E est un espace vectoriel.

Définition 1.2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est lui même un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire définie sur E .

Observons que tout sous-espace vectoriel F de E contient au moins le vecteur nul $0_E \in F$ d'où $F \neq \emptyset$. La notion prend tout son intérêt grâce au théorème suivant.

Théorème 0.1 Soit E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble de E .

F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- F est non vide : $F \neq \emptyset$
- Si $v, w \in F$, alors $v + w \in F$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in F$, alors $\lambda v \in F$

Remarque 1.2

- ▷ Un sous-espace vectoriel est lui même un espace vectoriel.
- ▷ Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $0_E \in F$.
En effet, $F \neq \emptyset$, donc $\exists x \in F$.
D'après le troisième point du théorème, $-x \in F$ car $-x = (-1) \cdot x$.
D'après le deuxième point du théorème, $x + (-x) \in F$, soit $0 \in F$.

Corollaire 1.1

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). Si F vérifie les propriétés (i) et (ii) suivantes, alors F est un sous-espace vectoriel de E :

- (i) F est non vide ;
- (ii) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$.

Exemple 1.4

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. On pose F l'ensemble des fonctions de E qui s'annulent en 1.

F est un sous-espace vectoriel de E :

- $0_E \in F$ (car la fonction nulle sur $[0, 2]$ est nulle en 1)
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, f, g \in F$ on a $(\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = 0$, donc $\lambda f + \mu g$ est nulle en 1 c'est-à-dire $\lambda f + \mu g \in F$

D'où F est bien un sous-espace vectoriel de E .

Théorème 0.2 Tout sous-espace vectoriel de E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Retenons que " **$\mathbb{R}$ -espace vectoriel**" veut dire **espace vectoriel sur $\mathbb{R}$** .

Exemple 1.5

Cet exemple montre le fonctionnement du théorème et le déroulement de la méthode pour montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous espace vectoriel. On commence par montrer que l'élément neutre de l'espace vectoriel est aussi celui du sous-ensemble, donc il est non vide ensuite on montre que la somme de deux éléments du sous-ensemble est un élément du sous-ensemble et enfin la multiplication d'un élément du sous-ensemble par un réel est dans le sous-ensemble. Ceci étant, on conclut que ce sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel considéré.

Montrons que $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$$(1, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \implies \mathbb{R} \times \{0\} \neq \emptyset$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $u(x, 0), v(x', 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$

$$\begin{aligned} u + v &= (x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ \lambda u &= \lambda(x, 0) = (\lambda x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{R} \times \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.1

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E . La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel en général (pensez à deux droites distinctes).

1.3 Famille Génératrice

Soit F un sous espace vectoriel de E et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de F tels que l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs soit égal à F , on dira alors que $u_1, \dots, u_n$ engendre F ou est **génératrice** de F ou encore F est **engendré** par cette famille.

Théorème 0.3 Soit U un espace vectoriel.

Les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_n$ forment une famille génératrice de U si et seulement si $\forall u \in U, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$.

Exemple 1.6

Montrons que les vecteurs $u(1, 2)$ et $v(-3, 5)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.7

Soit $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$.

$\mathbb{R}^3 = \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Donc $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ forment une famille génératrice du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.3

Soient $u_1, u_2, \dots, u_n$ une famille des vecteurs de F et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}$, on dit que la famille des vecteurs est libre si et seulement

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0 \text{ implique } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Proposition 1.1

Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :

i) Toute combinaison linéaire de $(V_1, \dots, V_n)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i$.

ii) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i = 0 \Rightarrow \forall i \lambda_i = 0$.

Une telle famille est dite libre.

Une famille de n vecteurs qui n'est pas libre est dite liée. Il existe alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i = 0_E$.

1.4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Une troisième façon de définir un espace vectoriel est de le définir comme sous-espace engendré par une partie.

Soit $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ une partie constituée de vecteurs libres d'un espace vectoriel E . Considérons F l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$. On montre que

i) F est un sous-espace vectoriel de E .

ii) Si G est un sous-espace vectoriel de E contenant X , alors F est inclus dans G . F est donc le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X .

On dit que F est engendré par X ou que X est un système générateur de F ou une partie génératrice de F . Si $F = E$, on parle alors simplement de partie génératrice.

Partie de l'apprenant

Cette partie permet à l'apprenant de faire une synthèse sur la première partie du cours en se posant un type de questions qui lui permettra de mieux assoir toutes les notions définies. En outre, l'apprenant trouvera dans cette partie des méthodes et des mnémotechniques lui permettant de mieux aborder les problèmes liés aux espaces vectoriels.

L'apprenant devra connaître le nombre d'axiomes que compte la définition d'un espace vectoriel. En effet, ceci est le point de départ sur cette notion d'espace vectoriel.

L'apprenant est amené à connaître les espaces vectoriels usuels, car on définit toujours un espace vectoriel par rapport à un autre connu. Par exemple le plan vectoriel et l'espace des vecteurs de l'espace sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Méthode pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Il est souvent plus facile de montrer qu'un ensemble muni de lois interne (+) et externe ($\times$) par un scalaire est un espace vectoriel en montrant qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu plutôt que de démontrer directement que c'est un espace vectoriel.

La notion de **combinaison linéaire** étant indispensable pour la suite, l'apprenant devra savoir la manipuler et savoir quand est ce que le système ou une famille de vecteurs est dite liée ou libre, donc connaître la **dépendance** et l'**indépendance linéaire**.

Méthode sous forme d'un ensemble de vecteurs

Les parties de $\mathbb{R}^n$ définies par un système d'équations linéaires peuvent être mises sous forme d'un ensemble de vecteurs. C'est une manière efficace de montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels.

Exemple

$$\begin{aligned}\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\} &= \{(x, y, x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

2 . Base et Dimension d'un espace vectoriel

Temps prévu pour cette deuxième partie 1 heure 30 min

2.1 Base

Définition 2.1

Une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E est une **base** de E si :

- (1) Les vecteurs $\vec{u}_i, i = 1, \dots, n$, sont linéairement indépendants c'est-à-dire la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre
- (2) Les vecteurs $\vec{u}_i, i = 1, \dots, n$, engendrent E c'est-à-dire la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E .

Théorème 0.4 Une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est une **base** de l'espace vectoriel E si tout $\vec{v} \in E$ peut s'écrire de manière **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_i$.

2.2 Dimension

Un espace vectoriel E est dit de **dimension** n , et on écrit $\dim E = n$, si E admet une base de n vecteurs.

Théorème 0.5 Soit E un espace vectoriel de dimension n . Alors toute base de E a le même nombre d'éléments.

Remarque 2.1

L'espace vectoriel $\{0\}$ est défini par sa dimension.

Théorème 0.6 Dans un espace vectoriel E de dimension n , il existe toujours des bases.

Proposition 2.1

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E , alors pour tout $\vec{v}$ il existe de manière unique

$$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

tel que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$$

Les réels $(a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées (composantes) de $\vec{v}$ relativement à la base $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Retenons

L'existence de la décomposition pour tout $\vec{v} \in E$ vient du fait que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice ; l'unicité de la décomposition du fait que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.

Exemple 2.1

1. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ avec $\vec{u}_1 = (1, 2)$ et $\vec{u}_2 = (-1, 0)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

Retenons

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ défini dans l'exemple 2.1 ci-dessus forment une base de $\mathbb{R}^3$, appelée base **canonique**.

Corollaire 2.1

Dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension n :

- ▷ Toute famille de plus de n éléments est liée.
- ▷ Toute famille de moins de n éléments ne peut être génératrice de E .
- ▷ Toute famille libre de n éléments forme une base de E .
- ▷ Toute famille génératrice de n éléments forme une base de E .

2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vecteur d'un espace vectoriel E de dimension n . Alors

$$\dim F \leq \dim E$$

Si

$$\dim F = \dim E$$

alors

$$F = E$$

Proposition 2.1

Tout sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n est lui-même de dimension $\leq n$ et

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

En particulier, si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Exemple 2.2

Considérons dans $\mathbb{R}^4$ la famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ avec $\vec{v}_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (3, 5, 0, -1)$.

Soit F le sous-espace engendré par ces trois vecteurs :

- Ces trois vecteurs sont liés car $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Ainsi $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
Posons $\mathcal{F}' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Il est clair que la famille $\mathcal{F}'$ est libre.
Elle est aussi génératrice de F . C'est donc une base de F .
- On a donc : $\dim(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F}') = 2$.

Propriétés

Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Alors la dimension de F ne peut être qu'égale à 0, 1, 2 ou 3.

- ★ Si $\dim(F) = 0$, alors F est réduit à l'origine
- ★ Si $\dim(F) = 1$, alors F est une droite issue de l'origine.
- ★ Si $\dim(F) = 2$, alors F est un plan passant par l'origine.
- ★ Si $\dim(F) = 3$, alors F est égal à $\mathbb{R}^3$ tout entier.

2.4 Rang d'un système de vecteurs**Définition 2.2**

On appelle rang d'un système de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système. C'est donc le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire du système.

Définition(Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E . On appelle Rang de $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace de E engendré par $\mathcal{F}$.

$$rg(\mathcal{F}) = \dim(\text{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n))$$

.

Place de l'apprenant

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Que peut-on dire d'une famille libre de E ?

Réponse attendue de l'apprenant

- ▷ Toute famille libre est de **cardinal** inférieur ou égal à la dimension de E
- ▷ Une famille libre de **n** vecteurs est une **base** de E

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

Que peut-on dire d'une famille génératrice de E ?

Réponse attendue de l'apprenant

- Toute famille génératrice contient au moins **n** vecteurs
- une famille génératrice de n vecteurs est une **base**

3. Somme de sous-espaces vectoriels

Temps prévu pour cette dernière partie 1 heure 30 min

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

La **somme de F et G** , qui s'écrit $F + G$, est l'ensemble constitué de toutes les sommes $u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$. Ainsi $F + G = \{u + v / u \in F, v \in G\}$

Exemple 3.1

Considérons deux sous-espaces vectoriels F et G de E , on a :

- $0 = 0 + 0 \in F + G$ car $0 \in F$ et $0 \in G$;
- si $u_1 + v_1$ et $u_2 + v_2$ appartiennent à $F + G$, avec $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$, alors

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in F + G$$

- En fin, pour tout scalaire $k \in \mathbb{R}$, on a :

$$k(u_1 + v_1) = ku_1 + kv_1 \in F + G$$

Ceci nous permet de dire :

Théorème 0.7 *La somme de deux sous-espaces de E est aussi un sous-espace vectoriel de E .*

Théorème 0.8 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un sous-espace vectoriel E dimension n . Alors :*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Exemple 3.2

Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soient $F = \{x, y, z\} / z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) / x = 0\}$
Donner la dimension de $F \cap G$.

3.2 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.2

L'espace vectoriel E est dit **somme directe** des sous-espaces vectoriels F et G ; et on note $E = F \oplus G$, si chaque vecteur $w \in E$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $w = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$

Théorème 0.9 *L'espace vectoriel E est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels F et G si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

Proposition 3.1

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . La somme de F et G est dite directe si et seulement si $\forall \vec{w} \in F + G$, il existe un unique couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in F \times G$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Exemple 3.4

La seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est l'application nulle. En d'autres termes,

$$F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}\}$$

où F désigne l'ensemble des applications paires et G l'ensemble des applications impaires. La somme des deux sous-espaces F et G est donc directe. On la note alors $F \oplus G$, or $E = F + G$. On peut alors écrire que $E = F \oplus G$.

Corollaire 3.1

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Si on a à la fois

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

et

$$F \cap G = \{\vec{0}_E\}$$

alors

$$E = F \oplus G$$

.

Exemple 3.5

Considérons dans $E = \mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces vectoriels suivants :

- La droite vectorielle $F = \alpha \vec{u}$, ce qui suppose $\vec{u} \neq \vec{0}_E$
- Le plan vectoriel $G = \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$, ce qui suppose $\vec{v}$ et $\vec{w}$ libres entre eux.

Si $\vec{u} \notin \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$, alors $F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

De plus, $\dim_{\mathbb{R}}(F) + \dim_{\mathbb{R}}(G) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

D'où $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Remarque 3.1

- L'intersection de sous-espaces F et G d'un même espace E n'est jamais vide : elle contient au moins le vecteur nul.

$$\vec{0}_E \in F \cap G$$

- Considérons les deux sous-espaces F_1 et F_2 de l'espace produit $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$F_1 = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$F_2 = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Alors l'ensemble $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ puisque $(1, 0) \in F_1$ et $(0, 1) \in F_2$ et en fin

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin F_1 \cup F_2$$

3.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3.3

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . F et G sont dit **supplémentaires** dans E lorsque leur somme est directe et égale à E : $F \oplus G = E$.

Théorème 0.10 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E , alors F et G sont dits supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.*

Partie de l'apprenant

Nous abordons cette dernière partie du cours par une remarque importante que l'apprenant devra connaître.

Il ne faut pas confondre $F + G$ qui est un sous-espace vectoriel et $F \cup G$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel en général. Prendre par exemple F et G deux droites vectorielles distinctes de l'espace.

Une technique utile pour la notion de somme d'espace vectoriel.

Méthode : Prouver que deux sous-espaces sont en somme directe

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G sont en somme directe, on utilise généralement la première caractérisation : on se donne $z \in F \cap G$ et on montre que $z = 0_E$. Ceci montre que $F \cap G \subset 0_E$. Il n'est pas nécessaire de montrer l'inclusion réciproque car $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de E , il contient toujours 0_E .

Exemple

Dans l'espace, deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe. Un plan vectoriel et une droite vectorielle non incluse dans ce plan sont en somme directe. Deux plans vectoriels ne sont jamais en somme directe.

Méthode : Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E , on utilise généralement la première caractérisation. Il est souvent facile de montrer que F et G sont en somme directe i.e. $F \cap G = \{0_E\}$ (voir méthode précédente).

Pour prouver que $F + G = E$, on procède très souvent par analyse/synthèse. On veut prouver que tout vecteur de E se décompose donc comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . On procède alors comme suit.

- On se donne donc un vecteur x de E : $\ll \text{Soit } x \in E \gg$.
- On suppose que x s'écrit sous la forme $y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.
- On en déduit en raisonnant par condition nécessaire la forme de y et z en fonction de x (c'est la phase d'analyse).
- On vérifie que le y et le z trouvés conviennent (c'est la phase de synthèse et c'est la seule devant figurer sur votre copie).

Pourquoi faire des exercices ?

Chacun connaît qu'en **Sport**, l'entraînement est indispensable car certains exercices développent l'endurance, d'autres la musculation et la synchronisation des mouvements etc.

De même, en Science notamment en **Mathématiques**, l'entraînement est indispensable. Certains exercices développent le **raisonnement**, d'autres la **mémorisation**, d'autres encore l'aptitude à **calculer**, à **analyser**, à **synthétiser**, à **schématiser**, à **s'organiser** etc.

C'est justement dans cette optique que nous proposons cette partie d'entraînement et d'autoévaluation chez l'apprenant qui devra en faire bon usage.

En guise de motivation, l'apprenant devra retenir ceci **Vouloir c'est pouvoir**.

4. Exercices d'applications

Cette partie a pour objectif de donner chez l'apprenant la possibilité de réviser toute les notions abordées au cours.

Exercice 1 :

Soit $G = \{(x + 2y; x - y; 3x + y), x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- 1) Démontrer que G muni des opérations $+$ et $\times$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2) Déterminer une base de G et sa dimension.

Exercice 2 :

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$
 - $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
- 1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
 - 2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 3 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $E_1 = Vect(u, v)$ et $E_2 = Vect(w)$ avec $u = (0, 4, -1), v = (3, -2, 5)$

1. Donner une base de E_1 et de E_2 .
2. Donner une base de $E_1 \cap E_2$.
3. La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe ?
4. Donner une base de $E_1 + E_2$.

Analyse à Priori

► Objectifs des activités

Ces exercices ont pour but de montrer comment est ce que un ensemble de vecteurs muni des lois $+$ et $\times$ est un espace vectoriel, de déterminer sa base et sa dimension et aussi de montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel de cet espace vectoriel.

► Justification des choix des activités

Ces exercices ont été choisis pour une application directe des notions vues au cours.

Dans l'exercice 1 par exemple il est question de montrer qu'un ensemble muni des lois $+$ et $\times$ est un espace vectoriel en passant par la notion de sous-espace vectoriel et d'en déterminer sa base et sa dimension.

► Erreurs possibles

Dans l'exercice 1, les apprenants seront tentés d'utiliser la définition de l'espace vectoriel pour montrer que cet est un espace vectoriel au lieu de passer par la notion de sous-espace vectoriel car un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Enfin dans l'exercice 3, l'ensemble $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ pourra poser problème aux apprenants car $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et que le vecteur issu de cet ensemble appartient à $\mathbb{R}^3$.

5. Devoir sur table

Ce devoir est surveillé et que l'apprenant ne devra faire usage d'aucun document .
Durée du devoir **2 heures**.

Exercice 1 :(Sous-espace vectoriel et Base)

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 2 :(Sous-espace vectoriel et Dimension)

Déterminer les quels des ensembles E_1, E_2, E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, calculer leurs dimensions.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = x + y + z = 0\} \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z(x^2 + y^2) = 0\} \end{aligned}$$

Exercice 3 :(Famille libre)

Comment choisir α pour que $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

Analyse à priori du Devoir

► Objectifs du Devoir

Ce devoir vise le contrôle des acquisitions des apprenants et le degré de rétention de chacun en vue de détecter les **faiblesses** des uns et la **force** des autres.

Ce devoir donne aussi la possibilité à chaque apprenant de **s'autoévaluer**.

Cependant, c'est l'occasion pour l'enseignant de vérifier ses objectifs en vue d'une amélioration s'il y a lieu.

► Justification du choix des exercices

Ces exercices ont été choisis pour vérifier les acquisitions des apprenants sur les mots clés de notre cours notamment la notion de Famille génératrice, famille libre et de somme de deux sous-espaces vectoriels.

► Erreurs Possibles

Les apprenants peuvent confondre α qui est élément du vecteur aux λ, β, γ dans la formule qui sont aussi des réels dans l'exercice 3.

Correction 1 :

1) Vérifions les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- L'origine $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ est aussi élément de E car pour $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ceci est vrai.

Donc E est non vide, c'est-à-dire $E \neq \emptyset$.

- La somme de deux vecteurs de E est aussi dans E , car pour $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$ et $v(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) \in E$, on a :

$$\begin{aligned}u + v &= (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, x_4 + x'_4) \\&= x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2 + x_3 + x'_3 + x_4 + x'_4 \\&= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4) \\&= 0 + 0 \\&= 0\end{aligned}$$

D'où $u + v \in E$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrons que la multiplication par ce réel reste dans E .

$$\begin{aligned}\alpha u &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \\&= \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4 \\&= 0 \\ \alpha u &= 0\end{aligned}$$

D'où $\alpha u \in E$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2) Il s'agit ici de trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E . Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y a donc au plus quatre (4) vecteurs dans cette famille.

Prenons un vecteur de E (au hasard), par exemple $v_1 = (1, -1, 0, 0)$.

ce vecteur n'engendre pas tout E , on cherche donc un vecteur v_2 linéairement indépendant de v_1 , par exemple $v_2 = (1, 0, -1, 0)$. Alors v_1, v_2 n'engendrent pas tout E et aussi $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ est dans E mais n'est pas engendré par v_1 et v_2 .

Montrons que (v_1, v_2, v_3) est une base de E .

- (v_1, v_2, v_3) est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 &= 0 \\ \alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(1, 0, -1, 0) + \gamma(1, 0, 0, -1) &= (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha = 0 \\ -\beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases} \\ \implies \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

- Montrons la famille est génératrice.

Soit $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Il s'agit d'écrire v comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3 .

On peut résoudre un système comme ci-dessous (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tel que :

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v$$

On obtient que

$$v = -x_2 v_1 - x_3 v_2 - x_4 v_3$$

Or $v \in E \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ Donc la famille est génératrice.

D'où v_1, v_2, v_3 forment une base de E .

Remarque :

On pourrait bien sûr choisir d'autres vecteurs de base. La seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base, dans notre cas on a trois (3) vecteurs.

Correction 2 :

E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :

► $(0, 0, 0) \in E_1$.

► Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux éléments de E_1 .

On a $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$

Donc $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x, y, z) + (x', y', z') = ((x + x'), (y + y'), (z + z')) \in E_1$.

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in E_1$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\alpha x + \alpha y - \alpha z = \alpha x + \alpha y + \alpha z = 0$

Donc $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in E_1$.

Dimension

Posons $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On a les inclusions strictes : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$.

Par la première on obtient $\dim(E_1) > 0$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est-à-dire $\dim(E_1) = 1$.

Pour $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - z^2 = 0\}$ c'est-à-dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \text{ ou } x = -z\}$.

Donc $(1, 0, -1)$ et $(1, 0, 1)$ appartiennent à E_2 mais $(1, 0, -1) + (1, 0, 1) = (2, 0, 0) \in E_2$ qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 3 :

Choisissons α pour que les vecteurs $(3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha)$ soient libre.

Or d'après la définition $(3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha)$ sont libre s'il existent $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(3, 1, -4, 6) + \beta(1, 1, 4, 4) + \gamma(1, 0, -4, \alpha) = 0 \implies \lambda = \beta = \gamma = 0$.

On a le système suivant :

$$\begin{cases} 3\lambda + \beta + \gamma = 0 \\ \lambda + \beta = 0 \\ -4\lambda + 4\beta - 4\gamma = 0 \\ 6\lambda + 4\beta + \alpha\gamma = 0 \end{cases}$$

D'où le système :

$$\begin{cases} \lambda = -\beta \\ \gamma = 2\beta \\ \alpha\gamma = 2\beta \end{cases}$$

Donc pour que ces vecteurs soient libre on prend, $\alpha = 0$.

6. Devoirs maison

L'acquisition des connaissances et de méthodes nécessitent un travail et une réflexion individuelle. La seule participation en classe est insuffisante pour assurer la pérennité des acquis. L'objectif de cette partie est de donner la possibilité chez l'apprenant de se documenter, s'échanger avec ses camarades ou de se faire aider, mais la rédaction est individuelle

Devoir 1

Exercice 1 :(espace vectoriel)

Cet exercice vise la mise en application de la définition de l'espace vectoriel en utilisant l'addition et la multiplication sur $\mathbb{R}^n$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. On définit dans $\mathbb{R}^n$ les opérations $+$ et $\cdot$ par :

- $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$:
- $\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

Montrer que $\mathbb{R}^n$ muni de deux opérations est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2 :(sous-espaces vectoriel, Base, Dimension)

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :(Dimension)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont une base est $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois vecteurs : $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{v} = -\vec{j}$; $\vec{w} = -2\vec{k} - 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 4 :(Combinaisons linéaires)

Montrer que le vecteur $\vec{u} = (5, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{e}_3 = (1, 1, 0)$.

(c'est-à-dire que $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$).

Devoir 2

Exercice 1 : (Sous-espace vectoriel, Base)

Parmi les sous-ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: $F_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1 = 0\}$; $F_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$; $F_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$; $F_4 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_3 = 2x_1 - x_2\}$; $F_5 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1 x_2 x_3 = 0\}$; $F_6 = \{x = (x_1, x_2, x_3), x_1 = x_2 = x_3\}$.

Déterminer une base de chaque sous-espace vectoriel.

Exercice 2 : (Base)

Dans $\mathbb{R}^3$, on désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 4, -5)$ et $u_2 = (1, 2, 3)$: déterminer une base de F . Le vecteur $v = (2, 14, -34)$ appartient-il à F ? le système (u_1, u_2, v) est-il une base de $\mathbb{R}^3$? Même question avec $a = (0, 0, 1)$.

Exercice 3 : (Sommes directes)

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $E = Vect((0, 1, 0, 2))$, $F = Vect((1, 2, -1, 0))$

$G = \{(x, y, z, t); x - y + z + t = x - 2y - z + t = 0\}$.

A-t-on $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?

7. Exercices d'approfondissement

L'objectif de cette série d'exercice est de faire un entraînement sur les espaces vectoriels et aussi d'appliquer les définitions et théorèmes définis dans le cours. Nous proposons dans cette série au moins deux exercices sur chaque rubrique du cours. Enfin ses exercices permettront aux apprenants de vérifier les acquisitions des connaissances.

Exercice 1 : (Définition de l'espace vectoriel)

Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des points $+$ et $\cdot$ tels que :

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}; \lambda \cdot (x, y) &= (\lambda x, \lambda y)\end{aligned}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (Définition de l'espace vectoriel)

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois suivantes est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \lambda \cdot (x, y) &= (0, \lambda y); \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exercice 3 : (Définition, Sous-espaces vectoriels)

Déterminer les quels des ensembles E_1, E_2, E_3 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = x + y + z = 0\} \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 - z^2 = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}\end{aligned}$$

Exercice 4 : (Sous-espaces, Dimension)

Etudier si les ensembles proposés sont des sous-espaces vectoriels des espaces précisés.

Si oui, en donner une base et la dimension.

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}, G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2x + y + z = 0\}$, dans $\mathbb{R}^3$.
- $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y - z - t = x - y + 3z + 2t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 : (Sous-espaces, Dimension)

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les trois vecteurs $u = (1, 1, 0, -1)$, $v = (1, 0, 0, -1)$, $w = (1, 0, -1, 0)$.

On considère aussi les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$F = \text{Vect}(\{u, v, w\})$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + 2t = 0\}$.

- 1) Déterminer une base de F et G puis donner leur dimension.
- 2) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.
- 3) En déduire $\dim(F \cap G)$ puis une base de $F \cap G$.

Exercices 6 : (Sous-espaces, Dimension)

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-espace $P = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3, u - v + w = 0\}$ et le vecteur $a = (1, 1, 1)$.

- 1) Déterminer la dimension de P .
- 2) On pose $D = \text{Vect}(a)$. Montrer que $P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- 3) Que peut-on dire des espaces D et P ?

Exercice 7 : (Sous-espaces supplémentaires)

- 1) Montrer que les ensembles $H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 0\}$ et $H_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^2$.
- 2) V_3 est un espace vectoriel dont une base est $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$ sont trois vecteurs de V_3 , $\mathcal{D}$ est la droite vectorielle de base $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de base $(\vec{u}, \vec{w})$. Démontrer que $V_3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.

Exercice 8 : (Espace, Base)

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$

- 1) Démontrer que F muni des opérations $+$ et $\times$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- 2) Déterminer une base de F .

Exercice 9 : (Espace, Base, Dimension)

Soit S l'ensemble des fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

- 1) Montrer que les deux fonctions $g(t) = \cos(\omega t)$ et $h(t) = \sin(\omega t)$ sont des éléments de S .
- 2) Montrer que S muni des opérations $+$ et $\times$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- 3) Montrer que la famille $(g(t), h(t))$ est une base de S .
- 4) Déterminer la dimension de S .

Exercice 10 : (Famille liée, famille libre)

Soit la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $((1, 0, a), (0, 1, 0), (2, 3, -1))$.

Déterminer selon la valeur de a si cette famille de vecteurs est libre ou liée.

Lorsque la famille est liée, déterminer la relation qui lie ses vecteurs.

Exercice 11 : (Familles , Bases incomplètes)

On considère les vecteurs $u = (1, 0, 1, 0)$ et $v = (0, 2, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$.

- 1) La famille (u, v) est-elle libre ?
- 2) La famille (u, v) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$? Si non, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12 : (Base de $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (-6, 0, 2)$

- 1) Montrer que u et v sont linéairement indépendants.
- 2) Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ qui soit linéairement indépendant de u et v .
- 3) Montrer que u, v, w forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercices 13 : (Bases)

- 1) Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $v = (1, 1, 1)$.
- 2) Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, t)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 14 : (Sous-espaces, Sommes)

On note E l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y + z = 0\}$

- 1) vérifier sur l'un de ces deux ensembles que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- 2) La somme $F + G$ est-elle directe ?
- 3) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. F et G sont-ils supplémentaires ?
- 4) On cherche à exprimer $\mathbb{R}^3$ comme somme de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires :
 - a) Déterminer un sous-espace supplémentaire à $F \cap G$ dans F qu'on nommera F_1 ; En donner une base formée d'un ou plusieurs vecteurs dont la dernière coordonnée vaut 1.
 - b) Déterminer un sous-espace supplémentaire à G qu'on nommera G_1 ; En donner une base formée d'un ou plusieurs vecteurs dont la dernière coordonnée vaut 1.
 - c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \cap F \cap G \cap G_1$.

Exercice 15 : (Sous-espaces supplémentaires, sommes directes)

Les sous-espaces vectoriels ci-dessous sont-ils supplémentaires ?

- a) Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 2x + y + z = 0\}$ et $G = Vect((0, 1, -1), (1, 1, 1))$.
- b) Dans E rapporté à une base (e_1, e_2, e_3) , on note $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $w = 4e_1 + 3e_3$, $x = -e_1 + 2e_2$.
Puis $F = Vect(u, v, w)$ et $G = Vect(x)$.

Exercice 16 :(Dimension, Sommes)

1. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0), u = (0, 1, 1), v = (1, 0, 1).$$

On pose $F = Vect(x, y)$ et $G = Vect(u, v)$.

- a) Déterminer la dimension de $F \cap G$.
 - b) A-t-on $\mathbb{R}^3 = F \cap G$?
2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$x = (0, 2, 0, -2), y = (0, 3, 0, 5), u = (1, 0, 2, 0), v = (2, 0, -3, 0).$$

On pose $F = Vect(x, y)$ et $G = Vect(u, v)$.

- a) Déterminer la dimension de $Vect(x, y, u, v)$.
- b) A-t-on $\mathbb{R}^4 = F \cap G$?

Exercice 17 :(Famille libre)

Soit (u, v, w) une famille de vecteurs d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

1. Montrer que la famille $(u + v, v + w, w + u)$ est également libre sur $\mathbb{R}$.
2. La famille $(u - v, v - w, w - u)$ est-elle libre sur $\mathbb{R}$?

Montrer que si $\dim F + \dim G > n$, alors $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Bibliographie

- [1] LAURENT GARCIN, *Espaces Vectoriels*, MPSI Lycée Saint-Exupéry.
- [2] PAUL VALÉRY, *Algèbre Linéaire en dimension Finie* Centre de Mathématiques ; Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique, 21 juillet 2009.
- [3] *Mathématiques des classes de terminales C et E* , Congo-Brazzaville.
- [4] *Mathématiques des classes de terminales C et E* , Cameroun.
- [5] Collection Formation , *La classe des mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants.* , Édition Octares, 2010.