# Projet PRENUM-AC[1]

**Année 2012**

# Ressource Terminale C :

# Traduction complexe des similitudes planes

## Production :

### Concepteur :

**Junior DILAMENO**, étudiant à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université Marien NGouabi, Congo-Brazzaville

### Encadreurs :

• **Cyr NGAMOUYIH**, enseignant au lycée de la Réconciliation, Congo-Brazzaville

• **Louis-Marie MOUNKALA**, enseignant-chercheur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université Marien NGouabi, Congo-Brazzaville



1. Production des Ressources Numériques en Enseignement de Mathématiques en Afrique Centrale

# Exemple visuel d'une similitude

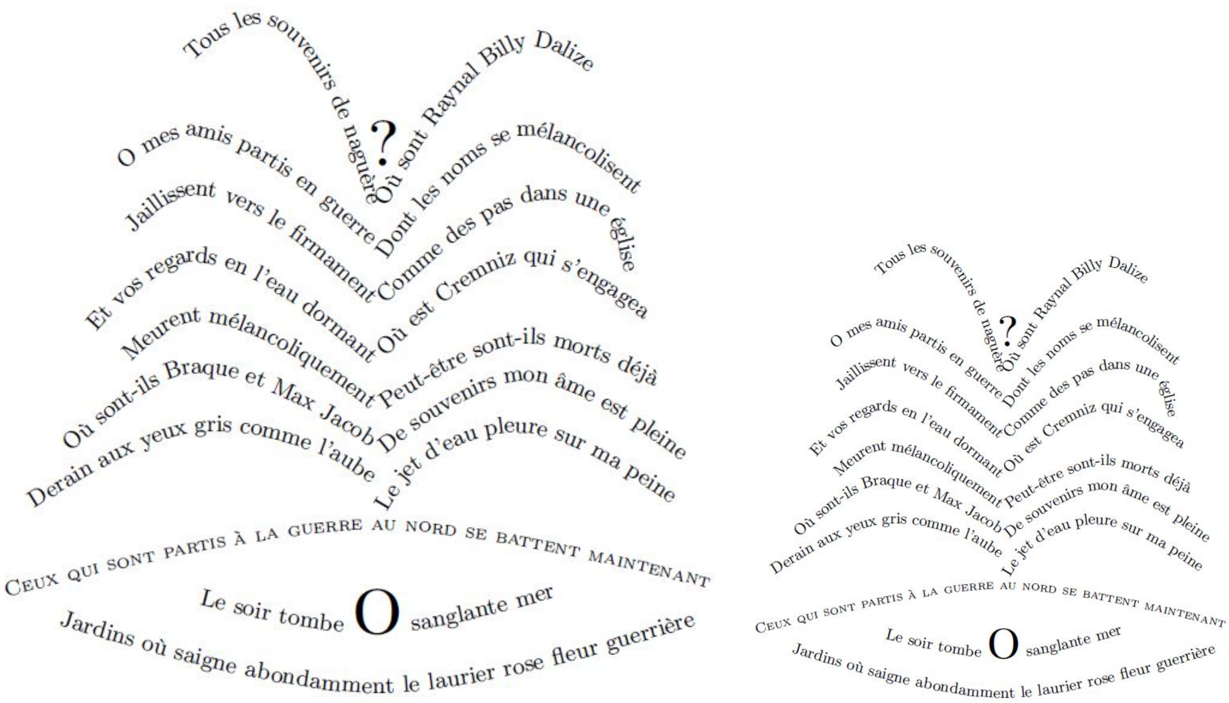



*Illustration d'une similitude entre deux figures*

Une observation de ces deux figures montre qu'elles sont semblables. Ainsi il existe une similitude qui transforme la première figure en la deuxième.

Mais laquelle ?

Et comment peut-on la traduire dans le domaine complexe ?

Guy BROUSSEAU : *«Que peuvent apporter les différentes approches de la didactique des mathématiques aux enseignants ?»*

# Aperçu d'une ressource

Une ressource correspond à un chapitre du cours. Elle est constitué des parties énoncées ci-dessous. Pour chaque partie, des indications sont données quant au contenu. Ces indications seront des critères pour l'évaluation.

### Cours détaillée :

Indiquer notamment l'objectif du chapitre, la place dans le programme, les pré-requis, le schéma pédagogique (place des activités, du cours, des exercices), le déroulement prévu (indication sur le temps consacré à chaque phase), l'activité prévue pour le maître et l'activité attendue des élèves.

### Activités pédagogiques :

Un chapitre sera détaillé en deux temps différents d'activités : par exemple exposition d'une notion, travail sur une méthode.

Les objectifs spécifiques et les travaux demandés aux élèves en classe, éventuellement hors classe, seront indiqués.

Des éléments de mise en œuvre à partir du stage des étudiants (conduite pédagogique de la leçon, difficultés et ressentis des élèves, $\cdots$) et une bibliographie seront aussi indiqués.

### Devoirs et corrigés :

Proposition de deux devoirs "maison" et d'un devoir surveillé. Le devoir surveillé est d'une durée de deux heures. On donnera des éléments d'analyse a priori et a posteriori, la place du devoir dans la progression du cours, les objectifs (contrôle des acquisitions, entraînement, recherche, $\cdots$), la présentation des taches demandées aux élèves.

### Feuille d'exercices :

Une feuille de plusieurs exercices non corrigés sera montée. Il sera indiqué sur cette feuille les raisons du choix des exercices ainsi que les points importants dans leur mise en œuvre.

# Petit mot de l'auteur

*Si vous avez lu ou exploité cette ressource,*
*un petit mail d'encouragement à l'auteur lui fera du bien.*
*Vous pouvez aussi laisser*
*un commentaire concernant la ressource.*
*Pour cela contactez-nous à l'adresse suivante :*
*juniordilameno2000@yahoo.fr*
*PRENUM-AC/E.N.S.-U.M.NG.*

Junior DILAMENO

# Table des matières

# INTRODUCTION

## 0.1 Historique

Les similitudes planes comme nous les étudions aujourd'hui commencent avec Euler dans son traité publié en Octobre 1791 et intitulé ***De centro similitudinis*** (sur le centre de similitude). Euler considère que si deux figures coplanaires sont semblables alors il existe dans ce plan un certain point qui établit de manière similaire un rapport entre les segments de l'une ou l'autre figure, qu'il nomme segments homologues.

On a cru jusqu'ici que, dans son ***Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires***, publié à Paris en 1806, Argand était le fondateur de la représentation moderne des nombres complexes comme lignes ayant une direction déterminée. Cependant il est démontré que dès 1799 Gauss a eu la même idée et déjà à la fin du XVIIe siècle, Wallis dans son ***A treatise of Algebra*** (London, 1685), a essayé de donner aux nombres imaginaires une signification réelle.

Mais le mémoire de Wessel, ***om direktionensanalytiske***, présenté à l'académie des sciences de Copenhague le 10 mars 1797, imprimé en 1798 puis traduit en français en 1897 sous le titre ***Essai sur la représentation analytique de la direction***, voit dans une multiplication d'un complexe par un autre, une rotation suivie d'une homothétie. Cette idée va inspirer le livre d'Edward Thomas Copson, ***An introduction to the theory of functions of a complex variable*** de 1935, où le mathématicien britannique utilise une représentation des nombres complexes comme matrice de similitude.

## 0.2 Public ciblé

Cette production est une ressource interactive de mathématiques de la classe de Terminale scientifique série C. Elle est destinée aux **enseignants** et aux **apprenants**.

Les enseignants trouveront dans cette ressource :

- le maximum d'informations leur permettant de bien élaborer et de justifier le **contenu mathématique** de leur cours, les différents **savoirs élaborés** pour faire la traduction complexe de similitudes, les diverses **méthodes et techniques** abordées, une base des activités pour les évaluations diagnostiques, des exercices d'applications pour les évaluations formatives, des devoirs pour faire des évaluations bilans ainsi que des exercices d'approfondissement pour une bonne préparation aux échéances majeures et enfin une **bibliographie** nécessaire ;

- les éléments didactiques comme **les analyses a priori** des notions abordées dans la ressource, les différentes **approches** utilisées pour arriver à la traduction complexe des similitudes, les différents **cadres** utilisés dans ses approches. **Les analyses a posteriori** ne figurent pas dans la ressource parce que cette dernière n'a pas été expérimentée en situation de classe pour des raisons de temps et administratives ;

- des éléments pédagogiques comme les **objectifs** visés par la ressource, sa **place dans le programme** c'est-à-dire les différents **pré-requis** nécessaires pour la ressource ainsi que son **utilisation future** et aussi le **temps nécessaire** pour son bon déroulement ; la **place de l'enseignement** ainsi que la **place de l'apprenant** dans le déroulement de la leçon en situation de classe. Ces éléments lui permettront de bien organiser la progression de son cours et la construction des connaissances par les apprenants eux-mêmes sous l'œil de l'enseignant ;

- les éléments épistémologiques notamment une **historique** sur l'élaboration des similitudes au cours du temps avec la participation des différents mathématiciens impliqués.

Quand aux apprenants, ils trouveront un cours interactif riche sur la traduction complexe des similitudes, une base des activités, des exercices et de devoir résolus pour une bonne construction des savoirs et au bon entraînement des méthodes et des procédures utilisées dans la ressource. Mais aussi une large variante des exercices non résolus pour approfondir les acquisitions . Une historique est aussi mise à leur disposition pour comprendre comment le savoir des similitudes a été élaboré au fil du temps et les mathématiciens qui ont apporté leur contribution.

## 0.3 Objectifs pédagogiques

A la fin de ce cours, l'apprenant (l'élève) devra être capable de :

- donner l'écriture complexe d'une similitude plane définie géométriquement et ensuite analytiquement ;

- reconnaître une similitude plane par son écriture complexe ;
- caractériser une similitude plane.

## 0.4 Place dans le programme

### 0.4.1 Pré-requis

Ce cours doit être fait après le cours sur les nombres complexes et le cours sur l'étude géométrique des similitudes planes.

Avant de commencer ce cours, l'apprenant devra être capable de :

- effectuer les opérations sur les nombres complexes ;
- bien manipuler les formes algébrique-trigonométrique-exponentielle d'un nombre complexe ;
- définir et distinguer les différentes similitudes planes définies géométriquement ;
- manipuler les transformations du plan (isométries et homothéties vues en classe de Première Scientifique).

### 0.4.2 Utilisations futures

Dans le sens de la progression du programme actuel, ce cours sera utile dans les rubriques suivantes :

- Composition et décomposition des isométries ;
- Traduction des coniques par des nombres complexes.

## 0.5 Répartition horaire

En situation enseignement-apprentissage, dans le contexte de la classe, ce cours sera dispensé en un temps moyen de $09h\ 00min$. Ce temps est reparti comme suit :

- Chapitre 1 ($5h\ 15min$)
  - ⋆ Sections 1.1 et 1.2 : $1h00min$
  - ⋆ Sections 1.3, 1.4, 1.5 et 1.6 : $1h\ 15min$
  - ⋆ Section 1.7 : $2h\ 00min$
  - ⋆ Section 1.8 : $1h\ 00min$
- Chapitre 2 ($3h\ 45min$)
  - ⋆ Section 2.1 : $45min$
  - ⋆ Sections 2.2, 2.3 et 2.4 : $1h\ 00min$
  - ⋆ Section 2.5 : $1h\ 00min$
  - ⋆ Section 2.6 : $1h\ 00min$

## 0.6 Déroulement prévu des activités de la ressource

Titre de la ressource :

**Traduction complexe des similitudes planes**

### 0.6.1 Organisation de la ressource

Nous allons faire l'étude des similitudes planes aux moyens des nombres complexes. Nous distinguerons les similitudes planes directes et les similitudes planes indirectes.

Cette ressource est divisée en deux chapitres, le premier chapitre fera l'étude des similitudes planes directes et le deuxième celle des similitudes planes indirectes.

Chaque chapitre est élaboré selon le schéma pédagogique suivant : Activités préparatoires - Cours - Exemples d'illustration - Exercices d'application.

En plus du cours, il est aussi proposé à l'utilisateur un devoir sur table de deux heures avec corrigé, deux devoirs "maison" et une feuille de 15 exercices d'approfondissement pour vérifier si les notions enseignées ont été bien assimilées.

### 0.6.2 Problématique de la ressource

Avant cette ressource, les apprenants connaissent déjà les nombres complexes et les similitudes dans leur cadre géométrique, la problématique est donc de faire une traduction complexe de ces similitudes. Il s'agit ainsi d'une ressource de synthèse et de changement de cadres. Pour cela, nous proposons deux approches ou visions différentes pour obtenir cette traduction à savoir :

- l'approche qui part de la définition des similitudes (c'est-à-dire le cadre géométrique) vers sa forme complexe (c'est-à-dire le cadre algébrique) ; c'est l'approche que nous appelons approche géométrico-algébrique.
- l'approche qui part de la définition des similitudes vers sa forme complexe en passant par son expression analytique (c'est-à-dire le cadre analytique) ; c'est l'approche que nous approche que nous appelons l'approche géométrico-analytico-algébrique. D'où pour résumer ces approches un triangle de correspondance est élaboré et mis en place :

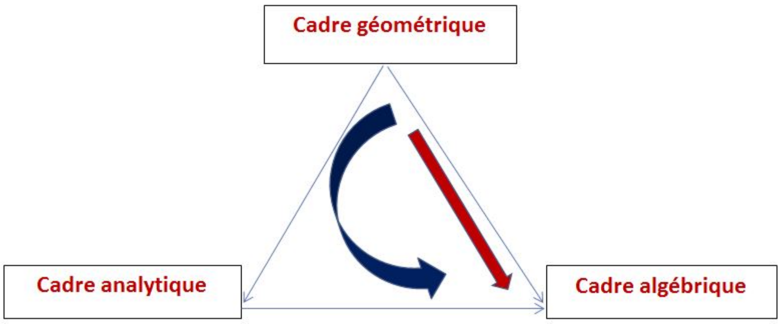



FIGURE 1 – Triangle de changement de cadres

Dans ce triangle, la couleur bleu est utilisée pour expliquer et pour mettre en évidence l'approche géométrico-algébrique et la couleur rouge pour l'approche géométrico-analytico-algébrique.

# Chapitre 1

# Similitudes planes directes

## 1.1 Activité préparatoire (1)

### 1.1.1 Énoncé de l'activité préparatoire

**Titre :** Traduction complexe d'une similitude définie géométriquement.

**Énoncé :** Soit $\mathcal{P}$ un plan et soit $s$ une similitude plane directe de centre $\Omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $k$ qui transforme un point $M$ en $M'$ c'est-à-dire :

$$\text{s(M)=M'}$$

a) Compléter les deux relations suivantes :

a$_1$) $\dfrac{\Omega M}{\Omega M'}$ =?

a$_2$) $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ =?

b) On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On désigne par $\Omega$, $M$ et $M'$ les ponts d'affixes $\omega$, $z$ et $z'$ respectivement.

b$_1$) En se servant de l'égalité obtenue en a$_1$), écrire $z'$ en fonction de $z$.

b$_2$) Mettre le résultat obtenu sous la forme $z' = az + b$ avec $a$ et $b$ des nombres à déterminer.

### 1.1.2 Analyse a priori

**Objectif de l'activité**

Le but de cette activité est de faire la traduction complexe de la similitude en partant de la définition géométrique. Cette étude est motivée par la résolution du problème de manière générale.

**Schéma adapté**

Dans cette activité, le schéma utilisé est :

**Cadre géométrique** $\Longrightarrow$ **Cadre algébrique**

**Justification de l'activité**

Le choix de l'activité repose sur le fait que les apprenants connaissent déjà les similitudes dans leur cadre géométrique et les nombres complexes. Il s'agit donc de faire une traduction complexe des similitudes.

**Erreurs possibles**

⋆ Pour la question $a_1$) On aura

$$\frac{\Omega M}{\Omega M'} = \frac{1}{k}, \qquad \text{avec } k \text{ le rapport}$$

Les apprenants seront tentés de trouver l'inverse de $\frac{1}{k}$ c'est-à-dire :

$$\frac{\Omega M}{\Omega M'} = k$$

⋆ Pour la question $b_1$)
On aura :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$$

Les apprenants seront tentés d'oublier que $1 = |e^{i\theta}|$ et donc de trouver

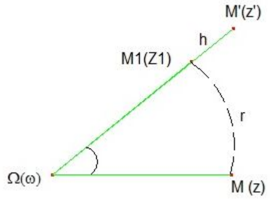
$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

### 1.1.3 Solution optimale de l'activité préparatoire (1)

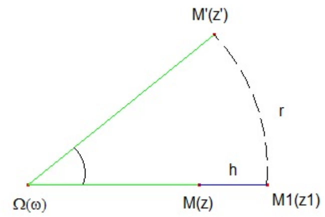
Soit $s = s(\Omega, \theta, k)$ et soit $M$ et $M'$ deux points du plan $\mathcal{P}$. On a :

$$s(M) = M'$$

## Illustration de $s$




ou




a) Complétons les deux relations suivantes :
Le schéma illustre bien qu'il existe un réel qui multiplie la distance $\Omega M$ pour obtenir la distance $\Omega M'$ et un angle qui déplace le point $M$ en $M'$, on a :

$$\Omega M' = k\Omega M \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\, [2\pi]$$

D'où

a$_1$) $\dfrac{\Omega M}{\Omega M'} = \dfrac{1}{k}$, avec $k$ le rapport de la similitude plane directe.

a$_2$) $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta\, [2\pi]$

b) Soit $\omega$, $z$ et $z'$ les affixes des points $\Omega$, $M$ et $M'$ respectivement.

b$_1$) Écrivons $z'$ en fonction de $z$ en vous servant de a$_1$)
D'après l'égalité obtenue en a$_1$), on a :

$$\begin{aligned}
\Omega M' = k\Omega M &\iff |z' - \omega| = |k(z-\omega)| \\
&\iff |z' - \omega| = |k||z-\omega| \\
&\iff \frac{|z' - \omega|}{|z-\omega|} = |k| \\
&\iff \frac{|z' - \omega|}{|z-\omega|} = |ke^{i\theta}| \qquad \text{car} \quad \boxed{|e^{i\theta}| = 1} \\
&\iff \left|\frac{z' - \omega}{z-\omega}\right| = |ke^{i\theta}|
\end{aligned}$$

Étant donné que les complexes $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ et $ke^{i\theta}$ ont le même rapport $k$ et le même angle $\theta$, alors ils sont égaux. On a :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\theta}$$

D'où :

$$\boxed{z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)}$$

b$_2$) Mettons le résultat obtenu sous la forme $z' = az + b$

D'après la question b$_1$), on a :

$$\begin{aligned} z' - \omega &= ke^{i\theta}(z - w) \\ z' &= ke^{i\theta}z + (1 - ke^{i\theta})\omega \end{aligned}$$

Posons

$$a = ke^{i\theta} \quad \text{et} \quad b = (1 - ke^{i\theta})\omega$$

On obtient :

$$z' = az + b$$

D'où

$$\boxed{z' = az + b \quad \text{avec} \quad a = ke^{i\theta} \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad b = (1 - ke^{i\theta})\omega \in \mathbb{C}}$$

Rappel

*La composée commutative d'une homothétie de centre $\Omega$, de rapport $k$ notée $h(\Omega, k)$ et d'une rotation de même centre $\Omega$, d'angle $\theta$ notée $r(\Omega, \theta)$ est une similitude plane directe notée $s(\Omega, k, \theta)$ ; c'est-à-dire :*

$$s = h \circ r = r \circ h$$

## 1.2 Activité préparatoire (2)

### 1.2.1 Énoncé de l'activité préparatoire

**Titre :** Traduction complexe d'une similitude plane directe définie géométriquement en passant par son expression analytique.

**Énoncé :** Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega(-2; 1)$ et de rapport 2 et soit $r$ la rotation de centre toujours $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) a$_1$) A partir de la définition géométrique de $h$, donner l'écriture complexe de $h$.

a$_2$) En déduire l'expression analytique de $h$.

b) Mêmes questions pour $r$.

c) En utilisant les expressions analytiques obtenues en a) et b), déterminer l'expression analytique de $h \circ r$.

d) En déduire l'expression complexe de $h \circ r$.

e) Comparer cette expression avec la forme de l'expression obtenue dans l'activité 1 (question b$_1$). Que dire de la nature de cette expression obtenue ?

### 1.2.2 Analyse a priori

**Objectif de l'activité**

Le but de cette activité est d'obtenir la traduction complexe de la similitude plane directe à partir de sa définition géométrique en passant par son expression analytique associée.

**Schéma adapté**

Dans cette deuxième activité, le schéma adapté est le suivant :

**Cadre géométrique** $\Longrightarrow$ **Cadre analytique** $\Longrightarrow$ **Cadre algébrique**

**Justification de l'activité**

L'approche choisie dans cette deuxième activité est plus longue que celle choisie dans la première activité. Sa justification réside dans le fait que dans les programmes de mathématiques congolais, l'usage des expressions analytiques des différentes transformations du plan et de l'espace est abondant et recommandé.

Cette approche constitue aussi une autre manière de traduire les similitudes en complexes.

**Choix des variables :** Choix des éléments caractéristiques de $h$ et de $r$

- ⋆ *Choix du centre :* Un même centre $\Omega(-2;1)$ est choisi pour $h$ et $r$ pour rendre souples la démarche et les calculs. C'est aussi pour trouver facilement le centre de la similitude.
- ⋆ *Choix de l'angle :* La valeur $\frac{\pi}{2}$ de l'angle $\theta$ est choisie pour obtenir des valeurs simples de *cosinus* et de *sinus* et rendre l'activité assez souple.
- ⋆ *Choix du rapport :* Les valeurs entières, petites (inférieures à 5 par exemple) et positives sont préférables pour éviter des cas plus compliqués déjà en activité préparatoire. D'où le choix de la valeur $+2$ comme rapport $k$.

**Erreurs possibles**

⋆ Pour la question b) La définition géométrique de la rotation permet d'écrire :

$$\Omega M' = \Omega M$$

Les apprenants seront tentés d'écrire l'expression de la définition de la rotation avec les vecteurs, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}, \quad \text{avec} \quad M \neq M' \qquad \textit{ce qui est faux.}$$

### 1.2.3 Solution optimale de l'activité préparatoire (2)

Considérons une homothétie $h(\Omega, k)$ avec $\Omega(-2; 1)$ et $k = 2$ et une rotation $r(\Omega, \theta)$ avec $\theta = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

a$_1$) Donnons l'écriture complexe de $h$

D'après la définition géométrique de $h$, on a :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$$

En introduisant les affixes, on obtient :

$$z' - \omega = 2(z - \omega) \qquad (1)$$

Comme $\Omega(-2; 1)$, alors $\omega = -2 + i$

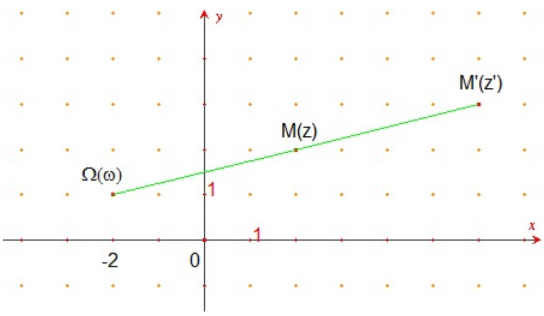
(1) devient :

$$\begin{aligned} z' + 2 - i &= 2(z + 2 - i) \\ z' &= 2z + 4 - 2i - 2 + i \end{aligned}$$

D'où l'écriture complexe de h est :

$$z' = 2z + 2 - i \qquad (2)$$

Illustration




a$_2$) Déduisons l'expression analytique de $h$

Posons $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$

L'expression

$$z' = 2z + 2 - i$$

devient :

$$x' + iy' = 2x + 2iy + 2 - i = (2x + 2) + i(2y - 1)$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

D'où l'expression analytique de $h$ est :

$$\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

b) De même pour la rotation $r(\Omega, \frac{\pi}{2})$

On a :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \, [2\pi] \end{cases}$$

On obtient en introduisant les affixes :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ arg \left( \dfrac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \dfrac{\pi}{2} \, [2\pi] \end{cases}$$

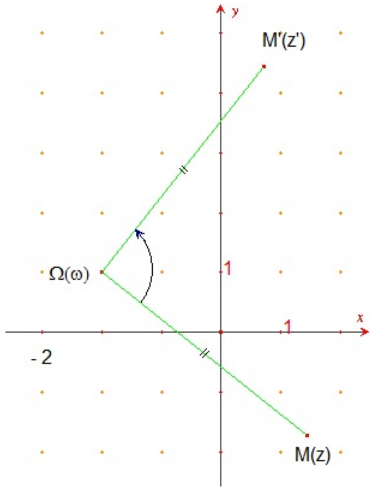
On obtient

$$|\frac{z' - \omega}{z - \omega}| = |e^{i\frac{\pi}{2}}|$$

Étant donné que les complexes $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ et $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ont le même rapport 1 et le même angle $\frac{\pi}{2}$, alors ils sont égaux. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z' - \omega}{z - \omega} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \\ z' - \omega &= e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega) \\ z' + 2 - i &= i(z + 2 - i) \qquad \text{car} \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i \\ z' &= iz + 2i + 1 - 2 + i \\ z' &= iz + 3i - 1 \\ z' &= iz - 1 + 3i \qquad (3) \end{aligned}$$

Illustration




De l'expression (3), on en déduit l'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$$

c) Déterminons l'expression analytique de $h \circ r$

Les expressions analytiques de $h$ et $r$ sont respectivement $(i)$ et $(ii)$

$$(i) \begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y - 1 \end{cases}$$

et

$$(ii) \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x + 3 \end{cases}$$

L'expression analytique de $h \circ r$ est :

$$\begin{cases} x'' = 2x' + 2 = 2(-y - 1) + 2 \\ y'' = 2y' - 1 = 2(x + 3) - 1 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} x'' = -2y - 2 + 2 = -2y \\ y'' = 2x + 6 - 1 = 2x + 5 \end{cases}$$

D'où l'expression analytique de $h \circ r$ est :

$$\begin{cases} x'' = -2y \\ y'' = 2x + 5 \end{cases}$$

d) Déduisons l'expression complexe de $h \circ r$

De l'expression analytique de $h \circ r$, on en déduit son expression complexe :

$$z' = 2iz - 5i$$

e) Nature $h \circ r$

Cette expression est de même forme que celle trouvée dans l'activité 1 (question $b_2$)) en posant :

$$a = 2i \quad \text{et} \quad b = -5i$$

C'est-à-dire

$$z' = az + b$$

Comme dans l'activité 1,

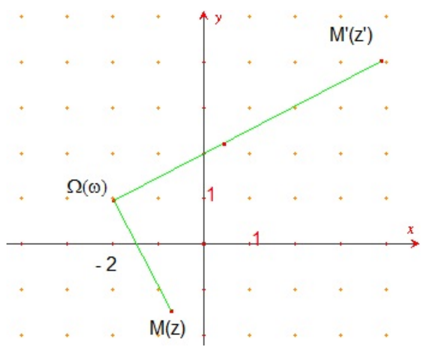
$$z' = az + b$$

est une similitude plane directe, alors

$$z' = 2iz - 5i$$

est aussi une similitude plane directe.

Illustration




Constat : *Au regard de ces deux activités préparatoires, la définition suivante se dégage :*

## 1.3 Définition

Une similitude plane directe est la composée commutative d'une homothétie et d'un déplacement ; son expression complexe est de la forme :

$$z' = az + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

**N.B. :** *Tout déplacement est soit une rotation ou soit une translation.*

## 1.4 Équivalence des définitions

Soient trois points $\Omega$, $M$ et $M'$ du plan tels que $M$ et $M'$ sont distincts de $\Omega$, d'affixes respectives $\omega$, $z$ et $z'$ et soit $s$ une transformation du plan telle que $s(M) = M'$

$s$ est une similitude plane directe de centre $\Omega(\omega)$, d'angle $\theta$ et de rapport $k$ si
(*i*) $\Omega M' = k\Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta[2\pi]$
ou de façon équivalente si
(*ii*) $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ autrement dit $z' = az + b$

$$\text{Ainsi } (i) \Longleftrightarrow (ii)$$

D' où il y a une équivalence de ces deux définitions.

Nous allons à présent examiner les différentes valeurs que peuvent prendre le coefficient $a$ (que $a$ soit réel ou complexe) ce qui nous permettra d'obtenir des similitudes particulières.

## 1.5 Exemples

- $z' = 2iz - 5i$ *c'est l'activité préparatoire (2)*
- $z' = (\sqrt{3} + i)z + 1 + i$
- $z' = z + 4i$

Théorème :

Les similitudes planes directes conservent les angles orientés.

Démonstration :

Soit $s$ une similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$ et soient quatre points du plan $A$, $B$, $C$ et $D$ d'images respectives $A'$, $B'$, $C'$ et $D'$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Il s'agit de montrer l'égalité d'angles orientés suivante : $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

Avec les affixes, on a :

$$\frac{z_{D'} - z_{C'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{(az_D + b) - (az_C + b)}{(az_B + b) - (az_A + b)} = \frac{a(z_D - z_C)}{a(z_B - z_A)} = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

D'où

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Ainsi la similitude plane directe conserve les angles orientés.

## 1.6 Caractéristiques d'une similitude plane directe

Une similitude plane directe notée $s$ est caractérisée par son centre $\Omega$, son rapport noté $k$ et son angle noté $\theta$. On la note aussi :

$$s = sim(\Omega, k, \theta).$$

### 1.6.1 Rapport de la similitude

Soit la similitude plane directe $s$ d'écriture complexe $z' = az + b$.
Le rapport $k$ de la similitude est le module de $a$.

$$k = |a| > 0$$

### 1.6.2 Angle de la similitude

L'angle de la similitude est l'argument de $a$.

$$\theta = arg(a)$$

Théorème :

La composée d'une similitude plane directe de rapport $k_1$ et d'angle $\theta_1$ par une similitude plane directe de rapport $k_2$ et d'angle $\theta_2$ est une similitude plane directe de rapport $k_1 k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Démonstration :

Notons :
$s_1$ la similitude plane directe de rapport $k_1$ et d'angle $k_2$ d'expression complexe

$$z' = k_1 e^{i\theta_1} z + b_1$$

et
$s_2$ la similitude plane directe de rapport $k_2$ et d'angle $\theta_2$ d'expression complexe

$$z' = k_2 e^{i\theta_2} z + b_2$$

Ainsi l'écriture complexe de $s_2 \circ s_1$ est :

$$\begin{aligned} z' &= k_2 e^{i\theta_2}(k_1 e^{i\theta_1} z + b_1) + b_2 \\ &= k_2 k_1 e^{i(\theta_1+\theta_2)} z + k_2 e^{i\theta_2} b_1 + b_2 \end{aligned}$$

Posons

$$k = k_1k_2, \qquad \theta = \theta_1 + \theta_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha = k_2e^{i\theta_2}b_1 + b_2$$

on a :

$$z' = ke^{i\theta}z + \alpha$$

D'où

$s_2 \circ s_1$ est une similitude plane directe de rapport $k_1k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

### 1.6.3 Centre de la similitude

Pour déterminer le centre de la similitude plane directe, on dispose du théorème suivant :

Théorème :

Toute similitude plane directe autre que la translation admet un unique point invariant appelé centre de la similitude plane directe.

Démonstration :

Soit $s$ une similitude plane directe d'expression complexe $z' = az + b$. Soit $\omega$ l'affixe du centre $\Omega$.

$$\begin{aligned} \omega \text{ est invariant par } s &\iff s(\omega) = \omega \\ &\iff \omega = a\omega + b \\ &\iff \omega(1-a) = b \\ &\iff \omega = \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

D'où

$$\omega = \frac{b}{1-a}$$

L'ensemble de points invariants d'une similitude plane directe n'est autre que le centre de la similitude d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

Propriété :

Si $a = 1$, on a :

$$z' = z + b$$

alors la similitude plane directe $s$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$. et d'expression complexe :

$$z' = z + b$$

D'où la translation n'a pas de point invariant c'est-à-dire de centre.

Appellation : Le centre $\Omega$, le rapport $k$ et l'angle $\theta$ de la similitude directe sont aussi appelés *éléments caractéristiques* de la similitude plane directe.

Théorème

La composée de deux similitudes planes directes est une similitude plane directe.

Démonstration

Pour cette démonstration, confère la démonstration du théorème dégagé à la page 22. On en déduit :

$$z' = az + b \qquad \text{avec} \quad a = k_1 k_2 e^{(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{et} \quad b = k_2 e^{i\theta_2} b_1 + b_2$$

D'où le résultat.

## 1.7 Similitudes particulières

Nous allons faire la traduction complexe par deux approches différentes comme nous l'avions indiqué dans notre problématique.

Rappelons que l'expression complexe de la similitude plane directe est :

$$z' = az + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

Remarque

Nous allons étudier l'expression de la similitude directe

$$z' = az + b$$

Primo lorsque le module $|a| = 1$

### 1.7.1 Translation : Cas où $a = 1$

**Approche géométrico-algébrique**

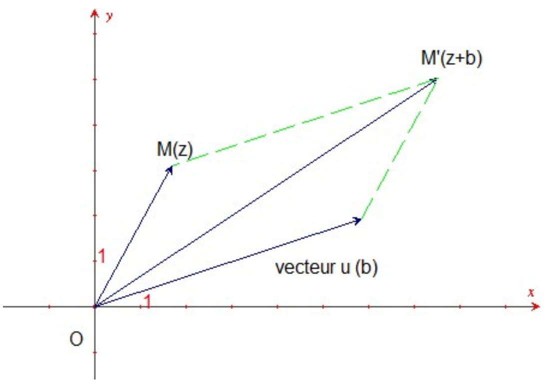
Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(m,n)$, $M$ et $M'$ deux points du plan $\mathcal{P}$ d'affixes respectives $z$ et $z'$ et soit $b$ l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(M) = M' \Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} &= \vec{u} \\ z' - z &= b \\ z' &= z + b \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{z'=z+b}$$

Illustration




**Approche géométrico-analytico-algébrique**

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(m,n)$ et soit $M(x;y)$, $M'(x';y')$ deux points du plan $\mathcal{P}$.

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}}(M) = M' &\Longleftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x' - x = m \\ y' - y = n \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x' = x + m & (4) \\ y' = y + n & (5) \end{cases} \end{aligned}$$

En additionnant $(4) + i(5)$ on obtient :

$$x' + iy = x + iy + m + in$$

et on trouve :

$$\boxed{z'=z+b}$$

### Résultat

Si $a = 1$, alors une similitude plane directe d'expression complexe $z' = z + b$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $b$.

### Cas particulier

Reprenons l'expression complexe de la translation de vecteur d'affixe $b$

$$z' = z + b$$

Si

$$b = 0$$

alors

$$z' = z$$

On obtient alors l'expression complexe de l'identité du plan :

$$\boxed{z'=z}$$

**Théorème :**

Toute similitude plane directe qui laisse invariant deux points distincts $A$ et $B$ est l'identité.

**Démonstration :**

Notons $s$ une similitude plane directe donc son écriture complexe est $z' = az+b$
Comme $A$ et $B$ sont invariants par $s$, on a :

$$\begin{array}{rcl} s(A) = A & \Longleftrightarrow & z'_A = z_A \\ s(B) = B & \Longleftrightarrow & z'_B = z_B \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_B - z_A &= z'_B - z'_A \\ &= (az_B + b) - (az_A + b) \\ &= a(z_B - z_A) \end{aligned}$$

Or le points $A$ et $B$ sont distincts, alors $a = 1$, on obtient :

$$z_B - z_A = z_B - z_A$$

Ainsi

$$z_A = z'_A = z_A + b$$

On en déduit que $b = 0$

D'où

$$z'_A = z_A$$

De même

$$z'_B = z_B$$

Alors l'écriture complexe de $s$ est $z' = z$

D'où la similitude plane directe $s$ est l'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$.

### 1.7.2 Rotation : Cas où $a \neq 1$ mais $|a| = 1$, $a \in \mathbb{C}$

**Approche géométrico-algébrique**

Soit $r$ la rotation de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et d'angle $\theta$ et soit $M$ et $M'$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$.

En partant de la définition géométrique de la rotation on a :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \, [2\pi] \end{cases}$$

On obtient en introduisant les affixes :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta \, [2\pi] \end{cases}$$

On obtient :

$$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = |e^{i\theta}|$$

Étant donné que les complexes $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ et $e^{i\theta}$ ont le même rapport 1 et le même angle $\theta$, alors ils sont égaux. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z' - \omega}{z - \omega} &= e^{i\theta} \\ z' - \omega &= e^{i\theta}(z - \omega) \\ z' &= e^{i\theta} z + \omega(1 - e^{i\theta}) \end{aligned}$$

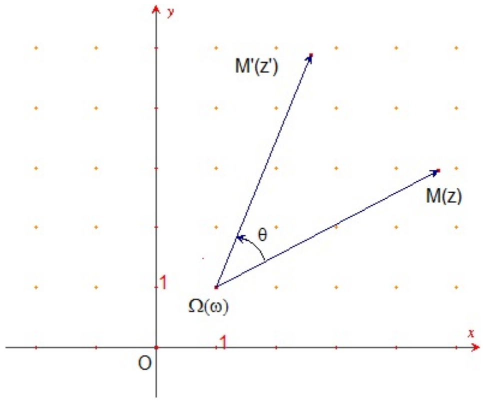
En posant

$$a = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad b = \omega(1 - e^{i\theta})$$

On obtient :

$$\boxed{z'=az+b}$$

Illustration

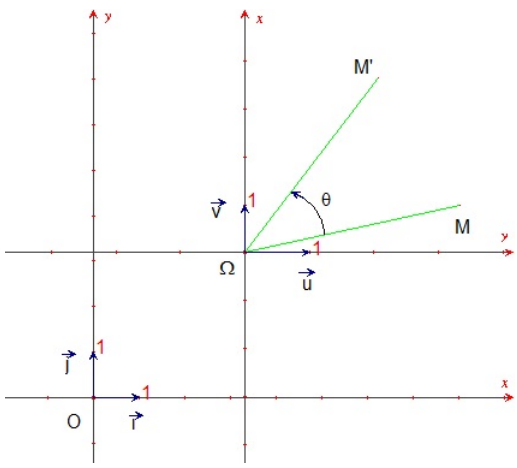



## Approche géométrico-analytico-algébrique

Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points du plan.

Soit un autre repère orthonormé $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Illustration




vu du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a l'expression de la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ :

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Vu de ce nouveau repère, on a maintenant l'expression de la rotation de centre $\Omega \neq (0;0)$ et d'angle $\theta$ et on obtient :

$$\begin{cases} x' - x_\Omega = (x - x_\Omega)\cos\theta - (y - y_\Omega)\sin\theta & (6) \\ y' - y_\Omega = (x - x_\Omega)\sin\theta + (y - y_\Omega)\cos\theta & (7) \end{cases}$$

En faisant la somme (6)+$i$(7), on obtient :

$$x' + iy' = x(\cos\theta + i\sin\theta) + iy(\cos\theta + i\sin\theta) - (x_\Omega + iy_\Omega)(\cos\theta + i\sin\theta) + x_\Omega + iy_\Omega$$

Or

$$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = z}$$

On a :

$$z' = e^{i\theta}z - \omega e^{i\theta} + \omega$$
$$z' = e^{i\theta}z + (1 - e^{i\theta})\omega$$

En posant

$$a = e^{i\theta} \qquad et \quad b = (1 - e^{i\theta})\omega$$

On obtient :

$$z' = az + b$$

**Résultat**

Les similitudes planes directes de rapport 1 sont appelées *déplacements*.
D'où un théorème suivant se dégage de ce résultat :

Théorème :

Tout déplacement est une translation ou une rotation.

Démonstration :

Rappelons qu'un déplacement est une similitude plane directe de rapport 1.
Ainsi, on a :

$$z' = az + b \qquad |a| = 1$$

On a :

$$|a| = 1 \Longleftrightarrow \quad \text{il existe un réel } \theta, \quad a = e^{i\theta}$$

Ainsi l'expression d'un déplacement devient :

$$z' = e^{i\theta}z + b \qquad (\star)$$

Discutons l'expression ($\star$) suivant les valeurs de $\theta$, on a :

- si $\theta = 0$, alors $e^{i\theta} = e^{i0} = 1$

On a :

$$z' = z + b, \quad \text{donc le déplacement est une translation.}$$

- si $\theta \neq 0$, alors $e^{i\theta} \neq 1$

On a :

$$z' = e^{i\theta} z + b, \quad \text{donc le déplacement est une rotation.}$$

Secondo lorsque le module de $|a| \neq 1$

### 1.7.3 Homothétie : Cas où $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}^\star$

**Approche géométrico-algébrique**

Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ et de rapport $k$ et soit $M$ et $M'$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$.

En partant de la définition géométrique de l'homothétie on a :

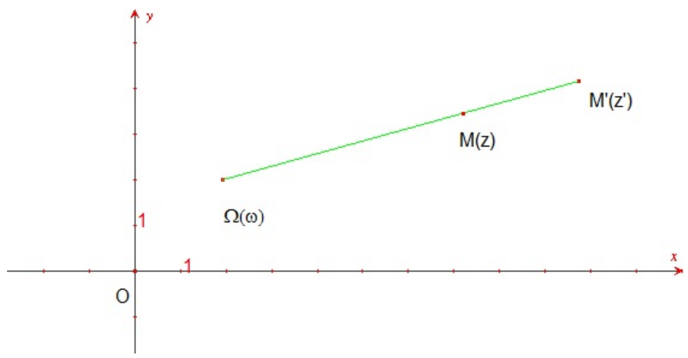
$$\begin{aligned} h(M) = M' &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = k(z - \omega) \\ &\iff z' = kz + \omega(1 - k\omega) \end{aligned}$$

En posant $a = k$ et $b = \omega(1 - k\omega)$

On obtient :

$$\boxed{z'=az+b}$$

Illustration



## Approche géométrico-analytico-algébrique

Soit Le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Soient $M(x, y)$, $M'(x', y')$ et $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ trois points du plan avec $\Omega \neq (0, 0)$.

Soit L'homothétie $h$ de centre $\Omega$ et de rapport $k$.

En partant de la définition géométrique de l'homothétie on a :

$$h(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$
$$\iff \begin{cases} x' - x_\Omega = kx - kx_\Omega \\ y' - y_\Omega = ky - ky_\Omega \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_\Omega & (8) \\ y' = ky + (1-k)y_\Omega & (9) \end{cases}$$

En faisant (8)+$i$(9), on obtient :

$$x' + iy' = k(x + iy) + (1-k)(x_\Omega + iy_\Omega)$$

Soit $z$, $z'$ et $\omega$ les affixes des points respectivement $M$, $M'$ et $\Omega$

On a :

$$z' = kz + (1-k)\omega$$

En posant $a = k$ et $b = (1-k)\omega$

On obtient la traduction complexe de l'homothétie :

$$\boxed{z'=az+b}$$

### Résultat

Si $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, alors une similitude plane directe d'expression complexe $z' = az + b$ est une homothétie de centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$ et de rapport $k = a$ .

### Cas particulier

Reprenons l'expression complexe de l'homothétie trouvée ci-dessous

$$z' = az + b$$

Si

$$b = 0$$

alors

$$z' = az$$

On obtient alors l'expression complexe de l'homothétie de centre $0(0;0)$ et de rapport $k = a \neq 1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

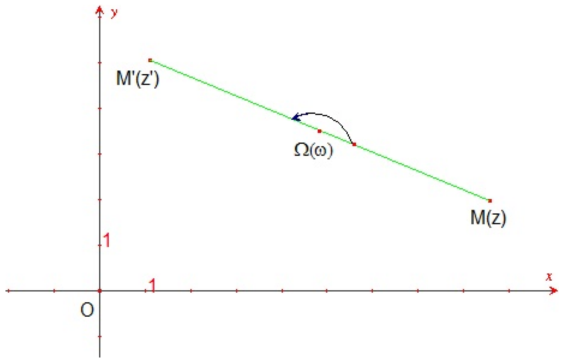
$$\boxed{z' = az, \qquad a \neq 1}$$

### 1.7.4 Symétrie centrale : Cas où $a = -1$

La symétrie centrale est un cas particulier de l'homothétie de rapport $-1$
Reprenons ainsi l'expression de l'homothétie trouvée ci-dessous :

$$\boxed{z' = -z + b}$$

Son centre est $\Omega$ d'affixe $\omega = \frac{b}{2}$
Illustration




## 1.8 Exercices d'application (E.A)

Consigne ***Rappelons que cette section (section 2.4) se fera pendant un temps moyen de*** $1h\ 00min$..

### 1.8.1 Énoncés des exercices d'application

**Énoncé de E.A. 1**

Dans le plan complexe, on considère les points $A$, $B$, $A'$ et $B'$ d'affixes respectives : $1+i$ ; $-3+2i$ ; $5-i$ et $-1+9i$.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe $s$ transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$.
Donner son écriture complexe et en déduire ses éléments caractéristiques.

**Énoncé de E.A. 2**

On considère la similitude directe $s$ d'écriture complexe :

$$z' = az + 2 + i$$

Déterminer $a$ pour que $s$ soit :
a) une translation dont on donnera le vecteur ;
b) une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ ;
c) une homothétie de rapport $-3$ ; quel est alors son centre ?
d) une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

### 1.8.2 Analyse a priori

**Objectifs des activités**

Ces exercices d'application ont pour but de reconnaître une similitude directe à partir de son expression complexe puis de déterminer ses éléments caractéristiques et aussi d'en déduire son expression analytique.

**Justification des activités**

Le choix de ces exercices se justifient par leur formulation, l'exercice 2 montre comment à partir des différentes valeurs prises par $a$ dans l'expression $z' = az + b$ on peut obtenir les différentes similitudes particulières.

**Erreurs possibles**

⋆ Dans l'exercice 1, les apprenants pourraient être tentés de démontrer l'existence unique de la similitude directe en oubliant qu'il faut : $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
⋆ Dans l'exercice 2, les apprenants pourraient ignorer que $a$ étant un nombre complexe, il peut s'écrire : $a = |a|e^{i\theta}$. C'est l'astuce dans les questions b) et d).

### 1.8.3 Solutions optimales des exercices d'application

**Solution optimale de E.A. 1**

**Démontrons qu'il existe une unique similitude plane directe**

Comme $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude plane directe $s$ qui transforme $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

**Donnons l'écriture complexe de $s$**

La similitude plane directe $s$ a pour écriture complexe

$$z = az + b \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

On a :

$$\begin{cases} s(A) = A' \\ S(B) = B' \end{cases} \iff \begin{cases} a(1+i) + b = 5 - i \\ a(-3+2i) + b = -1 + 9i \end{cases}$$

On obtient après calculs

$$\begin{cases} a = 2 - 2i \\ b = 1 - i \end{cases}$$

D'où l'écriture complexe de $s$ est :

$$z' = (2-2i)z + 1 - i$$

**Déduisons l'expression analytique de $s$**

En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

On a :

$$x' + iy' = (2-2i)(x+iy) + 1 - i$$

$$x' + iy' = 2x + 2iy - 2ix + 2y + 1 - i$$

D'où l'expression analytique de $s$ est :

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y + 1 \\ y' = 2y - 2x - 1 \end{cases}$$

**Solution optimale de E.A. 2**

L'expression complexe de la similitude plane est :

$$z' = az + 2 + i$$

**Déterminons la valeur de $a$ pour que $s$ soit :**

a) une translation

On a $z' = z + 2 + i$

On en déduit le vecteur de translation $u$ d'affixe $2 + i$

b) une rotation d'angle $\frac{\pi}{4} \Longleftrightarrow |a| = 1$ avec $a \in \mathbb{C}^*$
On a :

$$\begin{aligned} a &= e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) une homothétie de rapport $-3$
Comme $s$ est une homothétie, son rapport est $a$
Donc on a :

$$a = -3$$

Son centre $\Omega$ a pour affixe

$$\omega = \frac{2+i}{4}$$

c'est-à-dire

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$$

d) $s$ est une similitude plane directe de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Comme $a = 2$ et l'angle de la similitude est $\frac{2\pi}{3}$, On a :

$$a = |a|e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On obtient :

$$a = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

D'où

$$a = -1 + i\sqrt{3}$$

# Chapitre 2

# Similitudes planes indirectes

## 2.1 Activité préparatoire

### 2.1.1 Énoncé de l'activité préparatoire

**Titre :**

Traduction complexe d'une similitude indirecte définie comme composée d'une similitude directe et d'une réflexion

**Énoncé :**

Soit $\mathcal{P}$ un plan orienté, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ ; soient $s$ une similitude plane directe et $\sigma$ une symétrie axiale d'axe $(\Delta)$.

1) Donner l'écriture complexe de $s$.
2) Rappeler la définition de la réflexion (symétrie axiale) d'axe quelconque $(\Delta)$.

   Soient $M$ et $M'$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$.
3) En prenant pour $(\Delta)$ l'axe $(O;\vec{u})$, donner l'écriture complexe de la symétrie d'axe $(O;\vec{u})$.
4) Déterminer $s \circ \sigma(z)$ et $\sigma \circ s(z)$.
   Que dire de la commutativité de la composition de $s$ et $\sigma$ ?
   Déduire la nature de l'expression trouvée en vous servant des résultats sur les similitudes planes directes et des réflexions (symétries axiales) vus dans le cadre géométriques.
5) Soit une similitude plane directe d'écriture complexe

$$z' = (1+i)z + 3 + i,$$

   et soit une symétrie $\sigma$ d'axe $(O;\vec{u})$, l'axe des réels purs, d'expression complexe

$$z' = 2i\bar{z}$$

   On pose : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
   Donner les expressions analytiques de $s$ et de $\sigma$.

6) En partant des expressions trouvées, déduire l'expression analytique de $M'(x,y)$ image de $M(x,y)$ par la composée $s \circ \sigma$ puis l'expression complexe associée. Comparer la forme de l'expression obtenue avec celle obtenue à la question 4).

### 2.1.2 Analyse a priori

**Objectif de l'activité**

L'objectif de cette activité est d'obtenir la traduction complexe des similitudes planes indirectes comme composées d'une similitude plane directe et d'une réflexion.

**Schéma adapté**

Dans cette activité deux schémas d'approches ont été adaptés, nous avons dans l'ordre :

**Cadre géométrique** $\Longrightarrow$ **Cadre algébrique**

puis

**Cadre géométrique** $\Longrightarrow$ **Cadre analytique** $\Longrightarrow$ **Cadre algébrique**

**Justification de l'activité**

L'intérêt de cette activité réside dans le fait qu'elle met en évidence les deux approches abordées dans cette ressource pour obtenir la traduction complexe des similitudes planes, dans notre cas les similitudes indirectes.

Cette traduction peut se faire par l'approche géométrico-algébrique ou par l'approche géométrico-analytico-algébrique.

**Erreurs possibles**

Pour résoudre cette activité les apprenants peuvent être confrontés à :

- l'oubli de la définition de la réflexion (symétrie axiale) ;
- des obstacles pour déterminer l'expression complexe de la réflexion d'axe $(O;\vec{u})$ en ayant l'intuition que le point $M'$ est le conjugué de $M$.

### 2.1.3 Solution optimale de l'activité préparatoire

1) **Écriture complexe de $s$**
$s$ étant une similitude plane directe, son expression complexe est :

$$z' = az + b$$

2) **Définition de la réflexion d'axe quelconque**
La réflexion (symétrie axiale) d'axe $\Delta$ est la transformée qui laisse invariant tout point de $\Delta$ et qui transforme tout autre point $M$ du plan ne se situant pas sur $\Delta$ en un point $M'$ tel que $\Delta$ soit médiatrice du segment $[MM']$

3) **Écriture complexe de la réflexion d'axe $(O;\vec{u})$**
Prenons $(\Delta)$ pour l'axe $(O;\vec{u})$
Soit $z$ l'affixe de $M$ et $z'$ l'affixe de $M'$, on a :
Ici le point $M'$ est le conjugué de $M$.
D'où

$$z' = \bar{z}$$

4) **Déterminons $s \circ \sigma(z)$**
D'après les questions 1) et 3),
$s$ a pour expression complexe $s(z) = z' = az + b$
$\sigma$ a pour expression complexe $\sigma(z) = z' = \bar{z}$
- D'une part, l'image de $z$ par la composée $s \circ \sigma$ donne :

$$\begin{aligned} z' = s \circ \sigma(z) &= s\left[\sigma(z)\right] \\ &= s(\bar{z}) \\ s \circ \sigma(z) &= a\bar{z} + b \end{aligned}$$

D'où

$$z' = a\bar{z} + b$$

- D'autre part, l'image de $z$ par la composée $\sigma \circ s$ donne :

$$\begin{aligned} z' = \sigma \circ s(z) &= \sigma\left[s(z)\right] \\ &= \sigma(az + b) \\ &= \overline{az + b} \\ \sigma \circ s(z) &= \bar{a}\bar{z} + \bar{b} \end{aligned}$$

D'où

$$\sigma \circ s(z) = \bar{a}\bar{z} + \bar{b}$$

On en déduit que la composition de $s$ et de $\sigma$ n'est pas commutative.

Étant donné que la composée d'une similitude plane directe et d'une réflexion est une similitude plane indirecte, on déduit que

$$z' = a\bar{z} + b$$

est l'écriture complexe d'une similitude plane indirecte.

5) **Déterminons les expressions analytiques de $s$ et de $\sigma$**

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

En partant de l'expression complexe de $s$, on a :

$$\begin{aligned} z' &= -4iz + 3 + i \\ &= -4ix + 4y + 3 + i \end{aligned}$$

On en déduit l'expression analytique de $s$ :

$$\begin{cases} x' = 4y + 3 \\ y' = -4x + 1 \end{cases}$$

De même pour $\sigma$, son expression analytique est :

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

6) **Déduisons l'expression analytique de $s \circ \sigma$**

On obtient :

$$\begin{cases} x'' = 4y' + 3 = 4(2x) + 3 = 8x + 3 \\ y'' = -4x' + 1 = -4(2y) + 1 = -8y + 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} x' = 8x + 3 & (a) \\ y' = -8y + 1 & (b) \end{cases}$$

En additionnant $(a) + i(b)$ On en déduit son expression complexe :

$$z' = 8\bar{z} + 3 + i$$

L'expression obtenue a la même forme que celle obtenue à la question 4), c'est-à-dire

$$z' = a\bar{z} + b \qquad \text{avec} \quad a = 8 \quad \text{et} \quad b = 3 + i$$

Donc

$$z' = 8\bar{z} + 3 + i$$

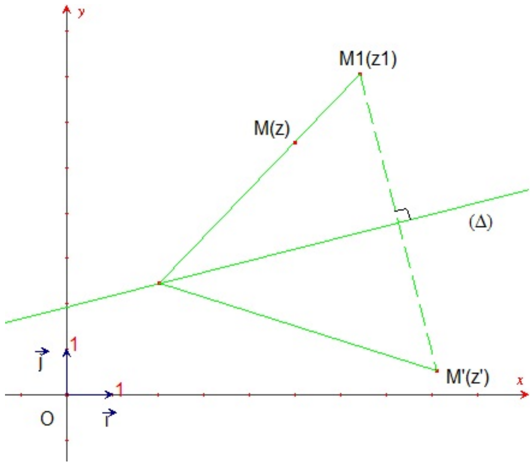
est aussi une similitude plane indirecte.

## 2.2 Définition

Une similitude plane indirecte est la composée non commutative d'une homothétie et d'un antidéplacement ; son expression complexe est de la forme :

$$z' = a\bar{z} + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

Illustration




**N.B. :** *Tout antidéplacement est soit une symétrie axiale ou soit une symétrie glissée.*

## 2.3 Exemples

- $z' = 2i\bar{z} - 5i$
- $z' = (\sqrt{3} + i)\bar{z} + 1 + i$
- $z' = -\bar{z} + 4i$

Théorème :

Les similitudes planes indirectes transforment les angles orientés en leurs opposés.

## 2.4 Caractéristiques d'une similitude plane indirecte

Une similitude plane indirecte notée $\bar{s}$ est caractérisée par son centre $\Omega$, son rapport noté $k$ et son axe noté $\Delta$. On la note aussi :

$$\bar{s} = sim(\Omega, k, \Delta).$$

### 2.4.1 Rapport de la similitude

Le rapport $k$ de la similitude est le module de $a$.

$$k = |a| > 0$$

Propriété :

Toute similitude plane indirecte de rapport $k = |a| = 1$ est un antidéplacement (symétrie axiale ou symétrie glissée).

### 2.4.2 Centre de la similitude

Le centre de la similitude plane indirecte est le point invariant de la similitude.

Théorème :

Toute similitude plane indirecte autre que la symétrie glissée admet un unique point invariant appelé centre de la similitude plane indirecte.

Démonstration :

Soit $\bar{s}$ une similitude plane indirecte d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ et soit $\omega$ l'affixe de $\Omega$. On a :

$$\begin{aligned}
\bar{s}(\Omega) = \Omega &\iff \omega = a\bar{\omega} + b \\
&\iff \omega = a(\overline{a\bar{\omega} + b}) + b \\
&\iff \omega(1 - a\bar{a}) = a\bar{b} + b \\
&\iff \omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - a\bar{a}} = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

### 2.4.3 L'axe de la similitude

L'axe de la similitude noté $(\Delta)$ est l'ensemble des points invariants par la similitude indirecte.

## Approche géométrico-algébrique

Pour trouver l'axe de la similitude $(\Delta)$, il suffit de trouver un point l'appartenant puis sa direction, c'est-à-dire un vecteur qui le dirige.

En effet, le centre de la similitude indirecte $\Omega$ d'affixe $\omega$ est le point invariant par la similitude indirecte.

C'est-à-dire : $s(\bar{\Omega}) = \Omega$ d'affixe $\omega$.

On a :

$$\omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

Et la direction de cet axe est donnée par le vecteur $\vec{u}$ telle que :

$$\vec{u}\left(1 + \frac{a}{|a|}\right)$$

D'où l'axe de la similitude plane indirecte est la droite passant par le centre $\Omega$ d'affixe $\omega = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(1 + \frac{a}{|a|}\right)$.

## Approche géométrico-analytico-algébrique

L'axe de la similitude est l'ensemble des points invariants déterminé par :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

On a :

$$\begin{aligned} z' - \omega &= k(z - \omega) \\ a\bar{z} + b - \omega &= k(z - \omega) \end{aligned}$$

Comme $a$, $b$ et $\omega$ sont des nombres complexes, nous posons :

$$a = a_1 + ia_2$$

$$b = b_1 + ib_2$$

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (a_1 + ia_2)(x - iy) + b_1 + ib_2 - \omega_1 - i\omega_2 &= k(x - \omega_1 + iy - i\omega_2) \\ (a_1x + ya_2 + b_1 - \omega_1) + i(-a_1y + a_2x + b_2 - \omega_2) &= k(x - \omega_1) + ik(y - \omega_2) \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on a :

$$\begin{cases} a_1x + ya_2 + b_1 - \omega_1 = k(x - \omega_1) \\ -a_1y + a_2x + b_2 - \omega_2 = k(y - \omega_2) \end{cases}$$

L'une de ces deux équations est bien l'équation de l'axe de la similitude plane indirecte.

**N.B. :** *Dans la pratique les deux équations seront équivalentes, donc chacune de ces deux équations représentera l'équation de l'axe de la similitude plane indirecte.*

Exemple d'application

Déterminer et caractériser l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ , z \longmapsto f(z) = z' = (1-i)\bar{z} + 4i + 1.$$

Consigne :

L'objectif de cette exemple est que l'apprenant applique les deux approches étudiées ci-dessus pour déterminer les éléments caractéristiques de cette application c'est-à-dire : le rapport, le centre et l'axe.

Solution de l'exemple d'application

Détermination de l'application

L'application $f$ est de la forme :

$$z' = a\bar{z} + b$$

Elle est donc un antidéplacement, avec $a = 1 - i$ et $b = 4i + i$

Comme $|a| = \sqrt{2} \neq 1$, donc $f$ est une similitude plane indirecte.

Caractérisation de l'application

Caractériser $f$ revient à déterminer le rapport, le centre et l'axe de $f$.

*Trouvons le rapport de $f$*

Rappelons que $z' = a\bar{z} + b$, alors le rapport $k$ est :

$$k = |a| = \sqrt{2}$$

D'où

$$\boxed{k = \sqrt{2}}$$

*Trouvons le centre de $f$*

**Approche géométrico-algébrique**

Soit $\Omega$ le centre de $f$ d'affixe $\omega$, qui est donné par la formule suivante :

$$\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}}$$

$$\begin{aligned}
\omega = \frac{a\bar{b}+b}{1-a\bar{a}} &= \frac{(1-i)(1-4i)+4i+1}{1-(1-i)(1+i)} \\
\omega &= \frac{1-4i-i-4+4i+1}{1-(1+1)} \\
\omega &= 2+i
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\omega = 2+i}$$

**Approche géométrico-algébrico-analytique**

Posons $z' = x'+iy'$ et $\bar{z} = x-iy$, on a :

$$\begin{aligned}
z' &= (1-i)\bar{z}+4i+1 \\
x'+iy' &= (1-i)(x-iy)+4i+1 \\
x'+iy' &= x-iy-ix-y+4i+1
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on en déduit :

$$\begin{cases} x' = x-y+1 \\ y' = -x-y+4 \end{cases} \qquad (c)$$

Le centre $\Omega$ est un point invariant de $f$, alors $f(\Omega) = \omega$, ainsi :

$$\begin{cases} x = x-y+1 \\ y = -x-y+4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\omega = 2+i}$$

*Trouvons l'axe de $f$*

**Approche géométrico-algébrique**

L'axe de $f$ est la droite passant par le centre $\omega$ et de vecteur de direction $\vec{u}\left(1+\frac{a}{|a|}\right)$.

Or

$$1+\frac{a}{|a|}=1+\frac{1-i}{1+i}=1-i$$

Ainsi

$\boxed{\omega = 2+i}$ et $\boxed{\vec{u}(1-i)}$

**Approche géométrico-algébrico-analytique**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit : $\Omega(x_\omega;y_\Omega)$, $M(x;y)$ $M'(x';y')$
L'axe est déterminé par la relation suivante :

$$\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$$

On a :

$$\begin{cases} x'-x_\Omega = k(x-x_\Omega) \\ y'-y_\Omega = k(y-y_\Omega) \end{cases} \iff \begin{cases} x'-2=\sqrt{2}(x-2) \\ y'-1=\sqrt{2}(y-1) \end{cases}$$

D'après le système d'équations (c), on a :

$$\begin{cases} x-y+1-2=\sqrt{2}(x-2) \\ -x-y+4-1=\sqrt{2}(y-1) \end{cases}$$

Après calculs simples, on trouve :

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x-y+2\sqrt{2}-1=0 \\ (1+\sqrt{2})y+x-\sqrt{2}-3=0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes. Chacune d'elle représente l'équation de la l'axe de la similitude $f$.

**Théorème**

La composée de deux similitudes planes indirectes est une similitude plane directe.

**Démonstration**

Soient deux similitudes planes indirectes distinctes $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$ d'expressions complexes respectives $z_1'=a_1\bar{z}+b_1$ et $z_2'=a_2\bar{z}+b_2$

On a :

$$\begin{aligned} z'' &= a_2\bar{z'} + b_2 \\ &= a_2\overline{(a_1\bar{z} + b_1)} + b_2 \\ &= a_2\bar{a}_1\bar{\bar{z}} + a_2\bar{b}_1 + b_2 \\ &= az + b \qquad \text{en posant} \;\; a = a_2\bar{a}_1 \;\; \text{et } b = \bar{b}_1 + b_2 \end{aligned}$$

D'où

$$z' = az + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

**Théorème**

La composée d'une similitude plane directe et d'une similitude plane indirecte est une similitude plane indirecte.

**Démonstration**

Soient une similitude plane indirecte $s_1$ et $\bar{s}_2$ d'expressions complexes respectives $z_1' = a_1 z + b_1$ et $z_2' = a_2\bar{z} + b_2$

On a :

$$\begin{aligned} z'' &= a_2\bar{z'} + b_2 \\ &= a_2\overline{(a_1 z + b_1)} + b_2 \\ &= a_2\bar{a}_1\bar{z} + a_2\bar{b}_1 + b_2 \\ &= a\bar{z} + b \qquad \text{en posant} \;\; a = a_2\bar{a}_1 \;\; \text{et } b = a_2\bar{b}_1 + b_2 \end{aligned}$$

D'où

$$z' = a\bar{z} + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

## 2.5 Similitudes particulières

Rappelons que l'expression complexe de la similitude plane indirecte est :

$$z' = a\bar{z} + b$$

et que

$$k = |a|$$

Si le module $|a| = 1$ ($a \in \mathbb{C}^*$), $\bar{s}$ est soit une symétrie axiale appelée aussi réflexion soit une symétrie glissée.

Nous allons examiner l'ensemble des points invariants de $\bar{s}$ noté $Inv(\bar{s})$ :

Reprenons l'affixe du centre de la similitude indirecte qui est le point invariant, on a :

$$\omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

### 2.5.1 Réflexion ou Symétrie axiale

Si le module $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b = 0$ alors, $\bar{s}$ admet une droite de points invariants.

Ainsi, $\bar{s}$ est une réflexion ou une symétrie axiale d'axe $(\Delta)$ passant par au moins deux points :

le centre de la similitude $\Omega$ d'affixe

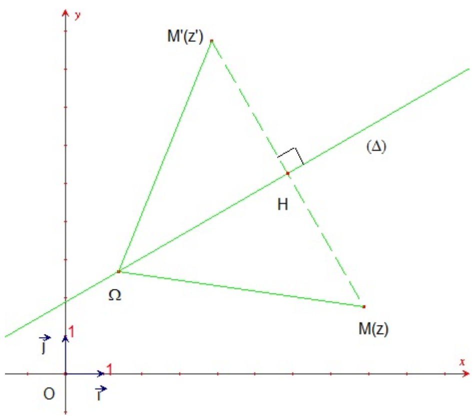
$$\omega = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$$

et un autre point $A_0$ d'affixe

$$z_{A_0} = \frac{1}{4}(b - a\bar{b})$$

D'où la réflexion est une similitude plane indirecte de centre $\Omega$, de rapport 1 et d'axe $\Delta$.

Illustration




Théorème

Si la similitude plane indirecte admet deux points invariants distincts $A$ et $B$ alors elle est une réflexion (symétrie axiale) d'axe $(AB)$.

Démonstration

Posons $s_{(AB)}$ la réflexion d'axe $(AB)$ et $\bar{s}$ la similitude plane directe.

Notons $s' = \bar{s} \circ s_{AB}$, alors $s'$ est une similitude plane directe comme composée de deux similitudes planes indirectes.

De plus :

$s'(A) = \bar{s} \circ s_{AB}(A) = \bar{s}\,[s_{AB}(A)] = \bar{s}(A) = A$

et
$s'(B) = \bar{s} \circ s_{AB}(B) = \bar{s}\left[s_{AB}(B)\right] = \bar{s}(B) = B$
Ainsi $s'$ laisse les points $A$ et $B$ invariants, donc $s'$ est une identité du plan, c'est-à-dire :

$$s' = \bar{s} \circ s_{AB} = Id_{\mathcal{P}}$$

Ainsi

$$\bar{s} \circ s_{AB} \circ s_{AB} = Id_{\mathcal{P}} \circ s_{AB}$$

On a :

$$\bar{s} \circ Id_{\mathcal{P}} = Id_{\mathcal{P}} \circ s_{AB} = \quad \text{car} \quad s_{AB} \circ s_{AB} = Id_{\mathcal{P}}$$

D'où

$$\bar{s} = s_{AB}$$

### 2.5.2 Symétrie glissée

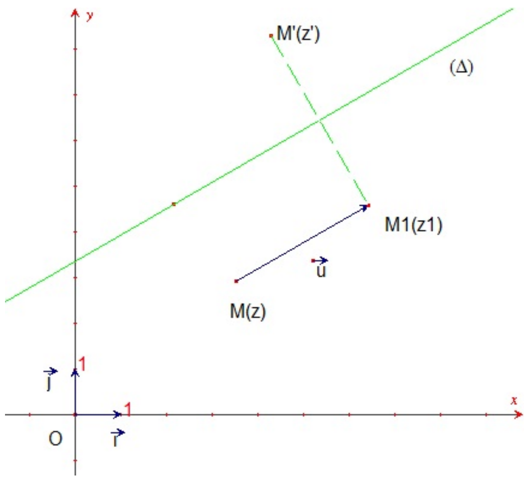
Si le module $|a| = 1$ et $a\bar{b} + b \neq 0$ alors, $\bar{s}$ n'a aucun point invariant.
Ainsi, $\bar{s}$ est une symétrie glissée de vecteur directeur $\vec{u}$ d'affixe :

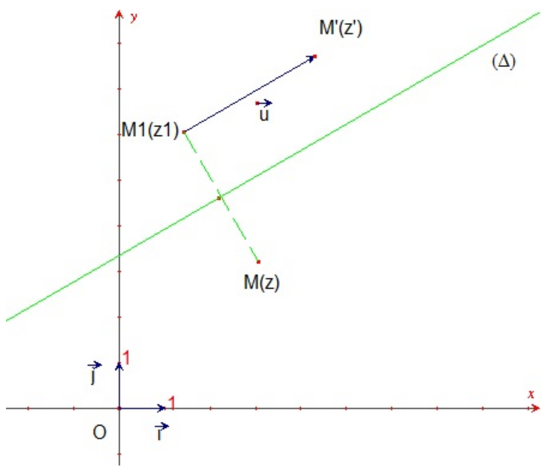
$$z_{\vec{u}} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b)$$

et d'axe passant par le point $A_0$ d'affixe :

$$z_{A_0} = \frac{1}{4}(b - a\bar{b})$$

Illustration



## 2.6 Exercices d'application (E.A)

Consigne ***Rappelons que cette section (section 2.4) se fera pendant un temps moyen de*** $1h\ 00min$..

### 2.6.1 Énoncés des exercices d'application

**Énoncé de E.A. 1**

Soient deux applications $f$ et $g$ telles que

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ , z \longmapsto f(z) = z' = -i\bar{z} + 2 + 4i$$

et

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ , z \longmapsto g(z) = z' = i\bar{z} + 1 - i$$

1) Déterminer et caractériser $f$.

2) Faire de même pour l'application $g$.

**Énoncé de E.A. 2**

Dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ du plan complexe, on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $z_A = 3 - i$ et $z_B = -1 + i$. et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 3$.

1) Donner l'écriture complexe de la réflexion d'axe $(AB)$ notée $s_{(AB)}$.
2) Donner l'écriture complexe de la réflexion d'axe $\mathcal{D}$ notée $s_{\mathcal{D}}$.
3) On considère l'application $f$ qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que :

$$z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + \frac{2}{5} + \frac{26}{5}i$$

a) Montrer que $f$ est un antidéplacement. Déterminer l'ensemble des points invariants de $f$.
$f$ est-elle une réflexion ?
b) Montrer que $f \circ s_{\mathcal{D}}$ est un déplacement.
c) Déterminer l'écriture complexe de $f \circ s_{\mathcal{D}}$ et en déduire les éléments caractéristiques de $f \circ s_{\mathcal{D}}$.
d) En déduire une décomposition simple de $f$.

### 2.6.2 Analyse a priori

**Objectifs des activités**

Ces exercices d'application ont pour but de reconnaitre une similitude plane indirecte à partir de son expression complexe puis la caractériser.

**Justification des activités**

Dans ces exercices, outre de la manière classique, on étudie une autre possibilité d'obtenir une similitude plane indirecte.

Dans l'exercice 2 en particulier, on montre comment à partir de deux antidéplacements on obtient une similitude plane directe et de déduire que la symétrie glissée est une composée d'une translation et d'une réflexion.

**Erreurs possibles**

- Dans l'exercice 1 à la question 1-b), les apprenants seront tentés de considérer comme vecteur de translation le vecteur $\vec{u}(-2;2)$ au de $\vec{u}(-1;1)$
- Dans l'exercice 2 à la question 3-d), les apprenants peuvent avoir des difficultés pour trouver la décomposition de $f$. C'est-à-dire
  de
  $$f \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} = t \circ s_{\mathcal{D}}$$
  à
  $$f = t \circ s_{\mathcal{D}}$$

### 2.6.3 Solutions optimales des exercices d'application

**Solution optimale de E.A. 1**

**1-a) Déterminons l'application $f$.**

$$f(z) = z' = -\bar{z} + 2 + 4i$$

$f$ est de la forme $z' = a\bar{z}+b$ avec $a = -i$, $b = 2+4i$ alors $f$ est un antidéplacement.

Le module de $a$ donne $|a| = 1$, alors $f$ est soit une symétrie axiale soit une symétrie glissée.

Déterminons l'ensemble des points invariants de $f$

$$z' = -i\bar{z} + 2 + 4i$$

On a :

$$\begin{aligned} x' + iy' &= -i(x - iy) + 2 + 4i \\ &= -x - y + 2 + 4i \end{aligned}$$

Soit $\Omega$ le point invariant d'affixe $z_\Omega$ telle que $f(z_\Omega) = z_\Omega$.
On a : $x + iy = -ix - y + 2 + 4i$
Par identification

$$\begin{cases} x = -y + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Le système est incompatible, alors $Inv(f) = \varnothing$
Donc $f$ est une symétrie glissée.

**1-b) Caractérisons** $f$

• Vecteur translation

Pour cela, calculons $f \circ f$.

$$\begin{aligned} (f \circ f)(z) &= f\left[f(z)\right] = f(z') = z" \\ z" &= -i(iz + 2 - 4i) + 2 + 4i = z + 2i - 2 \end{aligned}$$

Donc le vecteur de translation est $\vec{u}(-1; 1)$.

• Axe de symétrie

L'axe est une droite d'équation $(\Delta)$ : $ax + by + c = 0$ avec $\vec{u} // \vec{v}_{(\Delta)}$ avec $\vec{v}_{(\Delta)}$ le vecteur directeur de $(\Delta)$.
On a : $(\Delta)$ : $ax + by + c = 0$.
Donc $f$ est une symétrie glissée, caractérisée par $\vec{u}(-1; 1)$ et d'axe $(\Delta)$ : $ax + by + c = 0$.

**2) Déterminons et Caractérisons** $g$

$f(z) = z' = i\bar{z} + 1 - i$
Par analogie de E.A .1, $g$ est un antidéplacement.

Comme $|a| = 1$ et $Inv(g) = (\Delta)$ d'équation $x - y - 1 = 0$
Alors $g$ est une symétrie axiale d'axe $(\Delta)$.

## Solution optimale de E.A. 2

1) **Donnons l'expression complexe de $s_{AB}$**

$s_{AB}$ a pour écriture complexe :

$$z' = a\bar{z} + b \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{C}$$

On a :

$$\begin{cases} s_{AB}(A) = A \\ s_{AB}(B) = B \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} a(\overline{3-i}) + b = 3 - i \\ a(\overline{-1+i}) + b = -1 + i \end{cases}$$

Après calcul, on trouve :

$$\begin{cases} a = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ b = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \end{cases}$$

D'où l'écriture complexe de $s_{AB}$ est :

$$z' = \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

2) **Donnons l'expression complexe de $s_{\mathcal{D}}$**

Soient deux points $C$ et $D$ d'affixes respectives $2 - i$ et $3 - 3i$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$ tels que :

$$\begin{cases} s_{\mathcal{D}}(C) = C \\ s_{\mathcal{D}}(D) = D \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} a(\overline{2-i}) + b = 2 - i \\ a(\overline{3-3i}) + b = 3 - 3i \end{cases}$$

On trouve après calcul :

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \\ b = \frac{12}{5} + \frac{6}{5}i \end{cases}$$

D'où l'écriture complexe de $s_{\mathcal{D}}$ est :

$$z' = \left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z} + \frac{12}{5} + \frac{6}{5}i$$

3) a) **Montrons que $f$ est un antidéplacement**

L'écriture complexe de $f$ est de la forme :

$$z' = a\bar{z} + b \qquad \text{avec} \quad a \neq 0,$$

donc $f$ est une similitude plane indirecte.
De plus :

$$|-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i| = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}} = 1$$

D'où $s$ est un antidéplacement.

**Déterminons l'ensemble des points invariants de $f$**

Considérons un point $M$ d'affixe $z = x+iy$ invariant par $f$, c'est-à-dire :

$$x+iy = \left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)(x-iy)+\frac{2}{5}+\frac{26}{5}i$$

On a :

$$5(x+iy) = (-3-4i)(x-iy)+2+26i$$

Par identification et après calcul, on obtient :

$$\begin{cases} 4x+2y = 1 \\ 4x+2y = 26 \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution.
Donc il n'y a de points invariants pour $f$.

**$f$ est-elle une réflexion ?**

Comme $f$ est un antidéplacement qui n'a aucun point invariant, on en déduit que $f$ n'est pas *une réflexion mais plutôt une symétrie glissée.*

b) **Montrons que $f \circ s_{\mathcal{D}}$ est un déplacement** $f \circ s_{\mathcal{D}}$ est un déplacement comme composée de deux antidéplacement.

c) **Déterminons l' expression complexe de $f \circ s_{\mathcal{D}}$**
Après calcul, l'écriture complexe de $f \circ s_{\mathcal{D}}$ est :

$$z' = z-2+4i$$

D'où $f \circ s_{\mathcal{D}}$ est une translation de vecteur $u$ d'affixe $-2+4i$.
$u$ d'affixe $-2+4i$ est l'élément caractéristique de $f \circ s_{\mathcal{D}}$

d) **Déduisons une décomposition simple $f$**
Soit $t$ la translation de vecteur $u$, On a :

$$f \circ s_{\mathcal{D}} = t$$

on en déduit

$$f \circ s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}} = t \circ s_{\mathcal{D}}$$

D'où

$$f = t \circ s_{\mathcal{D}}$$

# Devoir sur table

Consigne ***Ceci est un devoir sur table et surveillé. Aucun document est autorisé sauf la calculatrice non programmable. La durée du devoir est de***$(2h\,00min)$.

## Énoncé du devoir sur table

### Exercice 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ orienté on considère un carré $ABCD$ tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

On désigne par $I$ et $K$ les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[CD]$. Représenter ces points sur une figure (On choisira $AB = 4cm$).

On se propose d'étudier la similitude directe $S$ telle que $S(A) = I$ et $S(C) = K$.

1) **Recherche géométrique des éléments de $S$.**
   a) Donner le rapport et l'angle de $S$.
   b) Démontrer que le centre $\Omega$ de $S$ est le point d'intersection autre que $I$ des cercles de diamètre $[AD]$ et $[IC]$. Placer ces cercles et $\Omega$ sur la figure.

2) **Recherche du centre de la similitude à l'aide des nombres complexes.**
   Le plan est rapporté au repère direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   a) Donner les affixes des points $A$ , $C$ , $I$ , et $K$
   b) Donner l'écriture complexe de $S$.
   c) En déduire les coordonnées de $\Omega$.

### Exercice 2

Soit $f$ l'application du plan d'écriture complexe

$$z' = \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i\right)\bar{z} - \frac{12}{13} + \frac{18}{13}i$$

1) Justifier que $f$ est un antidéplacement.

2) Déterminer $f \circ f$.
3) On considère les points $A(i)$ et $B(-1-4i)$. Déterminer les images de $A$ et $B$ par $f$ et en déduire deux points fixes de $f$.
4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f$.

# Analyse a priori du devoir sur table

## Objectifs du devoir sur table

Le but de ce devoir sur table est de diagnostiquer les capacités des apprenants à résoudre des problèmes concernant les similitudes et sa traduction complexe. Ce devoir a pour objectifs :

- de rechercher géométriquement les éléments d'une similitude plane directe à partir d'une figure géométrique ;
- de rechercher le centre d'une similitude à l'aide des nombres complexes ;
- de déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une similitude plane indirecte (ici il s'agit d'une symétrie axiale).

## Justification du devoir sur table

Ce devoir a été élaboré de sorte que les savoirs, les méthodes et les approches développés dans le cours soient mis en valeurs.

Le choix de *l'exercice 1* est d'appliquer l'approche développée dans le schéma cadre géométrique-cadre algébrique.

*L'exercice 2* permet de mette en œuvre une approche pour déterminer l'axe d'une symétrie axiale.

## Choix de variables

Dans *l'exercice 1*, un carré et la distance $AB = 4cm$ a été choisie de manière à rendre le schéma clair, précis et aussi de permettre à obtenir de la similitude des valeurs familières du rapport $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et de l'angle $\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Les affixes des points du carré ont été choisies pour trouver les coordonnées du centre qui sont peu fréquentes et faisant douter un peu les apprenants.

Dans *l'exercice 2*, le choix de l'expression complexe de $f$ a été fait pour obtenir un antidéplacement et le coefficient de $\bar{z}$ permet de trouver une similitude plane indirecte.

## Erreurs possibles

Dans *l'exercice 1* les apprenants seront tentés d'oublier l'orientation du carré $ABCD$ et de trouver l'angle de la similitude $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ au lieu de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Ils peuvent rentrer des difficultés et s'embrouiller pour démontrer l'unicité du centre $\Omega$ de la similitude.

Dans *l'exercice 2* : ils peuvent avoir des obstacles pour déterminer l'autre point fixe différent de $A$ pour $f$.

## Atouts possibles

Ils peuvent facilement déterminer le rapport de la similitude. Ils peuvent aussi bien montrer que le point $I$ ne peut pas être invariant et ils peuvent bien déterminer l'affixe du centre à partir de l'expression complexe de la similitude.

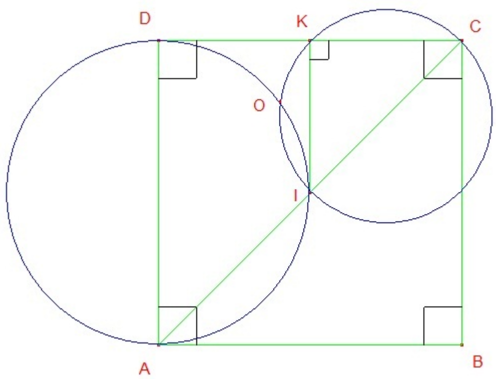
# Corrigé du devoir sur table

## Observation

Le corrigé de ce devoir est la solution experte c'est-à-dire celle établie par l'enseignant : c'est la solution idéale. Il peut arriver que les apprenants proposent d'autres procédures mais tout à fait équivalentes à la solution experte.

## Correction 1

**Voici la figure géométrique :**




**1)Recherche géométrique des éléments de $S$.**

**a)** $S(A) = I$ et $S(C) = K$

Le rapport de la similitude est

$$\frac{IK}{AC} = \frac{\frac{1}{2}a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

L'angle de la similitude est

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4}$$

D'où $S$ est donc une similitude plane de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

**b)** $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{4}$ donc $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI})$

On peut en déduire la cocyclicité des points $\Omega$, $D$, $A$ et $I$. Avec $\Omega$ appartient au cercle circonscrit au triangle $DAI$ ; c'est aussi le cercle de diamètre $[AD]$.
De même $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega K}) = (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4}$

On en déduit aussi que les points $\Omega$, $I$, $C$ et $K$ sont cocycliques donc $\Omega$ appartient au cercle de diamètre $[IC]$.

Ces deux cercles ont deux points d'intersection $\Omega$ et $I$.

Or $S(A) = I$, alors $I$ n'est pas le point invariant, donc le point invariant est $\Omega$.
D'où le point invariant pour $S$ est $\Omega$.

**2)Recherche du centre de $S$ à l'aide des nombres complexes.**

**a)** On obtient les affixes suivantes $0$ ; $1+i$ ; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2}+i$ respectivement pour les points $A$ ; $C$ ; $I$ et $K$.

**b)** La similitude $S$ est de la forme $z' = az + b$.
Or $S(A) = I$ et $S(c) = K$, alors on obtient :

$$\frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = b \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + i = a(1+i) + b$$

On obtient alors :

$$a = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

D'où

$$z' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

**c)** On en déduit $z_\Omega = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$ donc $\Omega$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$

D'où

$$\Omega = \left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

## Correction 2

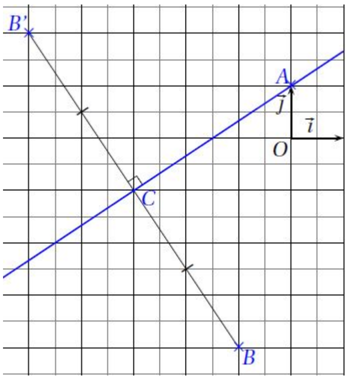
1) De par son expression complexe f est une similitude plane directe.
De plus
$$\left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right| = \sqrt{\frac{25}{169}+\frac{144}{169}} = 1$$
Donc $f$ est une similitude plane indirecte de rapport 1 c'est-à-dire un anti-déplacement.

2) $f\circ f$ a pour écriture complexe
$$z' = \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\left[\overline{\left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\bar{z}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i}\right]-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$$
C'est-à-dire
$$z' = \left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right|^2 z - \frac{6}{169}(5+12i)(2+3i)-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$$
On a :
$$\left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right|^2 = 1$$
et
$$(5+12i)(2+3i) = -26+39i$$
Donc $f\circ f$ a pour écriture complexe : $z' = z$
On en déduit que : $f\circ f = id_{\mathcal{P}}$.

3) Pour $z = i$ ; on a :
$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\bar{i}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i \\ &= -\frac{5}{13}i+\frac{12}{13}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i \\ &= i \end{aligned}$$
Donc $f(A) = A$.
Pour $z = -1-4i$ ; on a :
$$\begin{aligned} z' &= \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\left(\overline{-1-4i}\right)-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i \\ &= \frac{1}{13}(-5-48-12i+20i-12+18i) \\ &= -5+2i \end{aligned}$$

**4)** On a : $f(B') = f\circ f(B) = B$. Soit $C$ le milieu du segment $[B'B]$ ; $C$ est donc le point d'affixe : $-3-i$.

Les similitudes conservent le barycentre donc $f(C)$ est le milieu du segment $[B'B]$ ; $C$ est donc un autre point fixe de $f$.
$f$ est une similitude indirecte qui laisse invariants les points $A$ et $C$ ; $f$ est donc la symétrie d'axe $(AC)$.



# Devoirs "maison"

Observation

Les devoirs "maison" sont donnés pour permettre aux apprenants de faire "asseoir" les connaissances déjà acquises et de découvrir des variantes d'approches ou des situations de constructions géométriques ou encore des calculs longs pourront prendre plus du temps en situation de classe.

Le temps consacré aux devoirs sera suffisant (un ou deux jours par devoir). Ils peuvent travailler en groupe de deux ou plus, mais la rédaction sera individuelle. Ils ont aussi la possibilité d'utiliser le cahier contenant la leçon vue en classe, les livres, $\cdots$

## Devoir "maison" n°1

**Problème** [1]

1) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(o;\vec{u};\vec{v})$. Soient $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $z_A = 2+i$ , $z_B = 5+2i$ et $z_C = i$. $s_1$ désigne la symétrie d'axe $(AB)$.
   a) Démontrer que $s_1$ transforme tout point $M$ d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$ telle que
   $$s' = \left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\bar{z} + \left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)$$
   b) En déduire l'affixe de $C'$, symétrique de $C$ par rapport à $(AB)$.
   c) Démontrer que l'ensemble des points $M$ tels que $s'$ est imaginaire pur est la droite $(d)$ d'équation $4x+3y-1$.
   d) Vérifier que le point $C'$ appartient à $(d)$.

2) a) Démontrer que les droites $(d)$ et $(AB)$ sont sécantes en un point $\Omega$ dont on précisera l'affixe $\omega$.
   b) On désigne par $s_2$ la symétrie d'axe $(d)$ et par $f$ la transformation définie par $f = s_2 \circ s_1$. Justifier que $f$ est une similitude directe et préciser son rapport.

1. BAC de La Réunion, juin 2008

c) Déterminer les images des points $C$ et $\Omega$ par la transformation $f$.
d) Justifier que $f$ est une rotation dont on donnera le centre.

3) a) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation : $4x + 3y - 1$.
b) Déterminer les points de $(d)$ coordonnées entières dont la distance au point $o$ est inférieure à 9.

# Devoir "maison" n°2

## Exercice 1 :

Composition de deux similitudes

Montrer en utilisant les nombres complexes que :
$(i)$ la composée de deux similitudes planes directes est une similitude plane directe.
$(ii)$ la composée de deux similitudes planes indirectes est une similitude plane directe.
$(ii)$ que la composée d'une similitude plane directe et d'une similitude plane indirecte est une similitude plane indirecte.

## Exercice 2 :

Traduction complexe de la composée des similitudes

On considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectivement $-4 + i$ et $1 - i$ ;
$h$ est l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$,
$r$ est la rotation de centre $B$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et
$t$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) Déterminer les écritures complexes puis les expressions analytiques de $h$, $r$ et $t$.
2) Déterminer la nature de la transformation $r \circ t \circ h$ et son rapport.
3) Faire la figure et placer les points $A$ et $B$. Quelle est l'image de $A$ par $r \circ t \circ h$ ? et placer cette image dans la même figure.
4) Déterminer l'écriture complexe de $r \circ t \circ h$ et en déduire l'angle de la similitude.
5) En utilisant la question 4), vérifier que l'image de $A$ par $r \circ t \circ h$ est celle trouvée à la question 2).

## Exercice 3 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

*On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments invariants dans l'exercice.*

1) On considère les points $A$ d'affixe 1 et $B$ d"affixe $i$. On appelle $s$ la réflexion (symétrie axiale) $(AB)$.

Montrer que l'image $M'$ par $s$ d'un point $M$ d'affixe $z$ a pour affixe

$$z' = -i\bar{z} + 1 + i$$

.

2) On note $h$ l'homothétie de centre $A$ et de rapport $-2$. Donner l'écriture complexe de $h$.

3) On note $f$ la composée $h \circ s$.

a) Montrer que $f$ est une similitude.

b) Déterminer l'écriture complexe de $f$.

4) Soit $M'$ l'image de $M$ par $f$.

a) Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = -2\overrightarrow{AM}$ est la droite $(AB)$.

b) Démontrer que l'ensemble des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en $A$ à la droite $(AB)$.

# Exercices d'approfondissement

Observation

L'objectif de cette partie est d'approfondir les connaissances, les méthodes et les approches assimilées dans le cours, en activités préparatoires, en activités d'application et aux devoirs. L'apprenant va s'auto-évaluer et mesurer par la suite le degré de ses compétences et le niveau de ses difficultés. Ces exercices lui permettront aussi de bien s'entrainer pour les évaluations des aux différents examens.

Document professeur

Le document professeur évoque les raisons du choix des exercices formant cette feuille. Les raisons du choix des exercices sont qu'ils permettent aux apprenants de :

- distinguer et comprendre les deux approches utilisées dans cette ressource pour la traduction complexe des similitudes planes.
- bien utiliser les différents cadres employés dans ces approches.
- réaliser l'équivalence des définitions géométrique et complexe d'une similitude planes.
- déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une similitude.
- de donner les différentes expressions complexes des similitudes particulières et leurs caractéristiques.

**Exercice 1 :**

Nature et caractérisation d'une similitude

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications planes $f$ suivantes :

1) $z' = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 2i$
2) $z' = (1 + i)z + 4 + 2i$
3) $z' = -2iz - 4 + 2i$
4) $z' = 3\bar{z} + i + 3$

## Exercice 2

**Expressions complexe et analytique d'une similitude directe**

Déterminer les expressions complexes puis les expressions analytiques des similitudes planes directes de centre $\Omega$, de rapport $k$ et d'angle $\theta$ dans le cas suivants :

a) $\Omega(i)$ ; $k = \frac{2}{3}$ ; $\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) $\Omega(4)$ ; $k = -\frac{1}{2}$ ; $\theta = \frac{\pi}{6}$

c) $\Omega(1-2i)$ ; $k = \sqrt{2}$ ; $\theta = \frac{\pi}{4}$

## Exercice 3

**Traduction complexe des similitudes planes directe et indirecte**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique :1cm). On considère les ponts $A$, $B$, $A'$ *et* $B'$ d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i(\sqrt{3}-1)$ ; $z'_A = (\sqrt{3}-2) + i(\sqrt{3}+1)$ ; $z_B = (2+\sqrt{3}) + i(3-\sqrt{3})$ ; $z'_B = (2-\sqrt{3}) + i(3+\sqrt{3})$

1) Justifier l'existence et l'unicité d'une similitude directe $S$ et d'une similitude indirecte $S'$ qui transforment $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.
2) Déterminer des écritures complexes de $S$ et $S'$.
3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S$ et de $S'$.

## Exercice 4

**Traduction complexe d'une similitude directe à partir de son expression analytique**

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points de $\mathcal{P}$

On donne deux expressions analytiques :

$$(i) \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - 3 \\ y' = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Identifier et caractériser ces deux transformations.
2) Soient deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Établir la relation liant $z$ et $z'$ dans chacune de ces deux transformations.
3) Composer les deux applications issues de ces deux transformations.

## Exercice 5

**Composition d'une homothétie et d'une symétrie axiale**

Soit $g$ la similitude plane d'expression complexe :

$$z' = (4+3i)\bar{z} + 1 - 3i$$

.

1 Déterminer le rapport $k$ de la similitude $g$ et démontrer que $g$ admet un unique point fixe $\Omega$.

2 Soit $h$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$.
Démontrer que $g = h \circ s$, où $s$ est une symétrie axiale dont on précisera l'axe.

## Exercice 6

**Image d'un point par la composé d'une translation et d'une similitude directe**

Un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ de ce plan dont les affixes $z = x + iy$ vérifient

$$|(1+i)z - 2i| = 2$$

1) Calculer le carré du module du complexe $(1+i)z - 2i$ en fonction des coordonnées $(x; y)$ de $M$.
Déterminer $E$ par une équation cartésienne puis le reconnaitre et le dessiner.

2) On note $S$ la similitude directe de centre $O$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ et $t$ la translation de vecteur $-2\vec{v}$.

a) Un point $M(z)$, calculer l'affixe du point $S(M)$, puis l'affixe de $t \circ S(M)$.

b) Soit $C$ l'ensemble des points $M'(z')$ tels que : $|z'| = 2$

## Exercice 7

**Nature de la composé de deux similitudes planes directes**

Le plan $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On appelle affixe d'un point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$, le nombre complexe $z = x + iy$.

On appelle $T_1$ la transformation pour la quelle un point $M(z)$ de $\mathcal{P}$ a pour image le point $M_1(z)$ de $\mathcal{P}$ d'affixe $z_1 = (1+i)z - i$ et $T_2$ la transformation pour la quelle un point $M(z)$ de $\mathcal{P}$ a pour image le point $M_2(z)$ de $\mathcal{P}$ tel que $z_2 = \frac{1}{2}(i-1)z + \frac{i-3}{2}$.

1) Identifier et caractériser les deux transformations ?

2) Soit $T = T_2 \circ T_1$ la composée de $T_1$ et de $T_2$ Déterminer la nature de $T$ puis donner ses éléments caractéristiques.
3) $T$ est-elle commutative ?

## Exercice 8

**Image d'une droite par une similitude plane directe**

Soit $S$ une application définie dans $\mathbb{C}$ qui à tout $z$ est associé un $z'$ tel que $z' = (i - \sqrt{3})z + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} + 1)$

1) Donner la nature de $S$ puis ses éléments caractéristiques
2) Le point $M(x; y)$ ayant pour homologue le point $M'(x'; y')$, exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.
3) Déterminer la transformée de la droite passant par le point $A(1 - 2\sqrt{3}; 0)$ et de vecteur directeur $v(\sqrt{3}; 1)$

## Exercice 9

**Application des similitudes dans les suites numériques**

Soit $\mathcal{P}$ un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $u = re^{i\frac{5\pi}{4}}$, où $r$ est un réel strictement positif fixé.

1) On définit les points $A_n$ de $\mathcal{P}$ de la façon suivante :
   - $A_0$ est l'origine $O$ du repère,
   - $A_1$ est le point d'affixe $i$,
   - pour tout entier $n$, $n \geq 2$, $A_n$ est l'image de$A_{n-2}$ par la similitude plane directe de centre $A_{n-1}$, de rapport $r$, dont une mesure de l'angle est $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.
   On note $z_n$ l'affixe du point $A_n$.

   a) Écrire, pour tout $n$, $n \geq 2$, une relation entre $z_n$, $z_{n-1}$ et $z_{n-2}$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a :$z_n - z_{n-1} = i(-u)^{n-1}$.
   c) Exprimer $z_n$ en fonction de $n$ et de $u$.

2) a) Déterminer la similitude directe $S$ telle que $S(A_0) = A_1$ et $S(A_1) = A_2$.
   b) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a $S(A_n) = A_{n+1}$
   c) On note $S^0$ l'application identique de $\mathcal{P}$ et pour tout entier naturel $n$, on pose : $S^{n+1} = S \circ S^n$. Démontrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $S^n(A_p) = A_{n+p}$.
   d) Démontrer que $S^4$ est une homothétie.
3) On suppose que $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on désigne par $I$ le centre de la similitude $S$.
   a) démontrer que pour tout entier $n$, les vecteurs $\overrightarrow{IA_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Construire les points $A_0, A_1, A_2, A_3$ et $A_4$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 4 cm).

c) Calculer $\|\overrightarrow{IA_n}\|$ en fonction de $n$ et de $\|\overrightarrow{IA_0}\|$. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \|\overrightarrow{IA_n}\|$$

## Exercice 10

**Caractérisation d'une similitude plane indirecte et composition**

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application $f$ qui associe, au point $M$ d'affixe $z$, le point $M'$ d'affixe $z' = i\bar{z}$.

1) Préciser la nature de $f$.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$. En déduire une caractérisation de l'application $f$.

3) Soit $g$ l'application qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M$" d'affixe $z" = i\bar{z} + 1 + i$.
Caractériser l'application $T$ telle que $g = T \circ f$, et montrer que $g$ s'écrit aussi $f \circ T$.

4) Déduire de ce qui précède une construction géométrique de $M$".
Montrer que, pour tout point $M$ du plan, le milieu du segment $[MM"]$ appartient à une droite fixe.

## Exercice 11

**Traduction complexe d'une similitude directe à partir de son expression analytique**

1) Soit une transformation $g$ du plan d'expression complexe respective

$$(g)\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

a) Déterminer la relation entre $z$ et $z'$ pour de cette transformation.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

c) Trouver l'image de la droite $(\Delta) : y = 2x + \sqrt{3} + 1$

2) Soit une autre transformation du plan $g$ d'expression complexe
$z' = \frac{1}{2}z + 1 - \frac{1}{2}i$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g$.

3) Rappeler la définition de la similitude plane directe. Déduire de cette définition l'expression complexe d'une similitude plane directe $S$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

4) Que dévient l'image de $(\Delta)$ par $S$ ?

## Exercice 12

**Similitude plane indirecte-symétrie axiale**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes avec $a \neq 0$, et la similitude indirecte $f$ d'expression complexe $z' = a\bar{z} + b$.

1) Justifier que si $|a| \neq 1$, alors $f$ n'est pas une symétrie axiale.

2) On suppose que $|a| = 1$.

a) Vérifier que l'expression complexe de $f \circ f$ est :

$$z' = z + a\bar{b} + b$$

b) En déduire que $f$ est une symétrie axiale si, et seulement si, $a\bar{b} + b = 0$.

3) Dans chacun des cas suivants, indiquer si la transformation $f$ définie par son expression complexe est une symétrie axiale.

a) $z' = i\bar{z} - 1 + i$ ;

b) $z' = i\bar{z} + 2i$ ;

c) $z' = \left(\frac{-3+i}{3+i}\right)\bar{z} + 3 - i$

## Exercice 13

**Traduction complexe d'une similitude directe**

Dans le plan complexe, on considère les points $A$, $B$, $A'$ et $B'$ d'affixes respectives : $1+i$ ; $-3+2i$ ; $5-i$ et $-1+9i$.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe $s$ transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux points du plan d'affixes respectives $z$ et $z'$.

Donner son écriture complexe et en déduire ses éléments caractéristiques.

## Exercice 14

**Traduction complexe d'une similitude indirecte à partir de son expression analytique**

Soit $\mathcal{P}$ un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application affine $f : M(x,y) \longmapsto M(x',y')$ définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + 3 \\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1) Faire la traduction complexe de $f$.
2) Montrer que $f$ a un unique point fixe $I$.
3) Montrer que $f$ est la composée d'une homothétie affine de centre $I$ et d'une symétrie axiale dont l'axe passe par $I$.

## Exercice 15

**Similitude plane indirecte avec nombres complexes**

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : $4cm$.

Partie I

1) Placer les points $I$, $J$, $H$, $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives :

$$z_I = 1, \quad z_J = i, \quad z_H = 1+i, \quad z_A = 2, \quad z_B = \frac{3}{2}+i, \quad z_C = 2i \quad \text{et} \quad z_D = -1$$

2) Soit $E$ le symétrique de $B$ par rapport à $H$. La perpendiculaire à la droite $(AE)$ passant par $C$ et la parallèle à la droite $(OC)$ passant par $D$ se coupant en $F$.
Placer $E$ et $F$ et vérifier que le point $F$ a pour affixe $z_F) - 1 + \frac{1}{2}i$.
3) Montrer que les triangles $OAB$ et $OCF$ sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation $f$ du plan, d'écriture complexe :

$$z' = -i\bar{z} + 2i.$$

1) Déterminer les images des points $O$, $A$, $B$ par $f$.
2)
   a) Montrer que $f$ est une similitude. Est-ce une isométrie ?
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.
   c) La transformation $f$ est-elle une symétrie axiale ?
3) Soit $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donner l'écriture complexe de $t$ et celle de sa réciproque $t^{-1}$.
4) On pose $s = f \circ t^{-1}$.
   a) Montrer que l'écriture complexe de $s$ est : $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.
   b) Montrer que $I$ et $J$ sont invariants par $s$. En déduire la nature de $s$.
   c) En déduire que $f$ est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

# Bibliographie et webographie


BELIN. *Géométrie, Math terminales CE*. Édition 1992

BONNET, V. *Cours de spécialité Mathématiques, terminale S*. Lycée Pontus de Tyard, France. Édition 2007

CIAM (Collection Inter Africaine de Mathématiques). *Terminale SM*. Édition 2001

CIAM (Collection Inter Africaine de Mathématiques). *Terminale SE*. Édition 2001

Collection Formation. *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Édition OctareS, 2010

DÉCLIC *Mathématiques $T^{erm}S$* Enseignement obligatoire et de spécialité. Hachette Éducation 2005

Programme officiel de Mathématiques des classes de terminales C et E du Congo-Brazzaville.

Programme officiel de Mathématiques des classes de terminales C et E du Cameroun.

ROSSEEL Hilda et Maggy SCHNEIDER, *Des nombres qui modélisent Des transformations (2)*. Laboratoire de didactique des mathématiques, Facultés Universitaires de Namur. 2004

www.chronos.activeweb.fr

www.schumath.free.fr