Projet PRENUM -AC [1]

Année 2014

Ressource Terminale C

Continuité

Concepteur :

Hugues Jean Michel MAMPOUYA, Etudiant à l'école Normale Supérieure de l'Université MARIEN NGOUABI, Congo - Brazzaville.

Encadreur :

Antoine BAKALA MABIALA, enseignant au Lycée Emery Patrice LUMUMBA, chef de département de Mathématiques, Congo - Brazzaville

1. Production de ressources numériques pour l'enseignement des mathématiques au secondaire en Afrique centrale

Table des matières

Chapitre 1

Historique

~~L'idée de continuité remonte de l'antiquité, en particulier aux mathématiciens et philosophes GRECS dont **ARISTOTE** (383-322) Av. J.C~~.
David HILBERT (1862-1943) utilise en 1902 une notion de voisinage en un sens restreint, et **Félix HAUSDORFF**(1862-1943) définit axiomatiquement les espaces topologiques en 1914. La continuité est l'état ou la propriété de ce qui est continu, et l'un ou l'autre des mots du langage courant qui exprime l'idée de non-interruption (dans l'espace ou dans le temps), sont ou furent employés aussi, en des sens plus ou moins spécialisés, dans plusieurs domaines ou disciplines : mathématiques bien sûr, mais aussi architecture, botanique, droit, médécine, phonétique, physique...

1.0.1 Objectif Général

Réaliser des activités sur les fonctions.

1.0.2 Objectif Spécifique

Réaliser l'étude d'une fonction.

1.0.3 Objectifs Opérationnels :

A l'issue de ce cours l'apprenant doit être capable de connaitre :

a) La continuité sur un intervalle ;

b) Les opérations sur les fonctions continues ;

c) L'image d'un intervalle par une fonction continue ;

d) Le théorème des valeurs intermédiaires ;

e) La continuité d'une fonction strictement monotone sur un intervalle.

1.0.4 Place du programme dans le cours

Ce chapitre est une partie du cours sur l'étude d'une fonction.

1.0.5 Pré-requis

- Limite en un point x_0 de $\mathbb{R}$ d'une fonction ;
- Limite à gauche d'une fonction ;
- Limite à droite d'une fonction ;
- Continuité en un point ;
- Prolongement par continuité.

1.0.6 Interêt du cours

Ce cours permettra aux apprenants de faire asseoire leur connaissance sur la continuité d'une part, qui peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut-être tracée d'un seul tenant sans lever le crayon, et aussi le théorème des valeurs intermédiaires d'autre part.

1.0.7 Répartition horaire

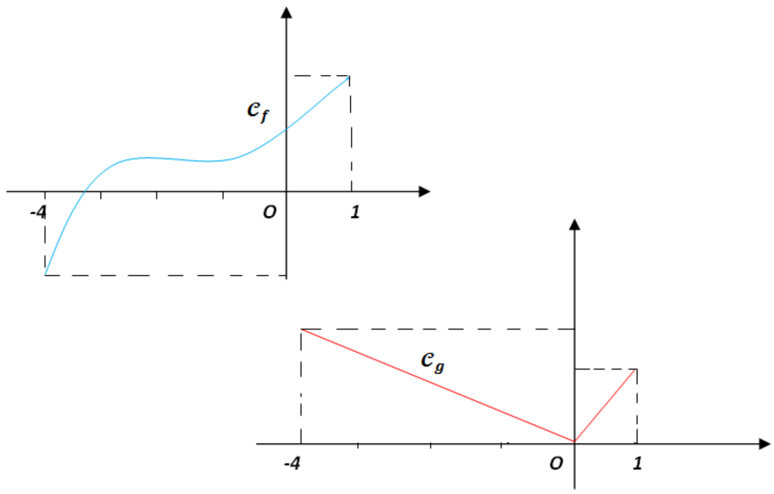
En situation d'apprentissage-enseignant, ce cours est prévu pour 9 heures.

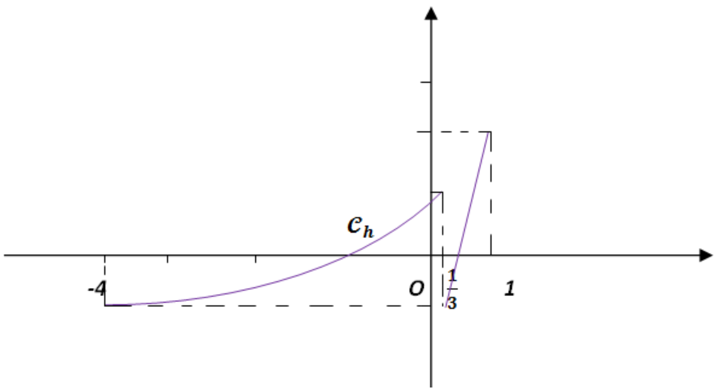
1.0.8 Activités préparatoires

a) Enoncé de l'activité préparatoire n°1

Soit $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_3)$ les courbes représentatives des fonctions f, g et h respectivement représentées dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sur l'intervalle $[-4, 1]$.

• Dans chaque cas, dire si la fonction est continue sur l'intervalle de définition .


$\mathcal{C}_f$
-4
O
1
$\mathcal{C}_g$
-4
O
1


$\mathcal{C}_h$
-4
O
$\frac{1}{3}$
1

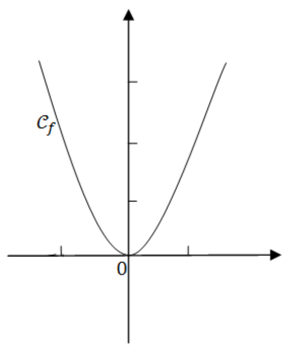
b) Solution de l'activité préparatoire n° 1

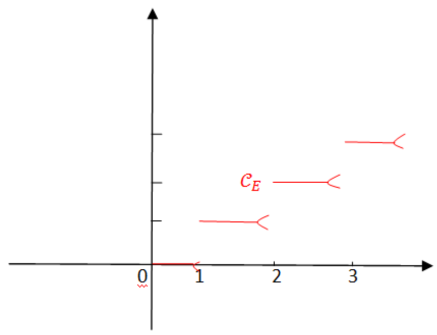
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées sans lever le crayon, les fonctions f et g sont continues sur l' intervalle de définition. La courbe représentative de la fonction h ne peut pas être tracée sans lever le crayon. La fonction h n'est pas continue sur l'intervalle de définition $[-4, 1]$

c) Enoncé de l'activité préparatoire n°2

Dans un repère $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_E)$ sont les représentations graphiques des fonctions f et E définies
sur $\mathbb{R}$.

• Dans chaque cas, dire si la fonction est continue sur $\mathbb{R}$, en le justifiant.





d) Solution de l'activité préparatoire n°2

La parabole $(\mathcal{C})$ représentée par f peut être tracée sans lever le crayon, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
La courbe représentative de la fonction entière E ne peut pas être tracée sans lever le crayon, la fonction E n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Déroulement prévu des activités de la ressource

Titre de la leçon

$\boxed{\text{Continuité}}$

2.1 Continuité sur un intervalle

1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. f est continue sur I si, et seulement si, f est continue en tout point de I. Notation : $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{C}(I)$ est l'ensemble des fonctions continues.

1.2 Proposition

Si f est continue sur un intervalle I alors sa restriction à tout intervalle contenu dans I est continue.

1.3 Théorèmes

- Une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$;
- Une fonction rationnelle est continue sur les intervalles de son ensemble de définition ;
- Les fonctions sin, cos sont continues sur $\mathbb{R}$;
- La fonction tan est continue sur les intervalles de la forme $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ où $n \in \mathbb{Z}$;
- La fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$;
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$;
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Etudier la continuité de la fonction f définie sur $]-\infty, -1[$ par $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$.

Solution 1

La fonction f est le produit de la fonction polynôme $x \longmapsto x$ et de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ qui est la composée de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2-1$ suivie de la fonction racine carrée, donc f est une fonction continue sur son intervalle de définition.

2.2 Opération sur les fonctions

2.1 Théorèmes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

1) $f+g$ est continue sur I.

2) λf est continue sur I.

3) $f \times g$ est continue sur I.

2.2 Proposition 1

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I, et si de plus, g est non nul sur I, alors $\frac{1}{f}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

2.3 Proposition 2

Soient f et g deux fonctions définies, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset J$:

- f continue sur $f(I) \subset J$;
- g continue sur J.

Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Preuve

Soit x_0 un élement de I, on a :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

g est continue en $f(x_0)$; donc :

$$\lim_{y \to f(x_0)} g(y) = g[f(x_0)],$$

on en déduit que :

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x_0).$$

La fonction $g \circ f$, continue en tout élement x_0 de I, est continue sur I.

2.3 Image d'un intervalle par une fonction continue

3.1 Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$, l'image d'intervalle I par la fonction f est l'ensemble noté $f(I)$, de toutes les images des réels appartenant à I.

3.2 Corollaire

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$, si f est continue sur l'intervalle I, alors l'image $f(I)$ de l'intervalle I par la fonction f est aussi un intervalle.

Preuve du Corollaire

Soient y_1 et y_2 dans $f(I)$ avec $y_1 \leq y_2$.
Il s'agit de montrer que tout élement λ de $[y_1, y_2]$ est élement de $f(I)$.
Comme y_1 et y_2 sont dans $f(I)$, il existe a et b dans I tel que : $f(a) = y_1$ et $f(b) = y_2$.
Comme I est un intervalle, on a : $[a, b] \subset I$.
Comme f est continue sur $[a, b]$ (puisque $[a, b] \subset I$), on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : pour tout $\lambda \in [y_1, y_2]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
D'où $\lambda \in f(I)$.
Donc $f(I)$est bien un intervalle.

Exemple

Soit f une fonction $x \longmapsto x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et l'image de l'intervalle ouvert $]1, 2[$ est l'intervalle ouvert $]3, 4[$.

3.3 Détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue

3.4 Méthode

Pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue f, on partage cet intervalle en intervalles sur lesquels, f est strictement monotone et on utilise les résultats suivants portés dans le tableau ci-dessous.

	f (I)	
I	*f est strictement croissante sur I*	*f est strictement décroissante sur I*
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b]$	$]l;f(b)]$	$[f(b);l[$
$[a;\beta[$	$]f(a);L[$	$]L;f(a)]$
$]a;\beta[$	$]l;L[$	$]L;l[$
$\mathbb{R}$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$

Où $l = \lim_{x\to a} f(x)$ avec $x > a$ et $L = \lim_{x\to\beta} f(x)$ avec $x < \beta$.

3.5 Remarques

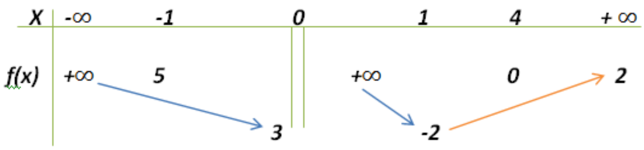
- Si f est une fonction constante, alors $f(I)$ est réduit à un singleton ;

- Si f n'est pas continue sur I, $f(I)$ peut ne pas être un intervalle.

Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la partie entière est $\mathbb{Z}$.

Exercice

Soit f une fonction dont le tableau de variation est :



Déterminer l'image par f des intervalles $I = [1, 4]$, $J = [-1, 0]$ et $K =]0, +\infty[$.

Solution

f est continue sur chacun des intervalles proposés, donc les images d'intervalles sont des intervalles .
$f(I) = [-2, 0]$ car $f(1) = -2$, $f(4) = 0$ et f est strictement croissante sur I. $f(J) =]5, 3]$ car $f(-1) = 5$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ et f est strictement décroissante sur J. $f(K) = [-2, +\infty[$, par lecture du tableau des variations. En explicitant le raisonnement on a : $K =]0, 1[\cup[1, +\infty[$ donc $f(K) = f(]0, 1]) \cup f([1, +\infty[)$.
Or $f(]0, 1]) = [-2, +\infty[$ et $f([1, +\infty[) = [-2, 2]$.
On a $[-2, +\infty[\cup[-2, 2[= [-2, +\infty[$. Donc $f(K) = [-2, +\infty[$

2.4 Théorème des valeurs intermédiaires

4.1 Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I. Pour tout réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Preuve du théorème

On sait que $f([a, b])$ est un intervalle I'.
Soit y_0 un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
On a : $f(a) \in I'$ et $f(b) \in I'$; donc : $y_0 \in I'$.
Or : $I' = f([a, b])$; donc : $y_0 \in f([a, b])$.
On en déduit que y_0 a au moins un antécedant compris entre a et b.

4.2 Corollaire 1

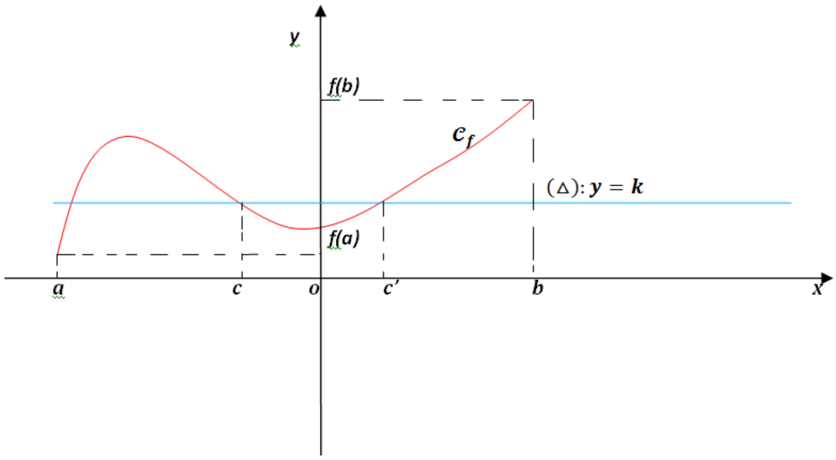
En d'autre termes, lorsque x varie de a à b (avec $a \leq b$.) Si f est continue sur I, alors $f(x)$ prend au moins une fois toute valeur intermédiaire comprise entre$f(a)$ et $f(b)$.

4.3 Corollaire 2

Si f ne s'annule sur I, alors f garde un signe constant sur I.

4.4 Interprétation graphique

f est une fonction continue sur un intervalle I, a et b sont des réels de I.
Dans un repère, $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ la droite $(\triangle)$ d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe $(\mathcal{C})$ en un point d'abscisse c compris entre a et b.



4.5 Application du théorème des valeurs intermédiares

Enoncé 1

(E) est l'équation $\cos(2x) = 2\sin(x) - 2$. Démontrer, avec le théorème des valeurs intermédiares que l'équation (E) admet une solution dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution 1

$(E) : \cos(2x) = 2\sin(x) - 2$ i.e $f(x) = -2$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x) \cancel{-2.}$ La fonction f construite à partir des fonctions trigonométriques est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ et $f(\frac{\pi}{2}) = -3$ or -2 est compris entre -3 et $\frac{1}{2}$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation (E) admet au moins une solution.

Enoncé 2

a) f est une fonction continue sur un intervalle I. a_1 et a_2 sont deux réels de I tel que $f(a_1)f(a_2) < 0$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au mois une solution comprise entre a_1 et a_2.
b) Démontrer que l'équation $x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3; 1]$.

Solution 2

a) L'hypothèse $f(a_1)f(a_2) < 0$ signifie que $f(a_1)$ et $f(a_2)$ sont de signes contraires. 0 est donc compris entre $f(a_1)$ et $f(a_2)$. f étant continue sur I, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution entre a_1 et a_2.
b) On pose f(x)=0, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$. Or $f(-3) = -1$ et $f(1) = 11$, alors

$f(-3)$ et $f(1)$ sont de signes contraires alors $f(-3)f(1) < 0$. f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, 1]$.

4.6 Remarque

Pour prouver l'existence de solutions d'une équation avec le théorème des valeurs intermédiaires, il faut préalablement écrire cette équation sous la forme $f(x) = k$.

2.5 Fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$

5.1 Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a, b]$.

Preuve

Cas où f est strictement croissant sur $[a, b]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c de $[a, b]$ tel que $f(x) = k$. f est croissant sur $[a, b]$,donc x est un réel de $[a, b]$ tel que $x < c$ alors $f(x) < k$ et si x est un réel de $[a, b]$ tel que $x > c$ alors $f(x) > k$. Donc c est l'unique réel de $[a, b]$ solution de l'équation $f(x) = k$.

5.2 Corollaire

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ tel que :
$f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a, b]$.

Preuve du Corollaire

Si $f(a) \times f(b) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Autrement dit, 0 est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
On conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

5.3 Propriété

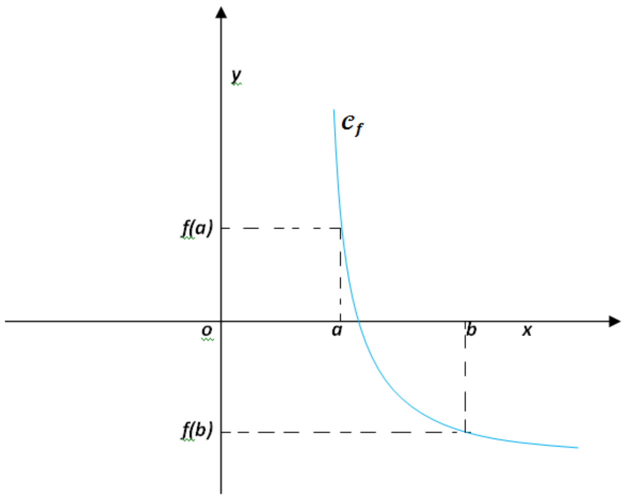
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

– f réalise une bijection de I vers $f(I)$.

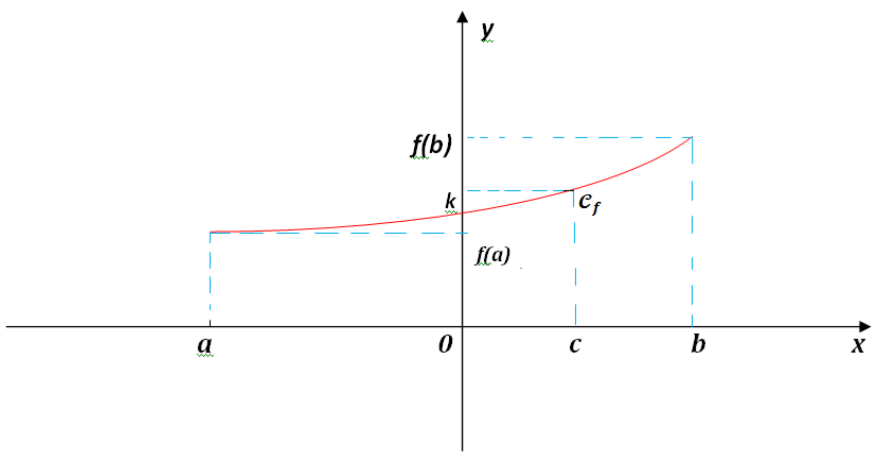
– La bijection réciproque, notée f^{-1}, est continue sur l'intervalle $f(I)$.

– f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f.

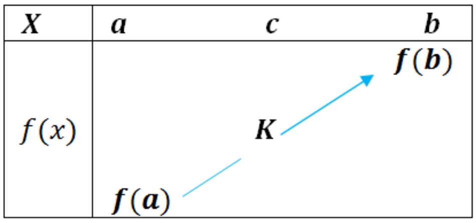
5.4 Illustration du corollaire 5.2

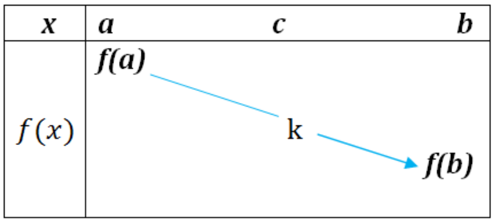


5.5 interprétation graphique d'une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.



5.6 Tableau de variations et équations du type $f(x) = k$





5.7 Remarque

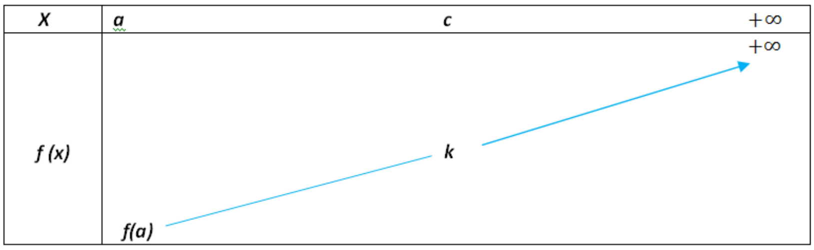
Par convention, les flèches d'un tableau de variation indiquent la stricte monotonie, cela permet d'appliquer plus facilement ce théorème.

5.8 Extensions à d'autres situations

Voici trois exemples ou f est continue et strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non.

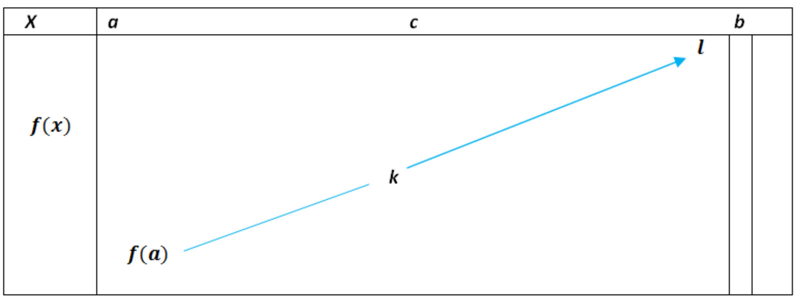
a) $I = [a, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



b) $I = [a, b[$

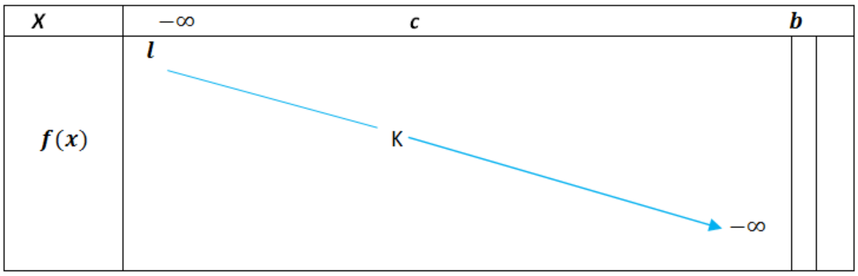
$$\lim_{x \to b} f(x) = l$$



Pour tout réel k dans $[f(a), l[$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique équation dans

l'intervalle $[a,b[$
c) $I =]-\infty, b[$

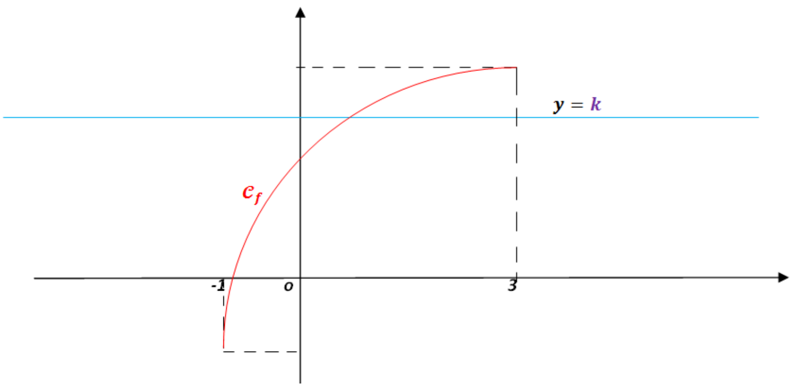
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} f(x) = -\infty$$



Pour tout réel $k < l$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-\infty, b]$.

Exercice

($\mathcal{C}$) est la courbe représentative dans un repère d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,3]$; k est un réel compris entre $f(-1)$ et $f(3)$. Indiquer par lecture graphique, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'q́uation $f(x) = k$



Solution

$f(-1) \leq k \leq f(3)$, sur l'intervalle $[-1,3]$ f est continue et strictement monotone. Donc sur cet intervalle l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.

2.6 Devoirs

2.7 Devoir sur table

Exercice n°1

a) f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est représenté ci-déssous.

Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = -4$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) g est la fonction définie par $g(x) = 2x + \sqrt{x+3}$
Justifier la continuité de g sur l'intervalle $[-3, +\infty[$.
c) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + mx & si \quad x < 2 \\ \sqrt{x-2} & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$i)$ Pour quelle valeur de m la fonction h est-elle continue en 2.
$ii)$ h est-elle continue sur sont ensemble de définition ? justifier.

Partie A

Exercice n°2

1) f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des réels a et b dans $]0, 1[$. tel que $f(a) = 0$, $f(b) = 1$

a) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
Démontrer que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.
b) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
2) Soit p est la fonction polynôme définie par $p(x) = 2x^3 - 3x - 1$ dont le tableau de variation ci-dessous est.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

a) Démontrer que l'équation $p(x) = 0$ admet une solution unique α et que α appartient à l'intervalle $]1,6;1,7[$.
b) ~~Démontrer~~, suivant les valeurs de x, le signe de $p(x)$.

Partie B

Exercice n°3

Soit $f :\longmapsto |x^2+x+1-|x-1||$ définie sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer que

$$f = v \circ (h - v \circ g)$$

avec

$$g : x \longmapsto x-1$$

$$v : x \longmapsto |x|$$

$$h : x \longmapsto x^2+x+1$$

Définie sur $\mathbb{R}$.
b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie C

Exercice n°4

1) (E) : est l'équation : $2\sin(2x) = \cos(x)+1$.
Démontrer, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation (E) admet au moins une solution dans dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2) f est la fonction définie sur $[-1,3]$ par $f(x) = x^2 - 5x$.
a) Justifier la continuité de f sur $[-1,3]$.
b) Démontrer que pour tout réel λ, tel que $0 \leq \lambda \leq -3$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,3]$.

2.8 Solution du devoir sur table

Exercice n°1

a) f est décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ et $f(-2) = -3$ donc pour tout x de $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, $f(x) \geq -3$.
L'équation $f(x) = -4$ n'a donc pas de solution dans $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.
f est croissante sur $[-2, \frac{1}{2}]$ et $f(-2) = -3$, donc pour tout x de $[-2; \frac{1}{2}]$, $f(x) \geq -3$.
L'équation $f(x) = -4$ n'a donc pas de solution dans $[-2, \frac{1}{2}]$.
Finalement L'équation $f(x) = -4$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

b) La fonction g est la somme de la fonction polynôme $x \longmapsto 2x$ et de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+3}$ qui est de la composée de la fonction polynôme $x \longmapsto x+3$ suivie de la fonction racine carrée, donc g est continue sur son ensemble de définition $[-3, +\infty[$.

c)

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + mx & x < 2 \\ \sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$$

i) Déterminons m pour que h soit continue en 2.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = 4 + m$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = 0$$

Or h est continue en 2, alors on a

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^+} h(x) \Longleftrightarrow 4 + 2m = 0$$

Donc $m = -2$.

ii) Continuité de h sur son ensemble de définition.
La fonction h est composée de la fonction polynôme $x \longmapsto x^2 + mx$ et de la fonction racine carrée $\sqrt{x-2}$, or h est définie sur $\mathbb{R}$, donc continue dans son ensemble de définition.

Partie A

Exercice n°2

1) Démontrons que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

$\star$ Montrons que $g(a) < 0$.
Par hypothèse

$$g(x) = f(x) - x, \quad f(a) = 0 \quad et \quad f(b) = 1.$$

$$On \quad a: \quad g(a) = f(a) - a = -a$$

$$\Longrightarrow g(a) = -a,$$

$$or \quad a > 0$$

$$\Longrightarrow -a < 0$$

$$i.e. \quad g(a) = -a < 0$$

d'où

$$g(a) < 0.$$

$\star$ Montrons que $g(b) > 0$.

$$g(b) = f(b) - b = 1 - b$$

$$\Longrightarrow g(b) = 1 - b,$$
$$\Longrightarrow 1 - b > 0$$
$$i.e. \quad g(b) = 1 - b > 0$$

d'o$\grave{u}$

$$g(b) > 0.$$

b) Démontrons que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution unique dans $]0, 1[$

$$f(x) = x$$

Or d'après l'hypothèse,

$$f(x) - x = g(x) = 0$$

d'après a)

$$g(a) < 0 \quad et \quad g(b) > 0 \quad avec \quad a \quad et \quad b \quad dans \quad]0, 1[$$

alors

$$g(a) \times g(b) < 0,$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution unique dans l'intervalle $]0, 1[$.

2) d'après le tableau de variations p est strictement croissante sur $]0, 1[$ strictement décroissante sur $[0, 1]$, donc pour tout x de $]-\infty, 1]$, $p(x) \leq -1$.
L'équation $p(x) = 0$ ne possède donc pas de solution unique α dans l'intervalle $[1, +\infty[$

$$p(1,6) = -0,488; \quad p(1,7) = 0,156, \quad et \quad p(a) = 0,$$

donc :

$$p(1,6) \leq p(a) \leq p(1,7).$$

La fonction p est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$p(1,6) \leq p(a) \leq p(1,7).$$

b) Déterminons, suivant les valeurs de x, le signe de $p(x)$. D'après la question a), pour tout réel x de $]-\infty, 1]$,

$$p(x) \leq -1$$

donc

$$p(x) < 0.$$

D'autre part, p étant croissante sur $[1, +\infty[$: si x appartient $\grave{a}$ $[1, \alpha]$.

$$p(x) \leq 0 \quad si \quad x \in [\alpha, +\infty[, \quad p(x) \geq 0.$$

Donc $p(x) \leq 0$ pour x dans $]-\infty, \alpha]$ et $p(x) \geq 0$ pour x dans $]\alpha, +\infty[$.

Partie B

Exercice n°3

a) Or

$$\begin{array}{rrcl} & f & = & v \circ (h - v \circ g) \\ & f(x) & = & v\,[h(x) - v(g(x))] \\ & & = & [r(x)] \quad avec \quad r(x) = h(x) - v(g(x)) \quad i.e. \quad r(x) = x^2 + x + 1 - |x-1| \\ D'où & f(x) & = & |x^2 + x + 1 - |x-1|| \qquad \blacksquare \end{array}$$

b) On en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction valeur absolue d'éfinie sur $\mathbb{R}$, Or la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie C

Exercice n°4

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2\sin(2x) - \cos(x) - 1$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$.
Or $0 \in [-1, \sqrt{3} - \frac{3}{2}]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, i.e. (E) a une solution unique dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$.

2) a) Justifions la continuité de f sur l'intervalle $[-1, 3]$
b) $f(-1) = 6$ et $f(3) = -6$, $f(-1) \times f(3) < 0$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans l'intervalle $[-1, 3]$.

2.9 Devoir à faire à la maison

Execice n°1

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Voici deux questions à propos de cette fonction .

Question 1

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique dans $[0, +\infty[$.

Question 2

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha > 0$.
a) Répondre précisement à la question 1.
b) Cette réponse est insuffisante pour répondre à la question 2. Pourquoi ?
c) Répondre précisement à la question 2.

Exercice n°2

Soit la fonction $h(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
1) Donner le domaine de définition de h.
2) Déterminer la parité de h.
3) Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4) Calculer la limite de h à $+\infty$ et $-\infty$.
5) Montrer que $-1 < h(x) < 1$.
6) On déduire que $h(x) =]-1, 1[$.

Exercice n°3

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 + x)^3 + x$.
a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$.

b) Donner un encadrement de α dans l'amplitude 10^{-1}.

2.10 Solution du devoir à faire à la maison

Exercice n°1

a) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de plus $0 \in [-3, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[0, +\infty[$.
b) Cette réponse est suffisante car l'équation $f(x) = 0$ pourrait avoir d'autres solutions dans $]-\infty, -2]$ et $f(-2) = -1$, donc pour tout x de $]-\infty, -2]$, $f(x) < 0$, f est strictement décroissante sur $[-2, 0]$ et $f(-2) = -1$, $f(0) = -3$ donc pour tout x de $[-2, 0]$, $f(x) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $]-\infty, 0]$.
Donc d'après, a), l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α solution dans $[0, +\infty[$.

Exercice n°2

1) Domaine de définition de h.
$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
2) Parité de h.
$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(-x) = \frac{-x}{1 + |-x|} = -\frac{x}{1 + |x|} = -h(x).$$

Ce qui prouve que h est impaire.
3) Montrons que h est strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$.
Supposons $0 \leq x \leq y$.
Alors :

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= \frac{y}{1+y} - \frac{x}{1+x} \\ &= \frac{y(1+x) - x(1+y)}{(1+x)(1+y)} \\ &= \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \end{aligned}$$

Or, $y - x > 0$ d'où $h(x) < h(y)$.
Ceci prouve la stricte croissance de h sur $\mathbb{R}^+$.
4) Calculons la limite de h à $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -1.$$

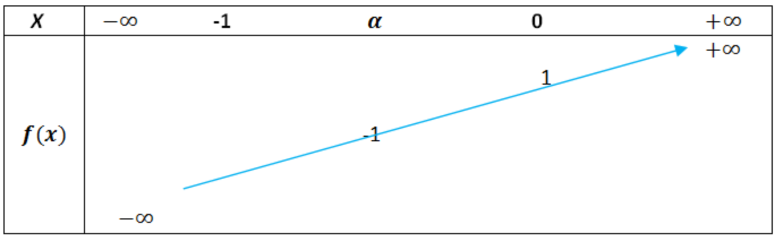
5) Montrons que h est bornée par -1 et 1 i.e. $-1 \leq h(x) \leq 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
Il est claire que : $0 \leq x \leq 1 + x$.

En divisant par $1+x$ on a $0 \leq \dfrac{x}{1+x} < 1$
Et comme $x = |x|$(puis que $x \geq 0$), $0 \leq h(x) < 1$
Comme h est impaire, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -1 < h(x) < 1$.
6)On en déduit que $h(x) =]-1, 1[$.
D'après ce qui précède on en déduit que $h(x) \subset [-1, 1]$.
Réciproquement soit $y \in]-1, 1[$. Comme h est continue (quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \in y$.
Donc $]-1, 1[\subset h(x)$
D'où $h(x) =]-1; 1[$ $\blacksquare$

Exercice n°3

1) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α compris entre $[-1; 1]$.
La fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions polynômes).
De plus : $g(-1) = -1$ et $g(0) = 1 > 0$.
Le réel $\alpha = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$.
On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$.
2) Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Dressons d'abord le tableau de variation de g.



Encadrement de α à l'aide d'un petit tableau de valeurs : (méthode de balayage)

x	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
g(x)	-0,899	-0,792	-0,673	-0,535	-0,375	-0,184	0,043	0,312	0,629

Les valeurs de $g(x)$ sont arrondies à 10^{-3}.
On en déduit $-0,4 \leq \alpha \leq -0,3$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Collection Inter Afrique Mathématiques (C.I.A.M) Terminale SM. EDICEF 1998.
[2] Collection Hyperbole Math. Terminale S. NATHAN. Edition : VALERIE CAROIT - COLLET . Paris 2002.
[2] Collection Math'x Terminale S. Les Editions Didier, Paris 2005.