PReNuM-AC

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Terminale D

Présenté par : Wolfen Hershey MADZOU Etudiant à l'Ecole Normale Supérieure, Brazzaville, CONGO.

E-mail : wolfenmadzou@gmail.com / Contacts : +24206913-38-92

+24204474-16-21

Encadreurs :

MALONGA MOUNGABIO : Docteur en Didactique à l'Ecole Normale Supérieure, Brazzaville CONGO.

MOUENE : Enseignant de maths au lycée, Brazzaville CONGO.

Objectifs

Objectif Général :

Réaliser les activités sur les équations différentielles.

Objectif spécifique :

Faire acquérir la technique de résolution des équations linéaires à coefficients constants avec ou sans second membre.

Objectifs opérationnels :

A la fin de la séance l'élève doit être capable :

- de restituer la définition d'une équation différentielle
- d'identifier les équations différentielles du premier et du second ordre
- de résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants avec ou sans second membr

Place du cours dans le programme

Ce cours, pas encore étudié en classe de première **D**, est le cours de mathématiques (Algèbre) en classe de terminale **D** (selon le programme du **CONGO-Brazzaville**). Il constitue un cours de découverte pour l'élève de terminale **D**, permettant d'aborder la notion sur les équations différentielles et d'identifier chaque type d'équations différentielles tout en les résolvant.

Répartition horaire

En situation enseignant-apprentissage, ce cours sera dispensé pendant 8 heures

Pré-requis

Avant d'aborder ce cours, l'élève devra être capable de :

1. Maitriser la résolution des équations du second degré en utilisant le discriminant.
2. connaitre les notions sur les dérivées
3. Maitriser le calcul et les propriétés sur les primitives et intégrales.

Déroulement prév

Nous recommandons profondément à l'élève travaillant de façon indépendant de commencer par traiter, pour chaque partie du cours, l'activité préparatoire proposée avant d'étudier le cours et résoudre les exercices qui y correspondent. Ainsi l'élève devra suivre le schéma :
Activités préparatoires $\longrightarrow$ **Cours** $\longrightarrow$ **Exercices.**

Un peu d'histoire

La notion d'équation différentielle apparaâit chez les mathématiciens à la fin du XVII ème siècle. Encouragé par **Huygens** à étudier les mathématiques, **Leibniz** sera l'inventeur en **1686**, en même temps que **Newton**, du calcul différentielle et intégral (Nova methodus pro maximis et minimis 1684-1686)
A cette époque les equations différentielles s'introduissent en mathématiques par le biais de problèmes d'origines mécanique ou géométrique, comme par exemple : Mouvement du pendule circulaire, problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonienne, problème de l'étude de mouvement de corps "élastiques" (tiges, ressorts, cordes vibrantes), problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumis à son propre poids.
Vers **1700**, beaucoup de ces problèmes étaient déjà partiellement ou totalement résolus et quelques méthodes de résolution mises au point. Ensuite les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles.
Assez curieusement, les equations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre, qui apparaissent maintenant comme les plus simples, ne furent résolues qu'en **1739** par **Euler**.
Il ne faut pas oublier que pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier. Dans la phase que nous venons de décrire, les mathématiciens s'attachent au calcul effectif d'une solution.
Vers **1870** **Fuchs**, puis **Pointcaré**, vont inaugurer un nouveau champ de recherche. Le calcul effectif des solution est la plupart du temps

impossible, mais on peut chercher à déduire de l'examen a priori de l'équation les propriétés des solutions.
Enfin, le développement moderne des moyens de calcul ajoute à cette panoplie la possibilité de calculer numériquement, dans un temps raisonnable, des solutions approchées très précises d'équations différentielles ou d'explorer les propriétés que l'on peut attendre des solutions.

Introduction

Ce chapitre traite des équations différentielles du premier et second ordre à coefficients constants avec ou sans second membre. Il permet de démontrer certains résultats de physique que l'élève a appris à utiliser. Son champ d'application s'étend également à la géométrie, la démographie, la chimie, la biologie etc...

Les équations différentielles jouent un rôle important dans l'étude de certains phénomènes physiques. La variable étant en générale le temps, désigne par t, on pourra obtenir des équations de la forme $ax' + bx = 0$ où $x :\longmapsto x(t)$ est la fonction inconnue. Selon les circonstances et parfois pour de simples raisons tenant aux grandeurs en jeu, l'inconnue sera désigne par θ (température) ou $\mathbf{i}$ (intensité d'un courant) ou $\mathbf{q}$ (quantité d'électricité) ou encore $\mathbf{x}$ (l'élongation d'un point matériel) voir (T.P 1 et T.P 2), etc...

Table des matières

Activités préparatoires

Activités 1 :

Soit les fonctions $f : x \longmapsto e^{4x}$ et $g : x \longmapsto \sin 5x$

1. Calculer la dérivée f' de f et démontrer que, pour tout nombre réel x

   on a : $f'(x) - 4f(x) = 0$
2. Calculer la dérivée seconde g'' de g et démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $g''(x) + 25g(x) = 0$

Activités 2 :

On considère la fonction $h : x \longmapsto e^{x}(\cos x + \sin x)$

1. Calculer les dérivées h' et h'' de h
2. Trouver l'expression de $h'(x) - h(x)$
3. En utilisant l'expression de la dérivée h'' de h, établir la relation entre h et ses dérivées successives h' et h".

<u>Solution 1 :</u>

1. $f'(x) = 4e^{4x}$.

   Pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) - 4f(x) &= 4e^{4x} - 4e^{4x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $g'(x) = 5\cos 5x \Longrightarrow g"(x) = -25\sin 5x$.

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\begin{aligned} g''(x) + 25g(x) &= -25\sin 5x + 25\sin 5x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Solution 2 :

$h(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

1. Calcul des dérivées :

   En utilisant la formule de calcul (u.v)'=u'v + v'u, on trouve : $h'(x) = 2e^x \cos x$ et $h"(x) = 2e^x(\cos x - \sin x)$

2. Expression de $h'(x) - h(x)$

$$\begin{aligned} h'(x) - h(x) &= 2e^x \cos x - e^x(\cos x + \sin x) \\ &= 2e^x \cos x - e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

   D'où $h'(x) - h(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

3. Relation entre h et ses dérivées successives h' et $h"$.

$$\begin{aligned} On\, a : h"(x) &= 2e^x(\cos x - \sin x) \\ \frac{1}{2}h"(x) &= e^x(\cos x - \sin x) \\ \frac{1}{2}h"(x) &= h'(x) - h(x) \\ h"(x) &= 2h'(x) - 2h(x) \\ h"(x) - 2h'(x) + 2h(x) &= 0 \end{aligned}$$

   On obtient donc la relation $h"(x) - 2h'(x) + 2h(x) = 0$

Commentaires :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée à sa dérivée f' par la relation $f' - 4f = 0$.
   On dit que f est solution de l'équation $y' - 4y = 0$ (1)
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée à sa dérivée f' par la relation $g" + 25g = 0$
   On dit que g est solution de l'équation $y'' + 25y = 0$ (2)
3. La La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est liée aux dérivées h' et $h"$ par la relation $g" - 2g' + 2g = 0$
   On dit que g est solution de l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$ (3)
4. Les équations (1), (2) et (3) sont appelées équations différentielles d'ordre respectifs 1 et 2 dont l'inconnue est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
5. relation entre h et ses dérivées successives h' et h
6. Le vocable (ordre 1 et ordre 2) est en rapport avec l'ordre de dérivation de l'inconnue

Synthèse :

On retient de cette activité préparatoire les définitions suivantes :

• Une équation différentielle est une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives.

• L'ordre d'une équation différentielle dépend de celui de ses dérivées successives.

Chapitre 1

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1.1 Définition :

Une équation différentielle est une équation liant une fonction inconnue (généralement notée y ou z ou autres lettres), sa variable et certaines de ses dérivées successives : $(y'; y''.....y^n)$.

Exemples 1.1.1.

Soit y une fonction de variable x.

1. $y'' - 3y' - 3x = 0$;
2. $y'' + 3\cos x - 1 = 0$;
3. $x^2y' + 4y = e^x$;
4. $y^3 - 4xy'' + y' + \frac{1}{2}y = 0$;
5. $y' = \sin x$

1.1.1 Ordre d'une équation différentielle

L'ordre d'une equation différentielle est le plus grand ordre de la dérivée intervenant dans cette equation.

Exemples 1.1.2.

1. $y'' - 4y' + 7y = 0$; équation d'ordre 2
2. $2x^2y' - 8y = e^x$; équation d'ordre 1
3. $y''' - y = \cos x$; équation d'ordre 3

1.1.2 Coefficient d'une équation différentielle

Ce sont les coefficients de la fonction et de ses dérivées successives contenus dans cette equation.
Si un coefficient d'une équation différentielle ne dépend pas de la variable alors on dit qu'il est **constant**.

Exemples 1.1.3.

1. $ln5y' - y = 0$ (1)
2. $y'' - 3y' - 8y = 0$ (2)
3. $x^2y' - \frac{1}{2}y = 0$ (3)
4. $e^{(x+1)}y" = e^x$ (4)
   Les équations (1) et (2) sont à coefficients constants mais (3) et (4) ne le sont pas.

1.1.3 Équation différentielle homogène

C'est une équation où le second membre est nul.

Exemples 1.1.4.

$y" - 3y' + 2y = 0\,;\ x^2y' - \frac{1}{2}y = 0$

Contre exemple :

Les équations différentielles : $y" - e^x y + x - 1 = 0$ et $y' - 4y = 0$ ne sont pas homogènes.

N.B : Une équation différentielle dont le second membre est non nul est appelée équation **non homogène** (ou sans second membre).

1.2 Résolution ou intégration d'une équation différentielle

Résoudre ou intégrer une équation différentielle, consiste à déterminer l'ensemble des fonctions solutions.
Pour une équation différentielle, il y a deux type de solutions ou intégrales.

1.2.1 Solution générale :

On appelle solution générale ou intégrale d'une équation différentielle, la fonction vérifiant cette équation.

1.2.2 Solution particulière ou intégrale particulière

C'est une solution que l'on détermine à partir de la solution générale en tenant compte de certaines conditions fixées appelées **conditions initiales.**

1.2.3 Solutions linéairement indépendantes

Deux solutions y_1 et y_2 d'une équation différentielle sont linéairement indépendantes si le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ n'est pas constant.

1.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

1.3.1 Équations du type $y' = f(x)$

Exemples 1.3.1.

Résoudre l'équation différentielle : $e^{(x+1)}y' = e^x$

Solution :

$$
\begin{aligned}
e^{(x+1)}y' &= e^x \\
y' &= \frac{e^x}{e^{x+1}} \\
&= e^x.e^{-(x+1)} \\
&= e^x.e^{-x}.e^{-1} \\
&= e^{-1} \\
y' &= \frac{1}{e} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e} \\
dy &= \frac{1}{e}dx \\
\int dy &= \frac{1}{e}\int dx \\
y &= \frac{1}{e}x + c
\end{aligned}
$$

1.3.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre (homogène)

Forme générale :

C'est une équation différentielle de la forme : $ay' + by = 0$
$a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

Résolution :

Il s'agit de déterminer la fonction inconnue y.

- La fonction nulle est solution.
- Si $y \neq 0$ alors on a :

$$
\begin{aligned}
ay' + by = 0 \Longleftrightarrow \quad & \tfrac{y'}{y} = -\tfrac{b}{a} \text{ or } y' = \tfrac{dy}{dx} \\
& \int \tfrac{dy}{y} = -\int \tfrac{b}{a}dx \\
& ln|y| = -\tfrac{b}{a}x + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$|y| = e^{-\frac{b}{a}x+k_1}$$
$$|y| = e^{k_1}e^{-\frac{b}{a}x}$$
$$y = \pm e^{k_1}e^{-\frac{b}{a}x} \text{ en posant } c = e^{k_1}$$

La solution générale est donc $\boxed{y_h : x \longmapsto ce^{-\frac{b}{a}x} \quad (c \in \mathbb{R})}$

ou $\boxed{y = ce^{-\frac{b}{a}x} \quad (c \in \mathbb{R})}$

La présence du réel c, traduit qu'il s'agit d'une solution générale.

Application :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 4y = 0$ (E)
2. $3y' + 2y = 0$ (E')
3. $yln5 - y' = 0$ (E")

   Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ;1)

   Déterminer la solution particulière g de (E') telle que : $g'(1) = 1$

Solution :

Résolution des équations :

1. $y' - 4y = 0$ (E) forme ay'+by=0 avec a=1 et b=-4

la solution de (E) est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{4x}$

2. $3y' + 2y = 0$ (E') forme ay'+by=0 avec a=3 et b=2

la solution de (E') est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{-\frac{2}{3}x}$

3. $yln5 - y' = 0$ (E") forme ay'+by=0 avec a=-1 et b=ln5

la solution de (E") est de la forme $y = ce^{-\frac{b}{a}x}$ c'est à dire $y = ce^{xln5}$

la solution f de (E) dont la courbe passe par le point A(0 ;1)

On a : $f(x) = ce^{4x} \Longrightarrow f(0) = c = 1$ d'où $f(x) = e^{4x}$

solution particulière g de (E') telle que : $g'(1) = 1$

On a : $g(x) = ce^{-\frac{2}{3}x} \Longrightarrow g'(x) = -\frac{2}{3}ce^{-\frac{2}{3}x}$ et $g'(1) = -\frac{2}{3}c = 1$ donc $c = -\frac{3}{2}$ et par conséquent $g(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x}$

Méthode 2 $y' - 4y = 0$ (E)

$$
\begin{aligned}
y' - 4y &= 0 \\
y' &= 4y \\
\frac{dy}{dx} &= 4y \\
dy &= 4ydx \\
\frac{dy}{y} &= 4dx \\
\int \frac{dy}{y} &= 4\int dx \\
ln|y| &= 4x + c \\
|y| &= e^{4x+c} \\
|y| &= e^{c}.e^{4x} \\
y &= \pm e^{c}.e^{4x}
\end{aligned}
$$

En posant $C = \pm e^{c}$, on trouve $y = Ce^{4x}$

1.4 Équation différentielle linéaire du deuxième ordre :

1.4.1 Équation du type $y" = f(x)$

Exemples 1.4.1.

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y" - e^{x} = -\sin x + x$

Solution :

Résolution de l'équation

$$
\begin{aligned}
y'' - e^x &= -\sin x + x \\
y'' &= e^x - \sin x + x \\
\frac{dy'}{dx} &= e^x - \sin x + x \\
dy' &= (e^x - \sin x + x)dx \\
\int dy' &= \int (e^x - \sin x + x)dx \\
y' &= e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c \\
\frac{dy}{dx} &= e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c \\
dy &= (e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c)dx \\
\int dy &= \int (e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} + c)dx \\
y &= e^x + \sin x + \frac{x^3}{6} + c(x) + k
\end{aligned}
$$

1.4.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants sans second membre (c'est à dire homogène)

Forme générale :

C'est une équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$ (E) où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$

Résolution :

– On détermine l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (E) comme suit :
  Soit la fonction $y : x \longmapsto e^{rx}$ solution de cette équation, on a :
  $y(x) = e^{rx}$, $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2 e^{rx}$
  alors l'équation (E) : $ay'' + by' + cy = 0$ devient
  $ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ or $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{rx} > 0$

On obtient l'équation caractéristique $\boxed{ar^2 + br + c = 0}$

– On résout l'équation caractéristique en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (ou le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$).

<u>1^{er}**cas :**</u> Si $\Delta > 0$ (ou $\Delta' > 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : deux racines distinctes $r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
(ou $r_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $r_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ avec $b' = \frac{b}{2}$), alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :

$\boxed{y = f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

<u>2^{em}**cas :**</u> Si $\Delta = 0$ (ou $\Delta' = 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : une racine réelle double $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ (ou $r = r_1 = r_2 = -\frac{b'}{a}$), alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :
$\boxed{y = f(x) = (Ax + B)e^{rx}}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

<u>3^{em}**cas :**</u> Si $\Delta < 0$ (ou $\Delta' < 0$)

l'équation caractéristique admet pour solutions : deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors la forme générale des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ay'' + by' + cy = 0$ est :

$\boxed{y = f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Si de plus une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ est fixée, avec $x_0 \in I$, y_0 et $y_1 \in \mathbb{K}$ alors la valeur de la constante est fixée. L'équation avec condition initiale possède une unique solution.

1.4.3 Équations du type $y'' - \omega^2 y = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$
(A $\in \mathbb{R}$ et B $\in \mathbb{R}$)

1.4.4 Équations du type $y" + \omega^2 y = 0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto A\cos\omega x + B\sin\omega x$ (A $\in \mathbb{R}$ et B $\in \mathbb{R}$)

Exercice :

1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) $y" + y' + y = 0$
   (b) $6y" + y' - y = 0$
   (c) $25y" + 60y' + 36y = 0$
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle $y" - y' - 6y = 0$ telle que la courbe représentant f dans un repère orthonormal admette en $P(0, 2)$ une tangente de coefficient directeur 1.

Solution :

Résolution des équations :

1. $y" + y' + y = 0$,
   Équation caractéristique : $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = -3 = 3i^2$ et $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Ici $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La solution est de la forme
   $y = f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ c'est à dire
   $y = f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
2. $6y" + y' - y = 0$,
   Équation caractéristique : $6r^2 + r - 1 = 0$, $\Delta = 25 = 5^2$ et $r_1 = -\frac{1}{2}$; $r_2 = \frac{1}{3}$. La solution est de la forme
   $y = f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est à dire
   $y = f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x} + Be^{\frac{1}{3}x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
3. $25y" + 60y' + 36y = 0$,
   Équation caractéristique : $25r^2 + 60r + 36 = 0$, $\Delta' = 0$ et $r = r_1 = r_2 = -\frac{6}{5}$. La solution est de la forme
   $y = f(x) = (Ax + B)e^{rx}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ c'est à dire
   $y = f(x) = (Ax + B)e^{-\frac{6}{5}x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

1.5 Équation différentielle linéaire avec second membre

Pour résoudre cette équation, on procède comme suit :

- On détermine une solution générale de l'équation sans second membre (homogène), notée y_h
- On détermine une solution particulière y_p de l'équation non homogène (avec second membre)
- La solution générale de l'équation avec second membre est $y_G = y_h + y_p$

Exercice :

Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \cos x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $g : x \longmapsto a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

Solution :

1.6 Exercices d'applications

Exercice 1 :

Trouver la fonction f solution de l'équation différentielle et vérifiant les conditions initiales indiquées

1. $2x'(t) + 3x(t) = 0$
2. $y'(x) - 2y(x) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = 1$
3. $y'(x) + y(x) = 0$ et $f(1) = e$
4. $2y" + 3y' + y(x) = 0$
5. $2x"(t) - 4x'(t) + 4x(x) = 0$
6. $2x"(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$
7. $y"(x) + 2y(t) = 0\,;\ f(0) = 1,\ f'(0) = \sqrt{2}$
8. $x"(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0\,;\ f(\frac{\pi}{4}) = 0,\ f(\frac{\pi}{4}) = -2$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation différentielle $9y'' + \pi^2 y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f sachant que : f(0)=2 et f'(0)=π.

Exercice 3 :

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle : y''+4y=0.
2. Trouver la solution particulière f dont sa courbe représentative passe par le point A(0 :2) et admet en ce point une tangente horizontale.

Exercice 4 :

1. Résoudre l'équation différentielle y''+16y=0
2. Déterminer, parmi les solutions de cette équation la fonction f telle que : $f(\frac{\pi}{6}) = 0$ et $f'(\frac{\pi}{6}) = 1$.
3. Écrire $f(x)$ sous la forme $A\cos(\omega x + \phi)$. A, ω, ϕ étant des constantes à déterminer.

Exercice 5 :

Déterminer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle : y''-y=0. Satisfaisant aux conditions suivantes :

1. f est une application paire
2. f(0)=1.

Exercice 6 :

1. Résoudre l'équation différentielle : $3y'' + 2y' - y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f dans chacun des cas :
   (a) $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$.
   (b) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet le point A(0 ;1) comme point d'inflexion.

(c) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f est tangente à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ d'équation $g(x) = e^{2x}$ au point $x = 0$.

(d) f admet un extremum égal à -1 pour $x = 0$.

(e) $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point B(0 ;-1).

Exercice 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2(1+i)z + 2i + 3 = 0$ z_1 et z_2 étant les deux solutions de cette équation, déterminer le nombre complexe $z = z_1 z_2$.
2. (a) Résoudre l'équation différentielle : $8y'' - \mathbf{p}y' - \mathbf{q}y = 0$ sachant que $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe z.

   (b) Déterminer la solution particulière de cette équation dont la courbe représentative passe par le point B(0 ;$\frac{1}{2}$) et admet en ce point une tangente perpendiculaire à la droite d'équation $y = -x - 1$.

1.7 Travaux Pratiques

T.P 1 : La mathématisation de nombreux phénomènes physiques conduit à des équations différentielles : ce T.P en est une illustration dans un cas simple et classique.

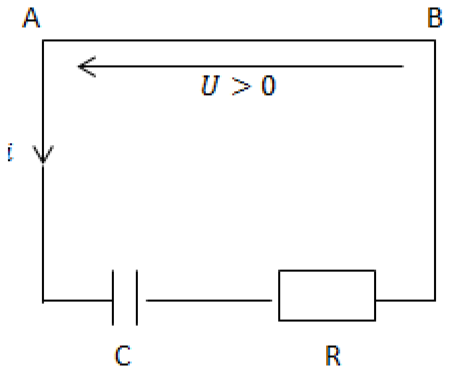
Un solide dont la température est de 70° est placé dans une pièce dont la température ambiante est de 20°. Les dimensions du solide sont très faibles comparativement à celles de la pièce.

On désigne par $\theta(t)$ la température du solide à l'instant t l'unité de temps étant la minute et l'unité de température le degré celsius ; on peut donc écrire $\theta(0) = 70$.
La loi de refroidissement d'un corps c'est à dire l'expression de $\theta(t)$ en fonction du temps, est la suivante : la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps et la température ambiante.

1. Sachant qu'au bout de 5 minutes la température est de $60°$ (soit $\theta(5) = 60$) et en tenant compte également de $\theta(0) = 70$, prouver que la loi de refroidissement du solide considéré est : $\theta(t) = 50(\frac{4}{5})^{\frac{t}{5}} + 20$ (on pourra poser $x(t) = \theta(t) - 20$).
2. Quelle sera la température du corps au bout de 20 minutes ?
3. Tracer la représentation graphique de la fonction : $t \longmapsto \theta(t)$

T.P 2 : Charge d'un condensateur sous une tension constante avec resistor.

On considère le circuit électrique ci-dessous.



R est la résistance du resistor et C la capacité du condensateur. R et C sont des constantes.
Soit $q(t)$ la charge de l'armature du condensateur à l'instant t. Dans le cours de physique, on prouve que : $R\frac{dx}{dt} + \frac{q}{C} = u$.

La fonction $t \longmapsto q(t)$ est la solution de l'équation différentielle $R\frac{dx}{dt} + \frac{1}{C}x(t) = u$ (ou $Rx'(t) + \frac{1}{C}x(t) = u$) (1)

qui prend la valeur 0 à l'instant $t = 0$ (soit $q(0) = 0$)

1. Déterminer la solution générale de l'équation (1) en posant $y(t) = x(t) - Cu$.
2. En utilisant la condition initiale $q(0) = 0$, prouver que $q(t) = Cu(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.
3. On observe à l'oscilloscope la tension $U_r = Ri$ aux bornes du resistor. Sachant que $i(t) = \frac{dq}{dt}$, donner l'expression de U_r en fonction du temps.

1.8 Correction des Travaux pratiques :

Devoir de classe

Durée : 3h
Documents autorisés : Néant

Exercice 1 : (4 points)   40 min

1. Qu'appelle t-on équation différentielle du second ordre ? donner un exemple.
2. Résoudre l'équation différentielle $y" - y' + \frac{1}{4}y = 0$
3. Déterminer la solution particulière de cette équation qui vérifie les deux conditions suivantes :
   – Sa courbe représentative passe par le point A(0 ; 4).
   – La tangente à cette courbe au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 0.

Exercice 2 : (5 points)   40 min

Un bloc de céramique est mis dans un four dont la température constante est 1000°C. Les variations de la température x du bloc en fonction du temps t sont données par l'équation différentielle suivante où k est une constante réel :

(E) : $x'(t) = k[1000 - x(t)]$.

1. On pose $y(t) = x(t) - 1000$; Écrire l'équation différentielle (F) satisfaite par y.
2. Résoudre (F) puis (E).
3. Le bloc initialement à 40°C est mis dans le four au temps $t = 0$. Si la température du bloc au temps $t = 1$ est 160°C, calculer la température du bloc au temps $t = 3$

Exercice 3 : (7 points) 60 min

1. Soit à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = \cos x$.
   (a) Déterminer les réels p et q tels que la fonction $g : x \longmapsto p\cos x + q\sin x$ soit solution de (E).
   (b) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $f + g$ est solution de (E) si et seulement si f est solution de l'équation (E') : $y' + 2y = 0$
   (c) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E') et en déduire les solution sur $\mathbb{R}$ de (E).
2. Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y" - 2y' + 5y = e^{-2x}$.
   (a) Déterminer un nombre réel m tel que la fonction $h :\longmapsto me^{-2x}$ soit solution de cette équation.
   (b) Résoudre l'équation proposée en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans la question 1)

Exercice 4 : (4 points) 40 min

Soit l'équation différentielle : $\mathbf{a}y'' + \mathbf{b}y' + \frac{1}{4}y = 0$ où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

1. Déterminer $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.
2. Résoudre cette équation differentielle.
3. Déterminer la solution particulière f de cette équation qui vérifie les deux conditions :
   – Sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ passe par le point A(0 ;4).
   – La tangente au point x=2 a pour coéfficient directeur 0.

Devoir à faire à la maison

<u>Durée</u> : 5 jours

<u>Problème 1</u> : (10 points)

<u>Partie A</u> :

1. Déterminer les solutions h sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y" + 4y' + 4y = 0$
2. On considère l'équation différentielle (F) : $y" + 4y' + 4y = -4x$
   (a) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction $\varphi :\longmapsto ax + b$ soit solution de (F).
   (b) Montrer qu'une fonction f est solution de f si, et seulement si, $f - \varphi$ est solution de (E).
   (c) En déduire toutes les solutions de (F).
   (d) Donner la solution f de (F) qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 - x$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f. On se propose d'étudier cette fonction ainsi que l'équation $f(x) = 0$.

1. (a) Calculer la fonction f' dérivée de f.
   (b) Dresser le tableau de variation de f' sur $[0; +\infty[$.
   (c) Indiquer la limite de f' en $+\infty$.
   (d) En déduire le signe de f' sur $[0; +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.
3. Indiquer la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote d que l'on déterminera.
5. Construire d et $\mathscr{C}$, sur un même graphique

<u>Problème 2</u> : (10 points)

Un objet relié à un parachute et largué d'un point O avec une vitesse initiale v_0 se déplace sur un axe vertical $(O; \vec{i})$.

On note $\vec{v}(t)$ la vitesse à l'instant t et v la norme de $\vec{v}$; v est une fonction de la variable t ($t \in \mathbb{R}_+$) vérifiant l'équation différentielle : (1) $mv' + kv = mg$ où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. (a) Trouver une fonction constante, solution particulière de (1).
   (b) Le résultat ci-dessus conduit à poser $w = v - \frac{mg}{k}$. Montrer que w est solution d'une équation sans second membre ; résoudre cette équation.
   Prouver que $v = v_0 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{k}$ où v_0 est la norme de la vitesse initiale.
2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8kg$; $g = 10m/s^2$ et $k = 25$ U.S.I
   (a) Donner la solution particulière de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 5m/s$. On appellera v_1 la fonction obtenue.
   (b) Donner la solution particulière de l'équation (1) correspondant à une vitesse initiale nulle. On appellera v_2 la fonction obtenue.
   (c) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite l lorsque t tend vers $+\infty$.
   (d) Donner la solution particulière de (1) correspondant à une vitesse initiale telle que $v_0 = 3,2m/s$. On appellera v_3 la fonction obtenue.

(e) Tracer soigneusement les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ représentant les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $||\vec{i}||$=2cm et $||\vec{j}||$=4cm.

Bibliographie

[1] **Vuibert** *Annales du BAC*, Mathématiques **A,C,D 1992**

[2] **Michel Dofal**, **J.P Bouvier**, **Jacques Chadenas**, **Pierre Daudin**, **Annette Leroy**, **Yves Olivier**, **André Pressiat**, *Livre de mathématiques terminale **D***, collection "GUIDES plus"

[3] **Collection inter africaine de mathématiques** *Livre de mathématiques Terminale S*

[4] **Bassila Jean Baptiste** *Cahier de cours d'équations différentielles* Lycée Thomas Sankara CONGO-Brazzaville (2007-2008).