Leçon d'arithmétique en terminale C : PGCD et PPCM

MOUNDOYI-MBOUNGOU Harold Amen
Université Marien Ngouabi
Ecole Normale Supérieure
Congo

14 Août 2014

Projet Prenum-AC

Présentation de la ressource

Dénomination de la ressource et des contributeurs

Titre de la ressource : ***PGCD et PPCM***

Nom de l'étudiant : ***MOUNDOYI-MBOUNGOU Harold Amen***

Noms de l'encadreur : ***Pas d'encadreur***

Objectif pédagogique général

Utiliser les PGCD et PPCM pour résoudre les problèmes

Objectifs pédagogiques spécifiques (0.P.S)

A la fin de la ressource, l'élève devra être capable de :

- Déterminer le $PGCD$ et $PPCM$ de deux entiers relatifs ;
- Utiliser les propriétés du $PGCD$ et du $PPCM$ pour démontrer ;
- Utiliser le théorème de Gauss et de Bézout pour démontrer et résoudre les problèmes ;
- Résoudre les équations diophantiennes de type : $ax + by = c$

Liens avec d'autres parties du programme Congolais

Les parties du programme ayant un lien avec cette ressource sont :

- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$;
- les congruences ;
- les nombres premiers.

‘

1. Plus grand commun diviseur (PGCD)

Exemple 1. Pour simplifier la fraction $\dfrac{159390}{49005}$ on peut diviser successivement le numérateur et le dénominateur par 5, puis 9, puis par 11.

$\dfrac{159390}{49005} = \dfrac{31878}{9801} = \dfrac{3542}{1089} = \dfrac{322}{99}$

La fraction $\dfrac{322}{99}$ alors obtenue ne peut plus être simplifiée.
Pour passer de $\dfrac{159390}{49005}$ à $\dfrac{322}{99}$ on a simplifié par $5 \times 9 \times 11 = 495$.

495 correspond au plus grand diviseur qui soit commun aux deux nombres 159390 et 49005.

1.1 Propriété-Définition.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Un entier naturel qui divise a et qui divise b est appelé diviseur commun à a et b.
l'ensemble des diviseurs communs à a et à b possède un plus grand élément que l'on appelle le plus grand commun diviseur de a et de b, on le note $PGCD(a, b)$.

Exemple 2.

L'ensemble des diviseurs de 15 est $\{1; 3; 5; 15\}$.
Dans $\mathbb{N}$ L'ensemble des diviseurs de 12 est $\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
L'ensemble des diviseurs communs à 12 et 15 est donc $D(12; 15) = \{1; 3\}$.
On a donc $PGCD(15; 12) = 3$.

En écrivant l'ensemble des diviseurs de 159390 et l'ensemble des diviseurs de 49005, on peut obtenir $PGCD(159390; 49005) = 495$ (exemple 1).

Remarque. a étant un entier naturel, l'ensemble des diviseurs de a est égal à l'ensemble des diviseurs de $-a$.
On pourra étendre, si besoin la notion de $PGCD$ à des nombres entiers relatifs.
On dira par exemple que $PGCD(-15; 12) = PGCD(15; 12) = 3$.

1.2 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On a

$$PGCD(a; b) \leq a; \quad PGCD(a; b) \leq b; \quad PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$$

Si b divise a, on a $PGCD(a; b) = b$, en particulier $PGCD(a; 1) = 1$ et $PGCD(a; a) = a$.

Exemple 3.
6 est un diviseur de 18 donc $PGCD(6; 18) = 6$.

Exercice 1. (voir correction)

En écrivant les diviseurs de 18 et 48, trouve $PGCD(18;48)$.

Exercice 2.(voir corr) déterminer :

a) $PGCD(125468;3)$ b) $PGCD(8625;5)$ c) $PGCD(7253;6)$

1.3 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
Soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. (On a $a = b \times q + r$)
Alors

si $r = 0$ $PGCD(a;b) = b$

si $r \neq 0$ $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

Exemple 4. Pour trouver le $PGCD$ de 2414 et 804, on peut écrire la division euclidienne de 2414 par 804.

$2414 = 804 \times 3 + 2$.
On en déduit alors $PGCD(2414;804) = PGCD(804;2)$.
Il est immédiat que $PGCD(804;2) = 2$ car 2 divise 804.
Donc $PGCD(2414;804) = 2$.

Exercice 3. (voir corr) Déterminer :
a) $PGCD(584;64)$ b) $PGCD(213;5539)$ c) $PGCD(35691;221)$.

Exercice 4.(voir corr) Démontrer que le $PGCD$ de deux nombres entiers naturels non nuls consécutifs est égal à 1.

1.4 Propriété-Algorithme d'Euclide.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On définit la suite r_n d'entiers naturels de façon suivante :

$r_0 = b\,;$ r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b.
pour $n \geq 1$

si $r_n = 0$ alors $r_{n+1} = 0$.

si $r_n \neq 0$ alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n.

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$ on a $PGCD(a;b) = r_{n_0}$.

Remarque. En effectuant ainsi des divisions euclidiennes successives de a par b puis du diviseur par le reste,... le premier reste non nul est le $PGCD$ de a et de b. C'est l'algorithme d'Euclide.
Suivant les nombres a et b, le nombre d'itérations à effectuer peut être plus ou moins grand.
Sachant que $PGCD(a;b) = PGCD(b;a)$ on aura toujours intérêt à prendre $b \leq a$.

Exemple 5.

a) pour déterminer le $PGCD$ de 410258 et de 126 écrivant les divisions euclidiennes successives de 410258 et 126.

$410258 = 126 \times 3256 + 2$

$126 = 2 \times 63 + 0$

Donc $PGCD(410258;126) = 2$

b) Calculons le $PGCD$ de 1636 et de 1128 avec l'algorithme d'Euclide.

Etape	a	b	Reste	Quotient
1	1636	1128	508	1
2	1128	508	112	2
3	508	112	60	4
4	112	60	52	1
5	60	52	8	1
6	52	8	4	6
7	8	4	0	2

Exercice 5. En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le $PGCD$ de :

a) 853 et 212 b) 712 et 114 c) 650 et 8563 d) 12590 et 365

Exercice 6. Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le $PGCD$ de $n+1$ et de $3n+4$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le $PGCD$ de n^2+5n+7 et de $n+1$.

1.4 Propriété.

Soient a et b deux entiers naturel non nuls.

- l'ensemble des diviseurs communs à a et à b est l'ensemble des diviseurs de leur $PGCD$.
- Pour tout entier naturel non nul k, on a $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à 656 et 312.

Exercice 9. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b < a$.
Démontrer que $PGCD(a;b) = PGCD(a-b;b)$.
En utilisant cette propriété, faire apparaître un algorithme de recherche du $PGCD$ des deux nombres 3587 et 2743.

2. Nombres premiers entres eux

2.1 Définition.

Dire que deux nombres entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux signifie que $PGCD(a;b) = 1$.

2.2 Propriété.

a et b désigne des nombres entiers relatifs non nuls.
Si $d = PGCD(a;b)$, alors il existe des nombres entiers relatifs a' et b' premiers entre eux tels que :

$$a = da' \quad b = db'$$

Remarque.

par hypothèse, $d = PGCD(a;b)$, donc d divise a et il existe un nombre entier relatif a' tel que $a = da'$.
De même, il existe un nombre entier relatif b' tel que $b = db'$.
Donc

$$d = PGCD(a;b) = PGCD(da';db') = |d|PGCD(a';b')$$

or $d \geq 1$, donc $|d| = d$ et $d \neq 0$, d'où $\quad PGCD(a'; b') = 1$

Exercice.

$a = 3n + 4$ et $b = 2n + 3$ où n désigne un nombre entier naturel.
Démontrer que a et b sont premier entre eux.

Solution. Pour démontrer que a et b sont premiers entre eux, il suffit de déterminer une combinaison linéaire de a et b égale à 1.
Pour cela ;

$$3b - 2a = 3(2n + 3) - 2(3n + 4) = 1$$

on note $d = PGCD(a; b)$.
d divise a et b, donc divise $3b - 2a$ c'est-à-dire 1. Or le seul diviseur de 1 est lui-même. Donc $d = 1$.
Ainsi pour tout n, $PGCD(a; b) = 1$.

3. Plus petit commun multiple (PPCM)

Exemple 1. pour effectuer le calcul $\dfrac{65}{18372} - \dfrac{21}{15310}$, on peut réduire les fractions au même dénominateur.

$$\frac{65 \times 15310}{18372 \times 15310} - \frac{21 \times 18372}{15310 \times 18372} = \frac{995150}{281275320} - \frac{385812}{281275320} = \frac{609338}{281275320}$$

on simplifie ensuite $\dfrac{609338}{281275320}$ en cherchant le $PGCD$ de 609338 et de 281275320 et on obtient $\dfrac{199}{91860}$.
Si on avait pu prévoir que 91860 était un multiple commun à 18372 et à 15310 (et même que c'était le plus petit multiple commun), les calculs en auraient été simplifiés.
En effet 91860 étant égal à 18372×5 et à 15310×6, on aurait pu écrire

$$\frac{65 \times 5}{18372 \times 5} - \frac{21 \times 6}{15310 \times 6} = \frac{325}{91860} - \frac{126}{91860} = \frac{199}{91860}$$

La recherche des multiples communs à deux nombres présente donc un intérêt certain pour le calcul.

3.1 propriété-Définition.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
l'ensemble des multiples strictement positifs communs à a et b possède un plus petit élément.
Ce plus petit élément est appelé "plus petit commun multiple" de a et b.
On le note $PGCD(a; b)$.

Remarque. On a de façon immédiate :

$PPCM(a; b) = PPCM(b; a)$
si b est multiple de a, $PPCM(a; b) = b$.

Exercice 1. Ecris l'ensemble des multiples strictement positifs de 10.
Ecrit l'ensemble des multiples strictement positifs de 6.
Ecrit l'ensemble des multiples strictement positifs communs à 6 et à 10.
Quel est le $PPCM$ de 6 et 10.

Exercice 2. Ecris l'ensemble des multiples de a et l'ensemble des multiples de b, et en déduire

$PPCM(a;b)$ dans chacun des cas suivant :

1) $a = 15$; $b = 24$; 2) $a = 8$; $b = 12$; 3) $a = 9$; $b = 16$

3.2 Propriété. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

- $PGCD(a;b)$ divise $PPCM(a;b)$
- $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$
- Si a et b sont premiers entre eux, on a $PPCM(a;b) = a \times b$
- Si k est un entier naturel non nul, on a $PPCM(ka;kb) = k \times PPCM(a;b)$

Exercice 3. pour chacun des couples $(a;b)$, déterminer $PGCD(a;b)$ et en déduire $PPCM(a;b)$

1) $a = 42$; $b = 184$ 2) $a = 56$; $b = 1716$ 3) $a = 115$; $b = 244$

Exercice 4. n est un entier naturel non nul, déterminer

1) $PPCM(12n;15n)$ 2) $PPCM(2n;2n+1)$ 3) $PPCM(5n+7;2n+3)$

3.3 Propriété. Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des multiples communs à a et à b est l'ensemble des multiples de leur $PPCM$.

Exercice. Soient a, b, et c trois entiers naturels non nuls.
Démontrer que si c est divisible par a et par b, alors c est divisible par $PPCM(a;b)$.

4. Théorème de Bézout

4.1. Identité de Bézout

a et b désignent deux nombres entiers relatifs non nuls.
Si $d = PGCD(a;b)$, alors il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = d$.

Exemple. On sait que $PGCD(55;35) = 5$, donc d'après l'identité de Bézout, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $55u + 35v = 5$ par exemple $u = 2$ et $v = -3$.

En effet, $55 \times 2 + 35 \times (-3) = 5$.

Remarque.

- Le couple $(u;v)$ n'est pas unique ! si $a = 3$ et $b = 2$, $PGCD(a;b) = 1$ et $1 \times 3 - 1 \times 2 = 1$, mais aussi $-1 \times 3 + 2 \times 2 = 1$.
- La réciproque de l'identité de Bézout est fausse. par exemple, $3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$ et pourtant 2 n'est pas le $PGCD$ de 2 et 3.

4.2. Théorème de Bézout

a et b désignent deux nombres entiers non nuls.
a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration.

- Si a et b sont premiers entre eux, alors $PGCD(a;b) = 1$.
  L'identité de Bézout permet alors de dire qu'il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
- Réciproquement, s'il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$, tout diviseur communs à a et à b divise $au + bv$, donc 1.
  Donc $PGCD(a;b) = 1$ et donc a et b sont premiers entre eux. □

Exemple. Pour tout nombre entier naturel n non nul, $3 \times (5n + 7) - 5 \times (3n + 4) = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, $5n + 7$ et $3n + 4$ sont premiers entre eux.

Exercice. n désigne un nombre entier naturel non nul.
Démontrer que $a = 2n + 1$ et $b = 3n + 2$ sont premiers entre eux.

Solution. L'idée consiste à faire une combinaison linéaire de a et b indépendante de n, c'est-à-dire dans laquelle les n sont "éliminés".

$-3a + 2b = -3(2n + 1) + 2(3n + 2) = -6n - 3 + 6n + 4 = 1$
$-3a + 2b = 1$
Il existe donc des nombres entiers relatifs $u = -3$ et $v = 2$ tels que $au + bv = 1$.
Donc, d'après le théorème de Bézout, $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux.

Exercice. On considère $a = 145$ et $b = 55$.

a) Déterminer $PGCD(a;b)$ avec l'algorithme d'Euclide.

b) En exprimant de proche en proche chaque reste en fonction de a et b, déterminer un couple $(u;v)$ de nombres entiers relatifs tels que $au + bv = PGCD(a;b)$

Solution. a)

		a	b	Reste
Etape 1 :	145= 55×2+35	145	55	35
Etape 2 :	55= 35×1+20	55	35	20
Etape 3 :	35=20×1+15	35	20	15
Etape 4 :	20=15 ×1+5	20	15	5
Etape 5 :	15= 5×3	15	5	0

Donc $PGCD(a;b) = 5$

b) On remonte l'algorithme d'Euclide à partir de l'étape 4 en isolant les restes dans un membre.

$$\begin{aligned}
5 &= 20 - 15 \times 1 \\
&= 20 - (35 - 20 \times 1) \times 1 \\
&= -35 + 20 \times 2 \\
&= -35 + (55 - 35 \times 1) \times 2 \\
&= 55 \times 2 - 35 \times 3 \\
&= 55 \times 2 - (145 - 55 \times 2) \times 3 \\
5 &= 55 \times 8 - 145 \times 3
\end{aligned}$$

Donc $5 = 145 \times (-3) + 55 \times 8$, on en déduit que $5 = au + bv$ avec $u = -3$ et $v = 8$.

5. Le théorème de Gauss

a, b et c désignent trois.
nombres entiers relatifs non nuls.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration. a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des nombres entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
En multipliant chaque membre de l'égalité par c, on obtient $auc + bvc = c$.
a divise auc et par hypothèse, a divise bc donc bvc, donc a divise $auc + bvc$, c'est-à-dire a divise c. $\square$

Remarque. Il est essentiel de vérifier que a est premier avec b, car a peut diviser bc en ne divisant ni b ni c. Par exemple, $300 = 15 \times 20$, or 6 divise 300 sans diviser ni 15, ni 20.

Exemple 1. Résoudre l'équation $7x = 11y$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Si $7x = 11y$, alors 11 divise $7x$. Or 7 et 11 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise x. Par conséquent, il existe un nombre entier relatif k tel que $x = 11k$. Alors de $7x = 11y$, on déduit que $7 \times 11k = 11y$, soit $y = 7k$.
- Réciproquement, tous les couples $(11k; 7k)$ sont solutions de l'équation $7x = 11y$.
  En effet, $7 \times 11k = 11 \times 7k$.
- Conclusion.
  Les solutions de l'équation $7x = 11y$ sont les couples $(11k; 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Conséquence

Propriété. a, b et c désignent des nombres entiers relatifs non nuls.
Si b et c sont premiers entre eux et divisent a, alors bc divise a.

Démonstration.

- b divise a donc il existe un nombre entier relatif k tel que $a = kb$.
- c divise a donc il existe un nombre entier relatif k' tel que $a = k'c$.

Ainsi $kb = k'c$.
On en déduit alors que b divise $k'c$.
b et c étant premier entre eux, on déduit d'après le théorème de Gauss, que b divise k' c'est-à-dire qu'il existe un nombre entier relatif k'' tel que $k' = k''b$.
De $a = k'c$, on déduit alors $a = k''bc$ donc bc divise a.

Exemple 2. le nombre 1573875 est divisible par 5 (car le chiffre des unités est 5) et il est divisible par 9 (car la somme de ses chiffres est divisible par 9). Or 9 et 5 sont premiers entre eux, donc 1573875 est divisible par 5×9, soit 45.

Exemple 3. Le produit $n(n+1)(n+2)$ de trois nombres entiers naturels consécutifs est divisible par 2 et par 3. Ce produit est donc divisible par 6 puisque 2 et 3 sont premiers entre eux.

6. Résoudre une équation diophantienne

Activité.

(E) est l'équation $7x - 11y = 3$ où x et y sont des nombres entiers naturels.

a) Vérifier que le couple $(x_0; y_0) = (13; 8)$ est solution de l'équation (E).
b) En déduire la résolution de l'équation (E).

Solution.

a) $7x_0 - 11y_0 = 7 \times 13 - 11 \times 8 = 3$, donc $(x_0; y_0)$ est une solution de (E).

b) un couple $(x; y)$ est solution de (E) si, et seulement si, $7x - 11y = 3$, ce qui équivaut à : $7x - 11y - (7x_0 - 11y_0) = 3 - 3$ (on retranche 3 à chaque membre de (E)), c'est-à-dire $7(x - x_0) = 11(y - y_0)$. Or d'après l'exemple 1 ci-dessus, les solutions de cette équation sont les couples $(x - x_0; y - y_0) = (11k; 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi les solutions de l'équation (E) sont les couples $(x; y)$ tels que :

$$x = x_0 + 11k = 13 + 11k \quad \text{et } y = y_0 + 7k = 8 + 7k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$