Table des matières

Etudes Générale sur les coniques

0.1 Historique

C'est MENECHME élève d'EUDOXE et contemporain de PLATON qui a découvert des sections coniques au IV^e siecle avant J.CHRIST. iL d'abord étudié l'intersection d'un cône circulaire droit(c'est-à-dire un cône de revolution dont l'angle est sommet est droit) avec un plan perpendiculaire à une génératrice de ce cône.
La courbe obtenue est une parabole(mot obtenu par ARCHIMEDE).
Puis MENECHME a fait varié l'angle au sommet du cône (en coupant toujours à un plan perpendiculaire à une génératrice de cône) et obtenu tantôt une ellipse quand l'angle au sommet était aigus, tantôt une hyperbole quand l'angle au sommet était obtus.
C'est semble-il APPOLLONIUS de PERCA (vers 262-180 avant J.CHRIS) qui a donné leurs noms à l'ellipse, parabole et hyperbole, mais ce n'est pas lui qui les imaginé .
Il a systématisé l'étude des sections coniques en coupant un cône de revolution quelconque, par un plan quelconque, dans n'importe quelle direction quelconque. Il a dégagé les noms d'excentricité et de directrice.
Le suffixe grec utilisé bole dans les mots hyperbole et parabole, est le même que celui des mots de discobole et symbole (qui signifie lancer, jeter)

0.2 Définitions

Définition 0.1. *(Définition d'une conique)*
Soit F un point, $(\mathcal{D})$ une droite ne contenant pas F et $e > 0$. On appelle ***conique*** *de* ***foyer*** *F, de* ***directrice*** *$(\mathcal{D})$ et d'****excentricité*** *e, l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :*

$$\frac{MF}{MH} = e, \tag{1}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$.

Figure

NB

- $*$ si $e = 1$, on dit que (Γ) est une parabole.
- $*$ si $0 < e < 1$, on dit que (Γ) est ellipse.
- $*$ si $e > 1$, on dit que (Γ) est une hyperbole.

NB
(1) peut encore s'écrire :

$$(\Gamma) = \{M \in \mathcal{P} / d(M, F) = ed(M, (\mathcal{D})\}$$

Ainsi, si le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
et si $F(x_F, y_F)$, M(x,y), $(\mathcal{D}) : ax + by + c = 0$, alors (1) s'écrit :

$$(\Gamma) = \left\{ M(x,y) \in \mathcal{P} / \sqrt{(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2} = e\frac{\mid ax + by + c \mid}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}$$

Définition 0.2. *(Définition algébrique d'une conique)*
une ***conique*** *(Γ), est une courbe dont une équation cartésienne dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est :*

$$(\Gamma) : AX^2 + BY^2 + 2CX + 2DY + E = 0, \quad \text{où} \quad A, B, C, D, E \quad \text{des réels.}$$

On peut toujours trouver un repère orthonormé $(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où cette équation cartésienne se ramène à une forme plus simple appelée ***équation réduite d'une conique****.*

Définition 0.3. *(d'une conique)*
Surface plane d'un cône (voir figure)

0.3 PARABOLE

Une parabole est une conique dont une équation est du type :

$$x^2 = 2py \quad \text{ou} \quad y^2 = 2px \quad (p \neq 0)$$

Exercice 0.1.
Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne un point F et une droite $(\mathcal{D})$ ne contenant pas F.

$$\text{Soit} \quad (\Gamma) = \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = 1 \right\}, \quad H \quad \text{est le projeté orthogonal de} \quad M \quad \text{sur} \quad (\mathcal{D}).$$

1) *Tracer (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en K.*
2) *Montrer que le milieu S de $[KF]$ appartient à (Γ).*
3) *Soit M_0 un point de (Γ).*
a) *Montrer que M_0 appartient à la médiatrice $[FH_0]$, H_0 est le projeté orthogonal de M_0 sur $(\mathcal{D})$.*
b) *Placer le point M_0.*
c) *En déduire la construction point par point de (Γ).*
4) *On pose $KF = p$, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de (Δ). Soit $M(x,y)$ un point de (Γ).*
a) *Placer M dans le plan puis donner les coordonnées des points F, K, H dans ce repère.*
b) *Déterminer l'équation de la droite $(\mathcal{D})$.*
c) *Déterminer l'équation cartésienne de (Γ).*

Solution 0.1.

$$(\Gamma) = \left\{ M \in \mathcal{P} / \frac{MF}{MH} = 1 \right\}, \quad H \quad \text{est le projeté orthogonal de} \quad M \quad \text{sur} \quad (\mathcal{D}).$$

1) Traçons (Δ) la droite passant par F et perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en K.
Figure

2) Montrons que le milieu S de $[KF]$ appartient à (Γ).
S milieu de $[KF]$, alors $SF = KS$.

$$SF = KS \Leftrightarrow \frac{SF}{SK} = 1$$

Comme K est le projeté orthogonal de S sur $(\mathcal{D})$, alors $S \in (\Gamma)$.

3) Soit M_0 un point de (Γ).

a) Montrons que M_0 appartient à la médiatrice $[FH_0]$, H_0 est le projeté orthogonal de M_0 sur $(\mathcal{D})$.

$$\frac{M_0F}{M_0H_0} = 1 \Rightarrow M_0F = M_0H_0 \Rightarrow M_0 \in Med[FH_0].$$

b) Plaçons le point M_0.
Méthode de construction

- *On place H_0 sur la droite $(\mathcal{D})$;*
- *On trace la médiatrice de $[FH_0]$;*
- *On trace $(\mathcal{D}')$ la perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ en H_0 ;*
- *M_0 est le point d'intersection de $(\mathcal{D}')$ et $Med[FH_0]$.*

c) construction point par point de (Γ).

4) On pose $KF = p$, le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, avec $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de (Δ). Soit $M(x, y)$ un point de (Γ).

a) Plaçons M dans le plan puis donnons les coordonnées des points F, K, H dans ce repère.

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right); \quad K\left(-\frac{p}{2}, 0\right); \quad \left(-\frac{p}{2}, y\right)$$

b) Déterminons l'équation de la droite $(\mathcal{D})$.

$$(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}$$

c) Déterminons l'équation cartésienne de (Γ).

$$\begin{aligned}
\frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF &= MH \\
MF^2 &= MH^2 \\
\overrightarrow{MF}^2 &= \overrightarrow{MH}^2 \\
(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2 &= (x_H - x)^2 + (y_H - y)^2 \\
\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 &= \left(-\frac{p}{2} - x\right)^2 \\
\frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2 &= \frac{p}{2} + px + x^2
\end{aligned}$$

$$(\Gamma) : y^2 = 2px \quad ou \quad x = \frac{1}{2p}y^2.$$

$$x = ay^2 \quad avec \quad a = \frac{1}{2p}$$

Remarque 0.1.

* $*$ *La droite* (Δ) *passant par* F *et perpendiculaire à* $((\mathcal{D})$ *en* K *est appelé* *<u>axe focale</u>* *de la parabole ;*
* $*$ $(\mathcal{D})$ *est appelé* *<u>directrice</u>* *:*
* $*$ *Le point* F *est appelé* *<u>foyer</u>* *;*
* $*$ *Le milieu* S *de* $[KF]$ *est appelé* *<u>sommet</u>* *de la parabole ;*
* $*$ *Dans le repère orthonormé* $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, *l'équation réduite de* (Γ) *est de la forme :*

$$x = ay^2 \quad ou \quad y = ax^2 \quad avec \quad a = \frac{1}{2p} \neq 0$$

Dans chaque cas, le réel p *est appelé* *<u>paramètre</u>* *de la parabole. Ainsi les deux cas suivants :*

<u>1er cas</u>

- *<u>Equation :</u>* $x = ay^2$, $a = \dfrac{1}{2p}$, $p = \dfrac{1}{2a}$
- *<u>Sommet :</u>* S ;
- *<u>Axe focal :</u>* droite de repère $(S, \overrightarrow{i})$;
- *<u>Foyer :</u>* $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$; $F\left(\dfrac{1}{4a}, 0\right)$;
- *<u>Directrice :</u>* $(\mathcal{D}) : x = -\dfrac{p}{2}$; $(\mathcal{D}) : x = -\dfrac{1}{4a}$.

<u>2ème cas</u>

- *<u>Equation :</u>* $y = ax^2$, $a = \dfrac{1}{2p}$, $p = \dfrac{1}{2a}$.
- *<u>Sommet :</u>* S ;
- *<u>Axe focal :</u>* droite de repère $(S, \overrightarrow{j})$;
- *<u>Foyer :</u>* $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$; $F\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$;
- *<u>Directrice :</u>* $(\mathcal{D}) : y = -\dfrac{p}{2}$; $(\mathcal{D}) : y = -\dfrac{1}{4a}$.

Exercice 0.2.

Construire la parabole (Γ) *de foyer* F, *de directrice* $(\mathcal{D})$, *puis donner une équation cartésienne de* $(-)$

a) $F(1,1)$ *et* $(\mathcal{D}) : x = 4$.

b) $F(2,5)$ *et* $(\mathcal{D}) : y = 1$

c) $F(-2,4)$ *et* $(\mathcal{D}) : y = x$.

Solution 0.2.

<u>figure</u>

a) $F(1,1)$ *et* $(\mathcal{D}) : x = 4$.
Donnons l'équation cartésienne de (Γ) *:*

$$\begin{aligned} \frac{MF}{MH} = 1 \Leftrightarrow MF &= MH \\ MF^2 &= MH^2 \\ \overrightarrow{MF}^2 &= \overrightarrow{MH}^2 \\ (x_F - x)^2 + (y_F - y)^2 &= (x_H - x)^2 + (y_H - y)^2 \\ \left(1 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y\right) &= (16 - 8x + x^2) \\ (\Gamma) : y^2 - 2y + 6y - 14 &= 0, \quad \textit{Dans le repère} \quad (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) \end{aligned}$$

<u>NB :</u>
Equation de (Γ) *Dans le repère* $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$$\begin{aligned} y^2 - 2y + 6y - 14 &= 0 \\ (y-1)^2 - 1 + 6x - 14 &= 0 \\ (y-1)^2 + 6x - 15 &= 0 \\ (y-1)^2 + 6\left(x - \frac{15}{6}\right) &= 0 \\ (y-1)^2 + 6\left(x - \frac{5}{2}\right) &= 0. \\ \textit{Posons} \quad : X &= x - \frac{5}{2} \quad \textit{et} \\ Y &= y - 1 \\ Y^2 + 6X &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi l'équation de la parabole (Γ) *dans le repère* $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ *devient :*

$$(\Gamma) : Y^2 = -6x \quad \textit{avec} \quad S\left(\frac{5}{2}, 1\right)$$

Remarque 0.2.
Dans le repère $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $S\left(\frac{5}{2}, 1\right)$.
Dans le repère $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $S\,(0,0)$

0.3.1 Régions du plan limitées par la parabole

Rappelons que l'intérieur de la parabole est la région limitée par la parabole et contenant F. On caractérise les différentes régions par les équivalences, où M désigne un point du plan de coordonnées x, y, et (Γ) la parabole de foyer F, H étant la projection orthogonale de M sur la directrice.

- M intérieur à $(\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2px < 0 \Leftrightarrow MF < MH$
- M intérieur à $(\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2px > 0 \Leftrightarrow MF > MH$
- M intérieur à $(\Gamma) \Leftrightarrow y^2 - 2px = 0 \Leftrightarrow MF = MH$

0.3.2 Etude géométrique de l'ensemble $\frac{MF}{MH} = e$

Figure

Nous écartons de ce qui va suivre le cas particulier $e = 1$, qui donne la parabole. Soit K la projection orthogonale de F sur $(\mathcal{D})$, il est évident que la perpendiculaire de FK sur $(\mathcal{D})$ est axe de symétrie de l'ensemble.
D'autre part, puisque $e \neq 0$, il existe deux points A et A' tels que :

$$\frac{AF}{AK} = \frac{A'F}{A'K} = e$$

$$\text{On a donc : } \begin{array}{rcl} e\overline{AK} + \overline{AF} & = & 0 \\ e\overline{A'K} - \overline{AF} & = & 0 \end{array}$$

Les points A et A' apparaissent comme des barycentre des points F et K tels que :

$$\begin{cases} A = bar\,(F(1), K(e)) \\ A' = bar\,(F(1), K(-e)) \end{cases}$$

0.3.3 Etude analytique :

Nous supposons que le plan est rapporté au repère orthonormé suivant :
Le point O est le milieu de AA' ;
L'axe $x'Ox$ est porté par AA' et dirigé de 0 vers A, l'axe $y'Oy$ est perpendiculaire en O à $x'Ox$.
Nous posons $\overline{OA} = a$. Des relations :

$$\begin{array}{rcl} e\overline{AK} + \overline{AF} & = & 0 \\ e\overline{A'K} - \overline{AF} & = & 0, \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} \overline{0F} + e\overline{0K} & = & (e+1)a \\ \overline{0F} - e\overline{0K} & = & (e-1)a \end{array}$$

On tire par addition et soustraction :

$$\overline{OF} = ae, \qquad \overline{0K} = \frac{a}{e}.$$

Remarquons que :

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{0K}} = e^2.$$

Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées x, y.
F a pour coordonnées $F(ae, 0)$, l'équation de $(\mathcal{D})$ est : $x - \frac{a}{e} = 0$. On a donc :

$$\begin{array}{rrcl} & MF^2 & = & (x-ae)^2 + y^2, \\ & MH^2 & = & \left(x - \frac{a}{e}\right)^2; \\ \text{donc} & MF^2 - e^2MH^2 & = & (x-ae)^2 + y^2 - e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2, \\ \text{Soit} & MF^2 - e^2MH^2 & = & y^2 - (e^2-1)(x^2-a^2). \end{array}$$

Il en résulte que l'équation de (Γ) est :

$$y^2 = (e^2-1)(x^2-a^2).$$

0.4 Ellipse

0.4.1 Equation réduite de l'ellipse

Si l'on pose $\overline{OF} = c$, on a $c = ae$, donc $e = \dfrac{c}{a}$; et puisque $e < 1 : c < a$. On définit b par :

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{ou} \quad : b^2 = a^2 - c^2;$$

$$\text{donc} \quad e^2 - 1 = \frac{c^2}{a^2} - 1 = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{et} \quad b < a$$

L'équation de l'ellipse est alors :

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),$$

$$\text{qui s'écrit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cette équation fait apparaître la symétrie par rapport à l'axe $y'Oy$, donc un second foyer F' définit par $OF' = -a$, et une seconde directrice $(\mathcal{D})$ définie par $\overline{OK} = -\dfrac{a^2}{c}$.
Le point O, centre de symétrie, est le **centre** de l'ellipse.

Définition 0.4. *(de l'ellipse)*
Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on appelle ellipse, l'ensemble des points notés (E) définie par :

$$(E) = \left\{ M(x,y) \in \mathcal{P} / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}. \quad \text{avec} \quad a > 0, b > 0$$

NB
Si $a = b$, l'ellipse est le cercle de centre $0(0,0)$ et de rayon $R = a$.

Eléments caractéristiques :

Deux cas se présentes :
1er cas : a>b

Equation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Excentricité : $e = \dfrac{c}{a}$

Sommets : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$

Foyers : $F(c,0)$, $F'(-c,0)$

Directrices : $(\mathcal{D}) : x = \dfrac{a}{2}$, $(\mathcal{D}') : x = -\dfrac{a}{2}$

Axe focal : $(AA') = (FF')$

2ème cas : a<b

Equation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Demi-distance focale : $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

Excentricité : $e = \dfrac{c}{b}$

Sommets : $B(0, b),\ B'(0, -b)$

Foyers : $F(0, c),\ F'(0, -c)$

Directrices : $(\mathcal{D}) : y = \dfrac{b}{2},\ (\mathcal{D}') : x = -\dfrac{b}{2}$

Axe focal : $(BB') = (FF')$

Exercice 0.3.

Reconnaitre et caractériser les ensembles (E) :

a) $(E) = \left\{M(x,y) \in \mathcal{P}/\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}.$

b) $(E) = \left\{M(x,y) \in \mathcal{P}/4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0\right\}$

Solution 0.3.

Reconnaissons et caractérisons les ensembles :

$$(E) = \left\{M(x,y) \in \mathcal{P}/\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

Reconnaissance :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} &= 1\\ \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} &= 1\end{aligned}$$

(E) est de la forme : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *avec* $a = 2$, $b = 3$, *alors* (E) *est une ellipse.*

Caractérisons (E)

$$(E) = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1, \quad avec \quad b > a.$$

$\ast$ *Demi-distance focale*

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{b^2 - a^2}\\ &= \sqrt{9 - 4}\\ c &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

$\ast$ *Excentricité de (E) :*

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

* <u>*Sommets :*</u>

$$B(0,3), \quad B'(0,-3), \quad A(2,0), \quad A'(-2,0)$$

* <u>*Directrices :*</u>

$$(\mathcal{D}) : y = \frac{\sqrt{9\sqrt{5}}}{5}, (\mathcal{D}') = \quad \frac{\sqrt{-9\sqrt{5}}}{5}.$$

* <u>*Axe focal :*</u> *(BB'), centre $O(0,0)$.*
* <u>*Foyers :*</u>

$$F(0,\sqrt{5}), \quad F'(0,-\sqrt{5}).$$

* <u>***Construction***</u>

- *L'ellipse est inscrite dans le rectangle de côté $[AA']$ et $[BB']$.*
- *Ce rectangle est appelé rectangle fondamental.*
- *Le cercle de centre A, de rayon $[OB]$ coupe l'axe focal en deux points F et F'.*
- *OB=OB'=AF=AF'=b*
- *OF=OF'=c.*
- *FF'=2c*

b) $(E) = \left\{M(x,y) \in \mathcal{P}/4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0\right\}$

* <u>*Reconnaissance :*</u>

$$\begin{aligned}
(E) : 4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 &= 0\\
4x^2 + 16xy^2 - 2y + 13 &= 0\\
4(x^2 + 4x) + y^2 - 2y + 13 &= 0\\
4[(x+2)^2 - 4] + (y-1)^2 - 1 + 13 &= 0\\
4(x+2)^2 - 16 + (y-1)^2 - 1 + 13 &= 0\\
(x+2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} &= 1\\
\frac{(x+2)^2}{(1)^2} + \frac{(y-1)^2}{(2)^2} &= 1
\end{aligned}$$

$$\text{Posons} \quad X = x+2, \quad Y = y-1$$

$$\Rightarrow x = X - 2, \quad y = Y + 1$$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\Omega(-2,1)$ L'équation devient :

$$\frac{X^2}{(1)^2} + \frac{Y^2}{(2)^2} = 1$$

Cette équation est de la forme :

$$\frac{x^2}{(a)^2} + \frac{y^2}{(b)^2} = 1, \quad \text{avec} \quad a = 1 \quad \text{et} \quad b = 2$$

De plus $b > a$, alors (E) est une ellipse de centre $\Omega(0,0)$ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

* <u>*Caractérisons (E)*</u> *Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:*

$$\frac{X^2}{(1)^2} + \frac{Y^2}{(2)^2} = 1$$

∗ *Demi-distance focale*

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{b^2 - a^2} \\ &= \sqrt{4-1} \\ c &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

∗ *Excentricité de (E) :*

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∗ *Sommets :*

$$B(0,2), \quad B'(0,-2), \quad A(1,0), \quad A'(-1,0)$$

∗ *Directrices :*

$$(\mathcal{D}) : y = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad (\mathcal{D}') = \frac{-4\sqrt{3}}{3}.$$

∗ *Axe focal :* (BB'), *centre* $O(0,0)$.

∗ *Foyers :*

$$F(0,\sqrt{3}), \quad F'(0,-\sqrt{3}).$$

∗ *Dans le repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

∗ *Sommets :*

$$B(-2,3), \quad B'(-2,-1), \quad A(-1,1), \quad A'(-3,1)$$

∗ *Foyers :*

$$F(-2,\sqrt{3}+1), \quad F'(-2,1-\sqrt{3}).$$

∗ *Directrices :*

$$(\mathcal{D}) : y = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1, \quad (\mathcal{D}') = \frac{-4\sqrt{3}}{3} + 1.$$

∗ ***Construction :***

0.4.2 Définition monofocale de l'ellipse

Définition 0.5.
Soit F un point, $(\mathcal{D})$ une droite ne passant pas par F et $e \in]0, e[$.
On appelle ellipse, l'ensemble :

$$(E) = \{M \in \mathcal{P} / MF = eMH\}, \quad H \quad \textit{est le projeté orthogonal de} \quad M \quad \textit{sur} \quad (\mathcal{D})$$

Exercice 0.4.
Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse (E) de foyer $F(0,2)$, de directrice $(\mathcal{D}) : x = 5$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$

0.4.3 Définition bifocale de l'ellipse

Soit F et F' deux points distincts de plan $\mathcal{P}$.
L'ellipse de grand axe (AA') et de foyers FF' est l'ensemble des points (E) définie par :

$$(E) = \{M \in \mathcal{P} / MF + MF' = 2a\}$$

NB :
Si le grand axe est (BB') alors :

$$(E) = \{M \in \mathcal{P} / MF + MF' = 2b\}$$

0.4.4 Construction géométrique d'un point de l'ellipse de foyers F et F'

Méthode de construction :

- On trace le cercle $(\mathcal{C})$ appelé cercle directeur de centre F et de rayon $R = 2a$ tel que :

$$OA = OA'; \qquad AA' = 2a; \qquad OF = OF' = c; \qquad FF' = 2c; \qquad 2c < 2a$$

- Choisir un point K sur ce cercle.
- Tracer le segment KF'.
- Tracer la médiatrice du segment $[KF']$.
- Le point d'intersection de la droite KF avec la médiatrice $[KF']$ est le point de l'ellipse.

NB :

$$\begin{aligned} MF + MF' &= MF + MK \\ &= MF + MK \\ &= FK \\ MF + MF' &= 2a \end{aligned}$$

Figure

0.5 Hyperbole

0.5.1 Equation de l'yperbole

On pose comme pour l'ellipse $\overline{OF} = c$; on a : $e = \dfrac{c}{a}$ et, puisque $e > 1 : c > a$. On définit b par :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e^2 - 1 = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

L'équation de l'hyperbole est alors :

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \\ \text{Soit } \frac{y^2}{b^2} &- \frac{x^2}{a^2} = 1 \end{aligned}$$

Cette équation fait apparaitre la symétrie de l'hyperbole par rapport à l'axe $y'Oy'$, donc l'existence d'un second foyer F' et d'une seconde directrice $(\mathcal{D}')$.
Le point O, centre de symétrie, est le **centre** de l'hyperbole.

Définition 0.6. *(de l'hyperbole)*
Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle hyperbole, l'ensemble des points notés (H) définie par :

$$(H) = \left\{ M(x, y) \in \mathcal{P} / \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon \right\} \textit{avec} \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

Construction de l'hyperbole

1er cas $(a > b)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a = 2, b = 1)$$

Figure

Méthode de construction :

- On trace le rectangle fondamental ;
- les diagonales du rectangle fondamental sont les asymptotes de H ;
- Si $\varepsilon = 1$, les sommets de (H) se trouvent sur l'axe des abscisses ;
- **NB :** l'axe des abscisses est l'axe focal.
- Le cercle circonscrit au rectangle fondamental coupe l'axe focal en F et F'
- **NB :** F et F' sont les foyers de (H).