Projet PRENUM-AC
Année 2013

RESSOURCE TERMINALE "D"
Thème : DENOMBREMENT

Production :
[1] **Concepteur :**
• **Rhomys Arly MADZOU**, Etudiant à L'Ecole Normale Superieure de L'Université Marien Ngouabi du Congo Brazzaville ;

Encadreurs :
• **ELION FRANKLIN**, Enseignant au Lycée Tomas SANKARA du Congo Brazzaville ;

APERCU

Une ressource est un cours detaillé et approfondi. Elle est constituée des parties structurées en tenant compte du contenu notionnel et de sa place dans des programmes d'enseignenant au secondaire. A cela s'ajoute plusieurs exercices d'apprentisages, d'applications enfin deux devoirs à domicile et une feuille d'exercice dont certains ne sont pas corrigés.

1)- Objectifs général du chapitre
OG_2 : **Organisation des données**

2)- Objectif spécifique du chapitre :
Effectuer des dénobrements

3)- Objectifs opérationnels

00_1. A la fin de la leçon sur le dénombrement,l'élève doit être capable de calculer le cardinal d'un ensemble fini en se servant des nombres $n!$, A_n^p ou C_p^n.

1. cours de dénombrement arlyrhomys@yahoo.fr

00_2. A la fin de la leçon sur le dénombrement,l'élève doit être capable d'utiliser des diagrammes,des tableaux à double entrées ou arbres de choix pour résoudre des problèmes de dénombrement.

[2] 00_2. A la fin de la leçon sur le dénombrement,l'élève doit être capable d'appliquer des arrangements,permutations,combinaisons à des diverses situations de dénombrement.

4)- Place de ce chapitre dans le programme

Ce chapitre est abordé dans le programme de la terminale scientifique,plus particulièrement la terminale D en vue de :

$*$) mettre en place des outils nécessaires pour résoudre divers problèmes de dénombrement rencontrées en classe de première ;

$**$) d'approfondir le calcul des probabilités ;

$***$) d'appliquer les notions de dénombrement à des exemples variés tels que : jeux, modèles, urnes, situations concrètes $\cdots$

2. cours de dénombrement

Table des matières

Conclusion 23
[3]

3. cours de dénombrement

Introduction [5]

[4] Les premières traces qui illustrent l'acte de compter ou de dénombrer les objets par l'homme, remonte à plus de 30000 ans. Dénombrer c'est compter les éléments d'un ensemble fini. Ainsi l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels nous permettant de compter, est un ensemble dénombrable. Cependant, ce dernier à un nombre infini d'éléments.
En effet,il comporte des nombres très grands qui sont tels que si on lui ajoute un(1),on trouvera toujours un nombre plus grand. Il est le prototype des ensembles dénombrables.
Au IIIe siècle avant J.-C., en Mésopotamie, apparaît le premier système d'écriture des nombres : il s'agit d'inscrire des encoches dans de l'argile encore fraîche pour représenter les nombres. Avec seulement 6 signes différents, on peut écrire n'importe quel nombre.

Par la suite, de nombreux peuples inventent leur propre système d'écriture des nombres que l'on appelle numération. Les numérations romaine et égyptienne sont les plus connues. cette numération par l'intermédiaire des mathématiciens arabes est arrivée en Europe à partir du XIIIe siècle, et a remplacé la numération romaine environ deux siècles plus tard. C'est pourquoi les chiffres que nous utilisons (1, 2, 3,...) sont appelés les chiffres arabes ou indo-arabes. Notre numération est une numération de position : cela signifie que la place du chiffre dans le nombre indique sa valeur. Par exemple, dans le nombre 2132, le 2 du début et celui de la fin n'ont pas la même valeur. On dit que c'est un système décimal ou de base 10, car on utilise dix chiffres pour écrire tous les nombres. D'autres bases sont fréquemment utilisées de nos jours, comme la base 2 en informatique.

4. cours de dénombrement

Prérequis

[5] **Activité**

On considère les ensembles $A = \{b, a, d, o, f, g, e\}$; $E = \{o, l, e\}$; $C = \{a, d\}$

1) Déterminer le nombre d'éléments de chaque ensemble.

2) Citer tous les ensembles former uniquement d'éléments de B ayant au plus trois éléments.

3) Ecrire l'ensemble B formé de tous les éléments de A ou de E puis l'ensemble formé des élèments communs à A et E.

4) Existe t-il un ensemble formé des éléments de A qui ne sont pas les éléments de C ?

5) Former l'ensemble D de tous les couples possibles d'éléments de C et E de façon que le premier élément soit celui de C.

Solution

1) Nombre d'éléments

Soit n le nombre d'élément, on a respectivement pour chaque ensemble :

n(A)$=$ 7 on écrit aussi card(A)$=$ 7

n(E)$=$ 3 on écrit aussi card(E)$=$ 3

n(C)$=$ 2 on écrit aussi card(C)$=$ 2

2) les ensembles sont les suivants :

$\emptyset$, $\{0\}$, $\{l\}$, $\{e\}$, $\{0, l\}$, $\{o, e\}$, $\{l, e\}$, $\{o, l, e\}$, ce sont des parties de E.

on note $P(E)$ l'ensemble des parties de E.

3) $*)B = \{b, a, d, o, f, g, e, l\}$, on le note aussi $B = A \cup B$

$*)F = \{o, e\}$, on le note aussi $F = A \cap E$

4) Oui.

soit G cet ensemble on a :

$G = \{b, o, f, g, e\}$

5) L'ensemble est :

$D = \{(a, o), (a, l), (a, e), (d, o), (d, l), (d, e)\}$, on le note aussi $D = C \times E$.

5. cours de dénombrement

Rappels

[6]

0.1 Cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble est un groupement ou une collection de plusieurs objets ou pièces semblables.

0.1.1 Cardinal d'un ensemble

Etant donné un ensemble fini E. On appelle cardinal de E, le nombre d'élément de cet ensemble.
On le note : card(E).

Exemple 0.1.1

le cardinal des ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $F = \{2, 3, 4, 6\}$ sont respectivement : card(A)=9 et card(F)=4

Remarque 0.1.1

Le cardinal d'un ensemble vide(pas d'élements) est nul. c'est-à-dire $card(\varnothing) = 0$

0.1.2 Parties d'un ensemble [2]

Soient E et B deux ensembles.
On dit que B est une partie ou un sous- ensemble de E si tous les éléments de B sont les éléments de E.
On écrit $B \subset E$, $\ll se\, lit\, B\, inclu\, dans\, E \gg$.
On note $P(E)$, l'ensemble des parties de E, il est toujours non vide.

Propriétés 0.1.1

P_1) Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors $card(A) \leqslant card(E)$.
P_2) Si E un ensemble non vide de cardinal n alors $Card(P(E)) = 2^n$.

6. cours de dénombrement

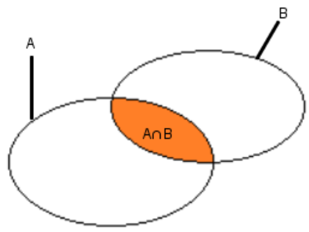
0.2 Intersection, reunion, differnce et produit cartesien d'ensembles

[7]

0.2.1 Intersection

Définition 0.2.1

Soient A et B deux ensembles finis. On appelle intersection de A et B l'ensemble formé par les éléments qui leur sont commun.On note $A \cap B$.
Ainsi $A \cap B = \{x\, tel\, que\, x \in A\, et\, x \in B\}$



5.PNG

Remarque 0.2.1

Si $A \subset B$ alors $A \cap B = B$.
En effet, tous les éléments de A sont les éléments de B. Donc ils ont de commun les éléments de A.

0.2.2 Réunion

Soient A et B deux ensembles finis.
On appelle réunion des ensembles A et B,l'ensemble formé par les éléments appartenant à l'un au moins de ces ensembles.On note $A \cup B$.
Ainsi $A \cup B = \{x\, telque\, x \in A\, ou\, x \in B\}$

Remarque 0.2.2

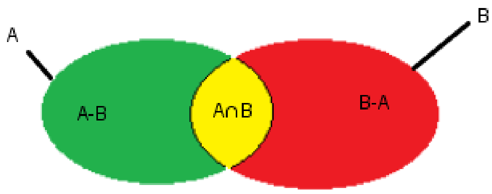
Si $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$

Proposition 0.2.1

Si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est un ensemble fini telque
$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

***Preuve* 0.2.1**

7. cours de dénombrement arlyrhomys@yahoo.fr



8.PNG

D'après la représentation

[8] $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

Or $A - B \subset A$ et $B - A \subset B$ donc A-B et B-A sont finis puisque A et B le sont.
De plus $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ et $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$ ils sont disjoints, donc
$card[(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)] = card(A-B) + card(A \cup B) + card(B-A)$ $(*)$

Or $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ et $(B - A) \cup (A \cap B) = B$ cela implique
$card[(A - B) \cup (A \cap B)] = card(A)$ et $card[(B - A) \cup (A \cap B)] = card(B)$
donc $card(A - B) + card(A \cap B) = card(A)$ et
$card(B - A) + card(A \cap B) = card(B)$
on obtient :
$card(A - B) = card(A) - card(A \cap B) \quad (**)$ et
$card(B - A) = card(B) - card(A \cap B) \quad (***)$
$(**)$ et $(***)$ dans $(*)$ donne
$card[(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)] = card(A) - card(A \cap B) + card(B) -$
$- card(A \cap B) + card(A \cap B)$

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

0.2.3 Généralisation

Si $A_1, \cdots A_n$ sont des ensembles finis et disjoints deux à deux

alors $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est un ensenmble fini.

0.2.4 Difference

Soient A et B deux ensembles finis.
On appelle differnce de A par B l'ensemble formé par les éléments de A qui ne sont pas les éléments de B.On note $A - B$
Ainsi $A - B = \{x \ telsque \ x \in A \ et \ x \ n'appartien \ pas \ \ B\}$

0.2.5 Complémentaire d'un sous-ensemble

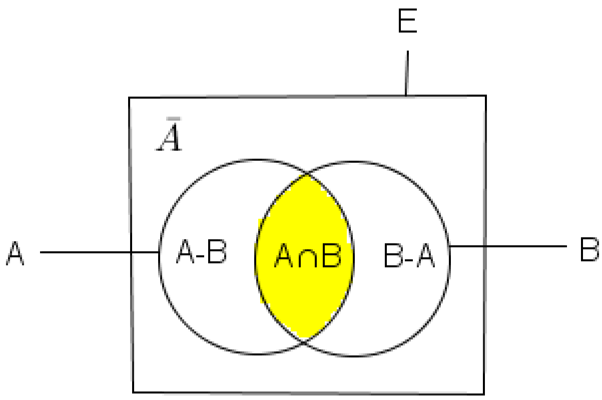
Définition 0.2.2

8. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

[9] Soit E un ensemble fini et A une partie de E. L'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A forme le complementaire de A dans E.
On note $\overline{A} = \{x \in E \; tel\, que \; x\, n'appartient\, pas \; A\} \subset E$

0.2.6 représentation



Ainsi $A - B = A - (A \cap B)$

Proposition 0.2.2

Soient A et B deux ensembles finis.
card(A-B)=card(A)-card(B)

0.2.7 Produit cartesien

Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartesien de A et B,l'ensemble de couple formé d'élément de et de B.
On note $A \times B = \{(x, y) \; telque \; x \in A \; et \; y \in B\}$

Proposition 0.2.3

Soit A un sous-ensemble de E et $\overline{A}$ son complementaire.
$card(A) + card(\overline{A}) = card(E)$

***Preuve* 0.2.2**

$\overline{A} = \{x \in E \; tel\, que \; x\, n'appartient\, pas \; A\} \subset E$ et $A \cup B = E$
On a : $card(A \cup B) = card(E)$ étant donné que A et $\overline{A}$ sont disjoints par définition, donc $card(A) + card(\overline{A}) = card(A) + card(\overline{A})$
Ainsi $card(A) + card(\overline{A}) = card(E)$

9. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

Définition et Propriétés des nombres $n!$, A_n^p et C_n^p

[10] Activité

Un livre de mathématiques est paginé de 1 à 20 suivant l'ordre croissant.
1) Combien de feuille contient ce livre ?
2) Quel nombre entier trouve t-on par multiplication de tous les nombres figurant sur chaque page du livre ?.

donner la valeur.
calculatrice?

solution
1) Possible de compter le nombre … donné que chaque vaut deux pages
On a : 10 feuilles
2) Soit N l'entier correspondant a… nombres on a
$N = 1 \times 2 \times \cdots \times 20$

0.3 Permutation [1]

pourquoi?

Définition 0.3.1

Soit n un entier naturel. On ap… e l'entier n , l'entier naturel égal au produit de tous les entiers n…
On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ e… *rielle de n* ≫
Par convention $0! = 1$

Exemple 0.3.1

$3! = 3 \times 2 \times 1$
$3! = 6$

0.3.1 Permutation Simple

Définition 0.3.2

10. cours de dénombrement

Tout classement ordonné de n éléments distincts est une permutation de ces éléments. Autrement dit une permutation de n éléments est un classement ordonné de ces éléments.

Exemple 0.3.2

$t\,x\,y\,z$ est une permutation des éléments de $A = \{x, t, y, z\}$

0.3.2 *Notation*

Le nombre de permutation simple de n éléments est noté p_n.
Lors d'une permutation de n éléments il ya :
$*$ n places possibles pour un premier élément ;
$*$ $(n-1)$ places pour le deuxième élément ;
$\vdots \quad \vdots$
$*$ $n-(p-1)$ pour le p^{iem} éléments
$*$ une place pour le dernier élément.
Le nombre de permutation possible est : $P_n = n(n-1)\cdots 2 \times 1 = n!$
Donc $P_n = n!$

Exemple 0.3.3

inapproprié

[11] Le nombre de permutation de 3 éléments distincts de l'ensem
est $P_3 = 6$ permutation à savoir
$\{xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx\}$

Exemple 0.3.4

Nombre de disposition de trois voitures dans un parking à quatre.

0.3.3 Permutation avec repetiton

confus

Le nombre de permutation que l'on peut constituer ... léments sont identique est plus petit que si tous les éléments so ... $\leq n$) et que chacun deux apparaissent $n_1, n_2, \cdots, n_k$ fois tel que ... $= n$ et $n_i \geq 1$ *pour tout* i
On a : $\overline{P_n}(n_1, n_2, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$
En effet, si chacune des n_i places occupée par des éléments identiques $i \in 1, \cdots, k$ était occupée par des éléments differents, le nombre de permutation serait alors à multiplier par $n_i!$
d'ou $\overline{P_n}(n_1, n_2, \cdots, n_k)n_1!n_2!\cdots n_k! = n!$

Exemple 0.3.5

11. cours de dénombrement

[12] Le nombre de permutation de 4 éléments de $A = \{a, b, c\}$ est
$\overline{P}(a, b, c) = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$
On a :

aabc ;	aacb ;	abac ;	abac
abca ;	acba ;	baac ;	bcaa
baca ;	caab ;	cbaa ;	caba

0.4 Arrangements [1]

Un arrangement est une collection de p objets pris successivement parmi n en tenant compte de l'ordre d'apparition.

0.4.1 Arrangement simple

Définition 0.4.1

Un arrangement simple est une collection de p objets pris parmi n en tenant compte de l'ordre d'apparition. Il est dit simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.
Notation Le nombre d'arrangement de p éléments pris parmi n est A_n^p.
On établit le choix des éléments de façon suivante :
1^{er} élément $\longrightarrow (n - 1 + 1) = n$ façon différentes ;
2^{ieme} élément $\longrightarrow (n - 2 + 1) = (n - 1)$ façon différentes ;
$\vdots \qquad \vdots$
p^{ieme} élément $\longrightarrow (n - p + 1)$ façon différentes ;
Ainsi par définition,le premier membre constitu un arrangement de p éléments parmi n.
D'où $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$
or $n! = n(n-1)! \Rightarrow n = \frac{n!}{(n-1)!}$
on obtient

$$\begin{aligned} n(n-1)\cdots(n-p+1) &= \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \times \cdots \times \frac{(n-p+2)!}{(n-p+1)!} \times \frac{(n-p+1)!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!} \end{aligned}$$

D'où $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Exemple 0.4.1

12. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

[13] L'arrangement de 2 éléments parmi les éléments de l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ est $A_2^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ arrangements.
On a : ab ; ac ; ba ; bc ; ca ;cb

0.4.2 Arrangement avec répétition

on dit n-uplet

C'est un arrangement de p parmi n où tous les éléments peuvent prendre n valeurs.
Notation Le nombre d'arrangement de p éléments choisis parmi n avec répétition possible est noté $\overline{A}_n^p$.
Si les répétitions sont permisent, alors toutes les valeurs peuvent prendre n valeurs.
Ainsi $\overline{A}_n^p = n \times n \times \cdots \times n = n^p$

Exemple 0.4.2

Le nombre d'arrangement avec répétition de deux éléments choisis dans
$A = \{a, b, c\}$ est $\overline{A}_3^2 = 3 \times 3 = 3^2$
$\overline{A}_3^2 = 9$ possibilités
On a :

aa ;	bb ;	cc
ab ;	ac ;	cb
ba ;	bc ;	ca

0.4.3 Proprietés des arrangements

Pour tout entier naturel n
On a : $A_n^n = n!$; $A_n^0 = 1$
En effet, $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$ et $A_n^0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

0.5 Combinaisons [1]

0.5.1 Combinaisons simples

Définition 0.5.1

Une combinaiso est une collection de p objets pris simultanement parmi n sans tenir compte de l'ordre d'apparition. Elle est dite simple si on ne peut prendre chaque objet qu'une seule fois au plus.
Le nombre de combinaison de p éléments choisis parmi n est C_p^n.

13. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

[14] Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il ya donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaison. On écrit $A_p^n = p!C_p^n \Rightarrow C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple 0.5.1

La combinaison de deux éléments parmi x, y, z est $C_2^3 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$
On écrit : $xy,\ xz,\ yz$

0.5.2 Combinaison avec répétition

Lorsque les répétitons sont permises,on parle d'une combinaison avec répétition que l'on note $\overline{C}_p^n$. On écrit :$\overline{C}_p^n = \dfrac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$

preuve ?

Exemple 0.5.2

La combinaison avec répétition de deux éléments choisis parmi x, y, z est
$\overline{C}_2^3 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$
On écrit :
$xx,\quad yy,\quad zz$
$xy,\quad xz,\quad yz$

0.5.3 Proprietés

P_1) **Relation de PASCAL**
Pour tout entier $n, p \in \mathbb{N}^*$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

***Preuve* 0.5.1**

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$
$*$) Supposons que $p > n$, alors $n - p < 0$
$(n-p)!$ n'existe pas car $n-p$ n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$ on ne peut donc pas combiner c'est-à-dire $C_n^p = 0 \Rightarrow C_{n-1}^p = 0$ *car* $n - 1 < n < p$
et $C_{n-1}^{p-1} = 0$ *car* $p - 1 < p$
D'où $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$*$) Supposons que $n = p$
On a : $C_n^p = 1$ et $C_{n-1}^p = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \dfrac{(n-1)n!}{n!(-1)!} = 0$
car -1 n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$
enfin $C_{n-1}^{p-1} = C_{n-1}^{n-1} = 1$

14. cours de dénombrement

[15] On a bien $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

$*$) pour $p < n$
On a $n - p > 0$, le choix à bien un sens
$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
De plus $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$ car $n-1 < n$ et $p-1 < n$
Or $(n-1)! = (n-p)(n-p-1)! \Rightarrow (n-p-1)! = \dfrac{(n-p)!}{n-p}$
et $p! = p(p-1)! \Rightarrow (p-1)! = \dfrac{p!}{p}$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi} \quad C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} &= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-p+p)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= C_n^p
\end{aligned}$$

interprétation en termes de combinaison ?

D'où $\quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

P_2) **Symetrie**
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$ $\; C_n^{n-p} = C_n^p$

***Preuve* 0.5.2**

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n - p \geq 0$ or $n - p \leq n$ pour tout

refait !

Par définition
$C_n^{n-p} = \dfrac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
D'où $C_n^{n-p} = C_n^p$

P_3) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

***Preuve* 0.5.3**

Soient $n, k \in \mathbb{N}$
$*$) Pour $n = p = 0$ on a : $C_0^0 + C_0^1 = C_1^1$ vraie

$*$) Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$
Supposons que $k > n$ alors $n - k$ n'appartient à $\mathbb{N}$

15. cours de dénombrement

[16] Donc $C_n^k = 0$, de plus $C_n^{k+1} = 0$ car $k+1 > n$ et $C_{n+1}^{k+1} = 0$ car $n-k < 0$
On a : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Supposons que $k \leq n$ alors $n-k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\text{On a } C_n^k - C_{n+1}^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} - \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} - \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n)k)!} \quad \text{car } k! = \frac{(k+1)!}{(k+1)} \\
&= \frac{-(n-k)n!}{(k+1)!}(n-k)! \\
&= \frac{-n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= -\frac{n}{k+1}
\end{aligned}$$

Donc $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

P_4) Pour tous entiers naturels n , p de $\mathbb{N}$

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \frac{n-p+1}{p} C_n^{p-1}$$

***Preuve* 0.5.4**

1er cas

$*$) pour p=0

$$\begin{aligned}
\text{On a } C_n^0 = 1 \text{ et } \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} &= \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Enfin } \frac{n-p+1}{p} &= \frac{(n-p+1)n!}{p(p-1)!(n-p+1)!} \\
&= \frac{(n-p+1)n!}{p!(n-p+1)(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{0!n!} = 1
\end{aligned}$$

D'où $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \dfrac{n-p+1}{p} C_n^{p-1}$

2ème Cas

$*$) Pour $p > n$ alors $n-p < 0$ n'est pas un entier naturel.

En particulier pour $p = n+1$

16. cours de dénombrement

[17] On a : $C_n^p = C_n^{n+1} = 0$ et $\frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n-p+1}{p}C_n^{p-1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = 0$

D'où $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n-p+1}{p}C_n^{p-1}$

Donner l'interprétation "triangle"

$*$) Pour $1 \leq p \leq n$

on a : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$= \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-(p-1))!}$$

$$C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} \qquad (*)$$

d'autre part :

$$\frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n!}{p(p-1)(n-p)!}$$

$$= \frac{(n-p+1)n!}{p(n-p+1)(p-1)!}(n-p)!$$

$$= \frac{n-p+1}{p} \times \frac{n!}{(p-1)(n-p+1)(n-p)!}$$

$$= \frac{n-p+1}{p} \times \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}$$

$$\frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n-p+1}{p}C_n^{p-1} \qquad (**)$$

$(*)$et $(**)$ prouvent bien que : $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1} = \frac{n-p+1}{p}C_n^{p-1}$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}$.

P_5) Pour tous entiers naturels n,p de $\mathbb{N}$ $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

En effet, $(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p} 1^p$

$$= \sum_{p=0}^{n} C_n^p \quad \text{pour tout entier naturel n.}$$

17. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

0.6 Application sur les ensembles [4]

0.6.1 Nombre d'injection de E vers F

On note $p = card(E)$ $n = card(F)$
Le nombre d'injection de E vers F est

$$A_n^p = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad p > n \\ \dfrac{n!}{(n-p)!} \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \end{cases}$$

[18] En effet,
$*$ Le cas où $p > n$ est évident par définition c'est-à-dire ***pas d'injection***.

$*$ Le cas $p \leq n$
Si $p = 0$ alors $A_n^0 = 1$ vraie on a une injection d'un ensemble à 0 éléments vers un autre ensemble à n éléments.
Si $1 \leq p \leq n$ notons $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ alors pour construire une injection de E vers F :
On choisit $f(a_1)$ *tel qu'on a* $(n - 1 + 1) = n$ possibilités
$f(a_2)$ *tel qu'on a* $(n - 2 + 1) = (n - 1)$ possibilités
$\vdots \qquad \vdots$
$f(a_p)$ *tel qu'on a* $(n - p + 1)$ possibilités
On a donc
$n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ possibilités
On remarque que A_n^p est aussi le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensembles à n éléments.(*confer page 11 et 12*)

0.6.2 Nombre de Pernutation d'un ensemble fini

Définition 0.6.1

Une permutation sur un ensemble fini E est bijection de E dans E.

Proposition 0.6.1 *Soit E un ensemble de cardinal n. Le nombre de permutation sur E est $n!$.*

En effet, comme E est fini, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective.
Donc le nombre de permutation est : $A_n^n = n!$

18. cours de dénombrement arlyrhomys@yahoo.fr

0.6.3 Nombre de Parties à p éléments d'un ensemble à n élément

[19] Soit E unensemble de cardinal n, soit $p \in \mathbb{N}$
Le nombre de parties de cardinal p de l'ensemble E est :

$$C_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > n \\ \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si} \quad 0 \leq p \leq n \end{cases}$$

En effet,
$*$ Le cas où $p > n$ et $p = 0$ (c'est-à-dire E est l'unique partie de lui meme) sont évidents par définition .

$*$ Cas où $1 \leq p \leq n$.
Comptons de deux manière différentes le p-listes d'éléments distincts de E
1) Ce nombre est A_n^p
2) Pour construire une telle p-liste $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ on choisit d'abord l'ensemble des p termes de la liste : A_n^p possibilités.
On doit ensuite les rangés : $p!$ possibilités. Ainsi le nombre cherché est $C_n^p \times p! = A_n^p$
Donc $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$. (*confer page 10*)

0.7 Triangle de Pascal [6]

Le triangle de pascal se construit ligne par ligne. Chaque terme est l'addition des deux nombres supérieurs qui lui sont adjacents.
Il permet de determiner les coefficients binoniaux sans usage de la formule de la combinaison.
Cela peut s'illustrer sous forme d'un tableau.

19. cours de dénombrement arlyrhomys@yahoo.fr

$n\backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$p-1$	p	$\cdots$	$n-1$	n
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6														
7														
8														
9														
$\vdots$														
$n-1$										C_{n-1}^{p-1}	C_{n-}^{p}			
n											C_{n}^{p}			

faire le lien avec la formule plus-haut

[20] C_{n-1}^{p-1} est vu comme intersection de la $(n-1)^{-i}$ ... me colonne.
Ainsi pour obtenir $C_n^P = C_{n-1}^{p-1} + C_{p-1}^{p}$
Donc le coefficient binomial C_n^p est égal au résultat obtenu dans le tableau au croisement de la n^{-ieme} ligne et la p^{-ieme} colonne.
Ces coefficients s'itulise dans la formule du binome de Newton.

0.8 Binome de Newton [6]

Les formules ci-dessous sont les identités remarquables.
$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

On remarque que dans chaque identité, les coefficients dans cet ordre correspond respectivement aux valeurs des lignes du tableau pour chaque valeur de n respective.
De plus la puissance totale de chaque produit est égale à la valeur prise par n (ligne correspondante) de façon que quand l'une dimunie , l'autre augmente de la même façon.

20. cours de dénombrement

Ainsi on écrit :

[21] $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ correspond à la quatrième ligne c'est-à-dire

pour $n=4$; $(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$

$$= C_4^0a^4b^0 + C_4^1a^3b^1 + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4a^0b^4$$

La généralisation de cette formule est connue sous le nom du **Binome de Newton** pour un entier naturel assez-grand.

démonstration ?

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = C_n^0a^nb^0 + C_n^1a^{n-1}b^1 + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + C_n^n$$
$$= C_n^0a^n + C_n^1a^{a-1}b^1 + \cdots + C_n^ka^{n-k}b^k + \cdots + C_n^nb^n$$

Piusque $0 \leq k \leq n$

On écrit :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k$$

Devoir à domicile

Exercice 1

On considère une classe de 18 élèves dont 16 sont de l'option mathématiques et 9 ceux de physique.

1) Combien d'élèves de la classe sont généralistes (tronc commun)

2) On désire prendre au moins un représentant de la classe pour un test de mathématiques puis de physique,on a :

$*$ Soit un élève généraliste ;

$**$ Soient deux élèves l'un en mathématiques et l'autre en physique.

De combien de manière peut-on faire ce choix ?

Exercice 2

On lance deux dés numeroté de 1 à 6 puis on considère le chriffre sur la face supérieure de chaque dé.

Soit x la somme de ses chriffres.

1)Déterminer l'ensemble A des valeurs prisent par x.

2) Détermier les sous-ensembles de A tels que

$A_1 = \{x\, tel\, que\, x \in A\ et\ x\, un\ multiple\ de\ 2\}$

$A_2 = \{x\, tel\, que\, x \in A\ et\ x\ est\ un\ nombre\ premier\}$

solution 1

1) Nombre d'élèves généralistes

Soit A l'ensemble formé par des élèves spécialisés en mathématques et B celui des élèves spécialisés en physique.

21. cours de dénombrement

[22] Le nombre d'élèves généralistes est le cardinal de $A \cap B$
On sait que $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

$$card(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B)$$
$$card(A \cap B) = 16 + 9 - 18$$
$$card(A \cap B) = 7 \text{ élèves}$$

2) Nombre de choix

- Pour un élève généraliste

Il doit etre choisi dans $A \cap B$. Donc il ya 7 choix possibles.

- Pour un élève de mathématique et un élève de physique.

Soit A_1 l'ensemble formé uniquement d'élèves d'option mathématiques
$A = A_1 \cup (A \cap B)$
$card(A_1) = card(A) - card(A \cap B)$
$= 16\text{-}7$
$card(A_1) = 9$

Soit B_1 l'ensemble formé uniquement d'élèves d'option physique
$B = B_1 \cup (A \cap B)$
$card(B_1) = card(B) - card(A \cap B)$
$= 9 - 7$
$card(A_1) = 2$
Le nombre de choix est donné par $card(A_1 \times B_1)$ car chaaue choix est un couple
On a : $card(A_1 \times B_1) = card(A_1) \times card(B_1)$
$= 9 \times 2$
$card(A_1 \times B_1) = 18$
Il ya donc 18 choix possibles.

solution 2

1) Ensenble A des valeurs prisent par x
Soit D_1 l'ensemble des chriffres que porte le premier dé et D_2 celui du deuxième
$D_1 = \{1, 2, 3, 45, 6\}$; $D_2 = \{1, 2, 3, 45, 6\}$
Nombre de couple possible.

- Echiquier de croisement

22. cours de dénombrement

arlyrhomys@yahoo.fr

$D_1 \setminus D_2$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

[23] $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2) Déterminons les sous-ensembles de A tels que
$A_1 = \{x\, tel\, que\, x \in A\ et\ x\, un\ multiple\ de\ 2\}$
$A_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ et
$A_2 = \{x\, tel\, que\, x \in A\ et\ x\ est\ un\ nombre\ premier\}$
$A_2 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

0.9 Page d'exercices [3]

exercice 1

Cinq femmes ont disposées pêle-mêle leurs fiches de suivi médical sur le bireau de la sage femme médicale. De combien de façon peut-on les classées en vue de faire l'appel ?

solution 1

Lorsqu'on fait l'appel, il ya un premier,un deuxième,un troisième, $\cdots$,un n^{eme}. On tient compte de l'ordre de dépôt.
La sage femme à donc :
cinq façons pour le premier choix ;
quatres façon pour le deuxième choix ;
trois façon pour le troisieme choix ;
deux façon pour le quatrième choix ;
une façon pour le quatrième choix ;
Soit un total de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités de choix

résultat ?

exercice 2 (Utilisation des tableaux à doubles entrés et arbres de choix)
Soit deux groupes d'élèves A et B tels que $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{x, y, z\}$
1) Former tous les couples possibles de façon que le premier élément soit celui de A.
2) Combien sont-il ?

23. cours de dénombrement

solution 2

[24] **Variante 1**

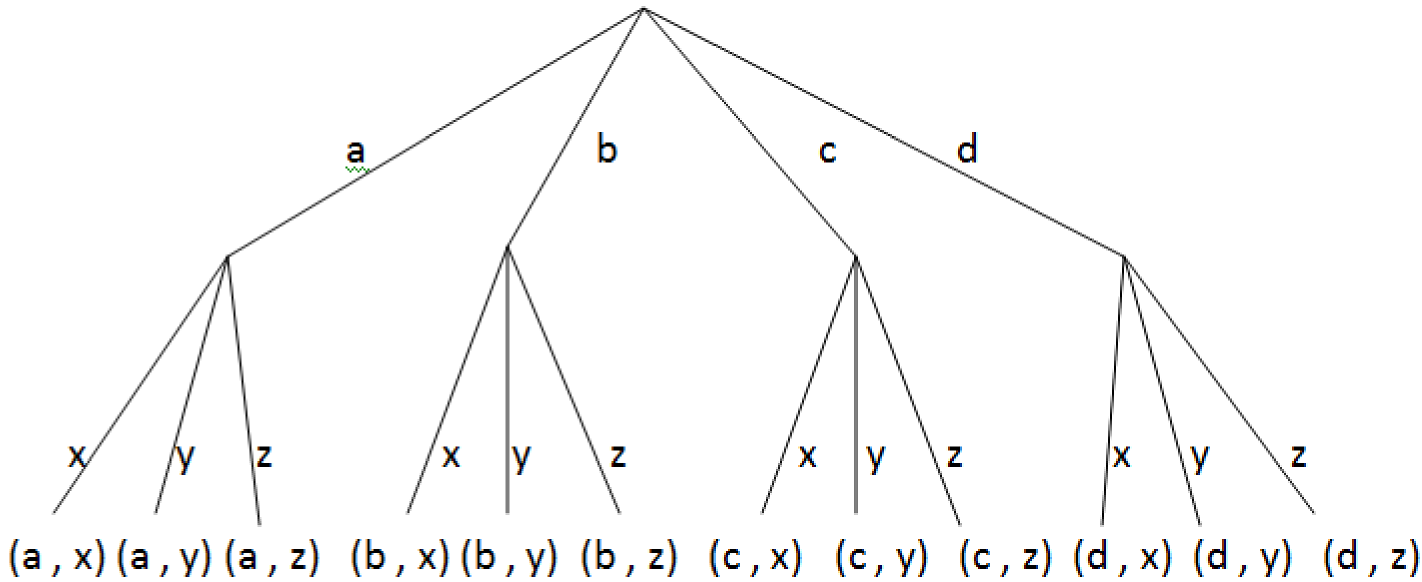
quelle est l'utilité?

▶ Echiquier de croisement

$B \setminus A$	a	b	c	d
x	(a, x)	(b, x)	(c, x)	(d, x)
y	(a, y)	(b, y)	(c, y)	(d, y)
z	(a, z)	(b, z)	(d, z)	(d, z)

Varianre 2

▶ Arbre de choix



2)Nombre de couple

Soit n le nombre de couple

$n = card(A) \times card(B)$

$\quad = 4 \times 3$

$n = 12$ couples

exercice 3 (Applications de $n!$, A_n^p et C_n^p)

L'éclairage d'une grande salle est assurée par cinq ampoules commandées chacune par un interrupteur. De conbien de manières peut-on éclairer cette salle en allumant exactement trois lampes ?

solution 3

On désigne par $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ l'ensemble de ses cinq ampoules.

Un résultat est une manière d'éclairer la salle par exemple,les trois ampoules allumées sont : a_1, a_2, a_3.

Donc, il y a trois combinaisons dans cinq éléments de E.

24. cours de dénombrement

[25] $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ ou bien $C_5^3 = \dfrac{A_5^3}{3!}$
il y a 10 manières d'éclairer la salle par trois ampoules.

25. cours de dénombrement

Conclusion

[26] Le dénombrement occupe une place majeur en sciences de mathématiques puisqu'il est fondé sur les nombres autrement dit, le cardinal des ensembles finis. L'acte de compter est donc de très grande portée en mathématiques.

26. cours de dénombrement

Bibliographie

[1] Didier Muller, *Dénombrement*, LCP-2012, sur Google(Cours de Dénombrement)

[2] IUT Charlemagne-cours III, Dénombrement et Combinatoire, sur Google(Cours de Dénombrement

[3] *Collection Inter Africaine de Mathématiques*,Classe 1^{ere}

[4] Chapitre 6 : Dénombrement, sur Google(Cours de Dénombrement)

[5] Microsoft Encarta junior, Science(Mathématiques sur les Nombres)

[6] G.KOSTANTINI http :// bacamaths.net/