Projet PRENUM-AC

Année 2014

Probabilité

Production : Ressource

Concepteur :
Bakyesse MBOU NGOULOU NGOMA Étudiant à l'école Normale Supérieure de l'Université Marien NGOUABI, Congo-Brazzaville.

Sous la direction de :
Fernand MALONGA Enseignant à l'Ecole Normale Supérieure de Brazzaville.
Et de :
MABIALA BAKALA, Enseignant au Lycée Emery Patrice LUMUMBA de Brazzaville

Table des matières

INTRODUCTION **1**
0.1 Historique 2
0.2 Public ciblé 2
0.3 Objectifs pédagogiques 2
0.4 Place dans le programme 3
0.4.1 Prés-requis 3

1 Calculs de probabilités **4**
1.1 Vocabulaire de probabilités 4
1.1.1 Définition 4
1.2 Algèbre des événements 5
1.3 Probabilité d'un événement 6
1.3.1 Définition 6

Introduction

0.1 Historique

Historiquement, la notion de probabilité s'est dégagée à partir d'exemples simples empruntés généralement aux jeux de hasard. C'est en se posant des questions sur les jeux de hasard que les calculs des probabilités sont apparues. En 1645, un chevalier de Méré pose la question à ***Pascal*** et ***Fermat***, de savoir comment partager une somme mise en jeu lorsque la partie est intérompue avant son terme. C'est en ce moment que ***Pascal*** et ***Fermat*** se sont mis à résoudre ce problème en cherchant à réduire le hasard.

0.2 Public ciblé

Cette ressource est destinée aux enseignants de Lycée et aux apprenants en classe de terminale scientifique.

0.3 Objectifs pédagogiques

L'ambition du présent document est de donner aux apprenants, sous une forme pratique, un exposé intégré des moyens, des méthodes et techniques de calculs de probabilités.
De nos jours, le calcul des probabilités est exposé à partir d'une théorie axiomatique faisant largement appel au langage des ensembles.
Etant donné la conception de cette ressource, nous avons préféré rester plus proche du concret et introduire la notion de probabilité à partir d'exemples simples empruntés aux jeux de hasard.(jet d'un dé, tirage des boules dans une urne, tirage d'une loterie)
A la fin de ce cours, l'apprenant (l'élève) devra être capable de :

- Définir l'expérience aléatoire dont il est question
- Savoir traduire les événements relatifs à cette expérience et calculer leur probabilité

0.4 Place dans le programme

0.4.1 Prés-requis

Pour mieux aborder ce cours, l'apprenant devra avoir des connaissances sur Les notions d'analyse combinatoire, à savoir :

- cardinal d'un ensemble
- arrangements avec répétitions et sans répétitions, permutations et combinaisons ;

Chapitre 1

Calculs de probabilités

1.1 Vocabulaire de probabilités

Activité péparatoire

On Lance un dé non pipé dont les faces sont numérotées 1, 2, 3 , 4 , 5, 6.

1. quelles sont les différents résultats possibles après le lancer du dé ?

Réponse

Il y a 6 possibilités de parution des nombres, ce sont : 1, 2 , 3, 4, 5, 6.

1.1.1 Définition

Chaque résultat possible d'une expérience probabiliste est appelé éventualité.
Toute les éventualités d'une expérience probabiliste rassemblées, constituent un ensemble appelé Univers ou ensemble fondamental. On écrit :
$\mathcal{E}$: lancer d'un dé non pipé

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$cad\Omega = 6$

Activité 2

Trouver l'ensemble des éventualités à l'issu d'un concours présenté par deux élèves.

Réponse :

$\Omega = \{(A, A), (A, E), (E, E), (E, A)\}$, $Cad\Omega = 4$

Activité 3 :

Trouver l'ensemble des éventualités à l'issu d'un jet d'une pièce de monnaie.

Réponse :

$\Omega = \{pile, face\}$, $Card\Omega = 2$

Activité 4 :

Supposons qu'après le lancer du dé, il apparait un nombre pair : quels sont les résultats possibles.

Réponse :

2, 4 ou 6, notons $A = \{2, 4, 6\}$ l'ensemble des ces éventualités.
$A \subset \Omega$, on dit que A est un événement, et $CadA = 3$.

1.2 Algèbre des événements

- Considérons l'événement B : $\ll$ obtenir 6$\gg$, $B = \{6\}$
  6 : est une éventualité.
  $\{6\}$: est un événement élémentaire.
- On note $\bar{A} = C_\Omega A$: l'événement contraire de A.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{2, 4, 6\} \\ \bar{A} &= \{1, 3, 5\} \end{aligned}$$

  Remarque :

  $A \cup \bar{A} = \Omega$.
- Notons, C : $\ll$ obtenir 8 $\gg$, l'événement obtenir 8 : est un événement impossible, on note, $C = \varnothing$
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: événement certain.
- $A \cap \bar{A} = \varnothing$, on dit que les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

- $A \cap B$ est l'événement qui se réalise lorsque les événements A et B se réalisent simultanément.
- $A \cup B$ est l'événement qui se réalise lorsque l'un au moins des événements A ou B se réalise.

1.3 Probabilité d'un événement

Activité 5

Considérons l'expérience : jet d'un dé non pipé,
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. E : ≪obtenir un nombre strictement supérieur à 4 ≫, $E = \{5, 6\}$. Quelles sont les chances de E ?
2. A : ≪ obtenir un nombre pair≫, $A = \{2, 4, 6\}$. Quelles sont les chances de A ?
3. F : ≪ obtenir 3 ≫, $F = \{3\}$. Quelles sont les chances de F.

Réponse :

1. La chance pour que E se réalise est : $\frac{2}{6}$
2. La chance pour que A se réalise est : $\frac{3}{6}$
3. La chance pour que F se réalise est : $\frac{1}{6}$

1.3.1 Définition

La probabilité d'un événement est sensée mesurer les chances de réussite de cet événement.
Mathématiquement la probabilité s'interprète comme une application p : $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$, $A \longmapsto p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega}$.

Cette probabilité s'interprète aussi sous la forme :

$$p(A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}.$$

Propriétés

p_1) $p(\varnothing) = 0$

p_2) $p(\bar{A}) = 1 - P(A)$

p_3) Si A et B sont deux événements tels que $A \cap B \neq \varnothing$, alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Démonstration

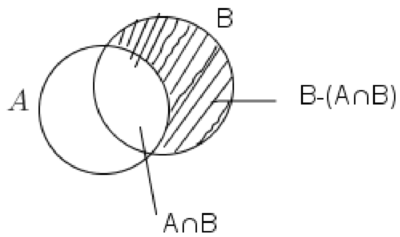
p_1) $\begin{cases} A \cup B = \varnothing \cup A = A \\ A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing \end{cases}$

$$\begin{aligned} p(A \cup \varnothing) &= p(A) + p(\varnothing) = P(A) \\ p(\varnothing) &= p(A) - p(A) \\ p(\varnothing) &= 0 \end{aligned}$$

p_2) $\begin{cases} A \cup \bar{A} = \bar{A} \cup A = \Omega \\ A \cap \bar{A} = \varnothing \end{cases}$

$$\begin{aligned} p(A \cup \bar{A}) &= p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega) \\ p(A) + p(\bar{A}) &= 1 \\ p(\bar{A}) &= 1 - p(A) \end{aligned}$$

p_3) Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$



1.PNG

On a : $A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$.
D'où par application de la formule des probabilités totales à des ensembles disjoints :

$$p(A \cup B) = p(A) + p\,[B - (A \cap B)] \quad (*)$$

Les événements $(B - A \cap B)$ et $A \cap B$ sont incompatibles :

$$B = [B - (A \cap B] \cup (A \cap B)$$

$$p(B) = p\left[B - (A \cap B)\right] + p(A \cap B) \Rightarrow p\left[B - (A \cap B)\right] = p(B) - p(A \cap B). \quad (**)$$

(*) et (* *) donnent :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$