Continuité des fonctions numériques.

TAGNE TAKAM Griaul Bruno

le 17 septembre 2012

Table des matières

0.1 Objectifs pédagogiques :

A l'issue de ce cours, le lecteur doit etre capable de :

Le lecteur dans son étude doit être capable de :

1. Étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle,
2. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue,
3. Étudier la continuité de la somme, du produit et du rapport de fonctions,
4. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue et monotone,
5. Étudier la continuité de fonctions composées,
6. Lire graphiquement la continuité d'une fonction,
7. Utiliser la recollement par continuité,
8. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

0.2 Pré-requis :

Pour le faire, il doit être capable avant d'aborder ce cours , de pouvoir :

1. Calculer l'image d'un réel par une fonction,
2. Déterminer le domaine de définition d'une fonction,
3. Calculer les limites d'une fonction en un point,
4. Déterminer graphiquement d'un intervalle par une fonction,
5. Étudier la continuité d'une fonction à droite et à gauche en un point,
6. Étudier la continuité d'une fonction en un point,
7. Étudier la monotonie d'une fonction,
8. Encadrer une fonction,
9. Connaître les fonction de référence continues.

0.3 Place dans le programme :

la notion de continuité d'une fonction est une notion très importante en mathématiques, dans la mesure où elle intervient dans presque toutes les autres notions du programme : les suites, les intégrales, les équations différentielles, la probabilité... Donc, il est nécessaire de l'introduire avant tous ces chapitres et après la notion de limite dont elle dépend.

0.4 Introduction

La notion de continuité en mathématique garde le même sens qu'en français. "continuité" qui signifie " sans interruption". elle intervient dans plusieurs domaines tels que : l'imagerie, le cinéma, la physique, la vie courante et bien d'autres. Mais ici, nous parlerons de continuité des fonctions numériques à variables réelles. Sachant que les fonctions en mathématiques, sont des représentations des phénomènes réels, elles représentent l'étude d'une grandeur dépendant d'une autre ou de plusieurs autres. Par conséquent, la continuité permet de décrire les phénomènes qui ne sautent pas brutalement, mais évoluent progressivement. Par exemple, on dit souvent : " exprimer la distance en fonction du temps, exprimer l'aire d'un disque en fonction de son rayon..."

Pour bien assimiler et comprendre les notions abordées ici, il serait intéressant pour le lecteur de maîtriser le calcul des limites.

les fonctions utilisées dans ce cours, sont des fonctions numériques à variables réelles.

Chapitre I

Rappels

1.1 Activités

1.1.1 Activités 1 :

Une voiture roule sur une route plate et rectiligne. A 15 mètres de son point de départ, le chauffeur se rend compte d'un fossé de 3 mètres de long, qui coupe cette route en deux. Ce qui l'oblige à rebrousser chemin.

– Que peut-on dire de cette route au point où se trouve le fossé ?

– La route est contenue dans un plan (et représentée par une ligne), et on le muni d'un repère R =(O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Cette route étant contenue dans ce plan, peut-être représentée dans le repère R par une fonction f.

(a)- Représenter f dans le repère R si on suppose que le trottoir a une largeur de 4 mètres et l'axe des abscisses est confondu à la bordure (extérieure à la route) du trottoir.

(b)- Que pouvons-nous dire de la fonction f au point d'abscisse 15 ?

– Maintenant, considérons que sur la route il n'y ait pas de fossé. Alors la voiture continuerait son chemin sans problème.

- Représenter la courbe g représentant la route pour ce cas. Que pouvons-nous dire de g au point d'abscisse 15.

Après avoir répondu à toutes ces questions, nous pouvons ainsi définir ce qu'on entend par fonction continue en un point.

1.2 Définitions.

1.2.1 Fonctions continues en un point.

Débutons par énoncer une remarque faite sur le calcul des limites. Elle est donnée comme suit :

Remarque 1.1 : Si f est définie en x_0, la valeur de la limite de f en x_0 ne dépend pas de la valeur de f(x_0).

Exemples :

– f(x)= $\begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|} & \forall \;\; x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

Montrons que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Pour cela nous allons calculer la limite de f à droite puis à gauche en 0.

l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.

Par ailleurs f coïncide sur $]\,0\,;\,+\infty[$ avec la fonction l : x $\longmapsto \frac{x^2}{x}$ = x, définie de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = l(0) = 0. \tag{1.2}$$

De même f coïncide sur $]-\infty\,;\,0[$ avec j : x $\mapsto \frac{x^2}{-x}$ = -x, définie aussi de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = j(0) = 0. \tag{1.3}$$

On obtient alors que la limite de f en 0 à droite et à gauche est la même. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0. \tag{1.4}$$

Par ailleurs f(0) = 1. Donc la limite de f en 0 ne dépend pas de f(0).

- h(x) $= \dfrac{(2x+1)(x+3)}{x+3}$.

  $D_h = \mathbb{R} - \{-3\}$.

  h coïncide pour x $\neq$ -3 avec u : x $\mapsto \dfrac{(2x+1)(x+3)}{x+3}$ = 2x+1 (par simplification).

  Ainsi

  $$\lim_{x\to -3} h(x) = u(-3) = -5. \tag{1.5}$$

  Mais h n'existe pas en -3. D'où cette limite ne dépend pas de l'image de -3 par h.
- g(x) = $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

  $D_g = \mathbb{R}^*$

  En utilisant le calcul de limite des fonctions composées et le fait que la fonction sinus n'admet pas de limite en l'infini, on constatera que g n'admet pas de limite en 0. Et de plus g(0) n'existe pas. D'où également, la limite de g ne dépend pas de l'image de g en 0.

Ainsi, on note la définition d'une fonction continue de la façon suivante :

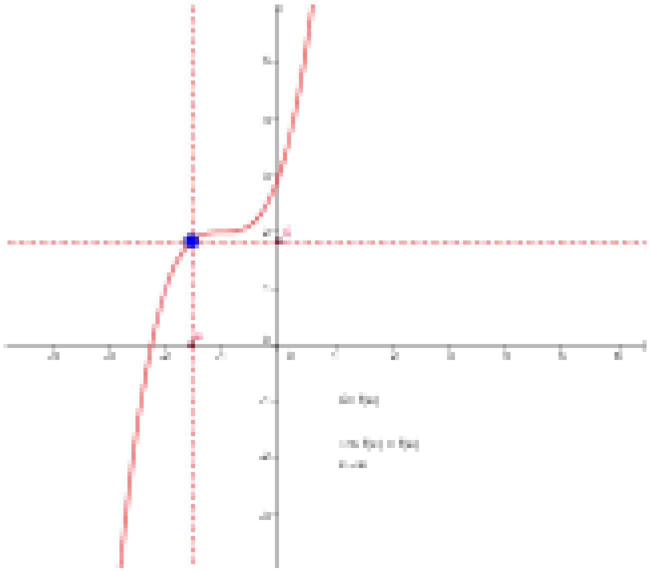
Definition 1.1 :

Soit f une fonction et x_0 un réel.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Attention

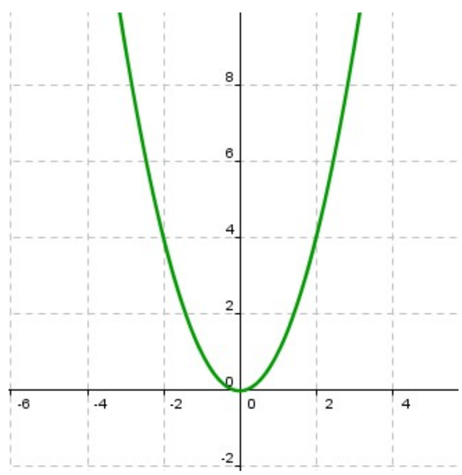
Cette définition montre que :pour dire que f est continue en x_0, il faut d'abord vérifier que f est définie en x_0 ensuite, que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.



brutus package/fig22.png

Exemples 1.1 :

1. La trajectoire d'un mobile en déplacement est générée par une fonction continue (de la forme $\frac{1}{2}$ax^2 + vx + v_0).
2. f(x)=x^2.



brutus package/fig1.jpg

Pour tout nombre réel x_0, on a : f est définie en x_0. De plus,

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = x_o^2 = f(x_o) \qquad (1.6)$$

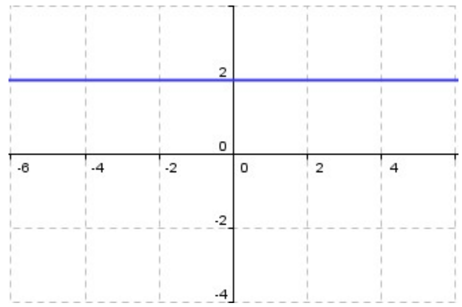
On en déduit alors que la fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction continue en tout élément de $\mathbb{R}$

3. g(x)= k.

pour tout élément x_0 de $\mathbb{R}$, g est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = k = g(x_o). \qquad (1.7)$$

Donc la fonction $x \mapsto k$ (fonction constante) est continue en tout élément de $\mathbb{R}$



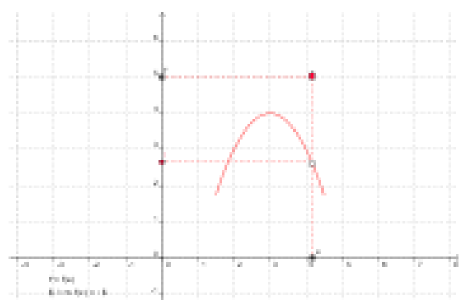
brutus package/fig2.jpg

Remarques 1.1 :

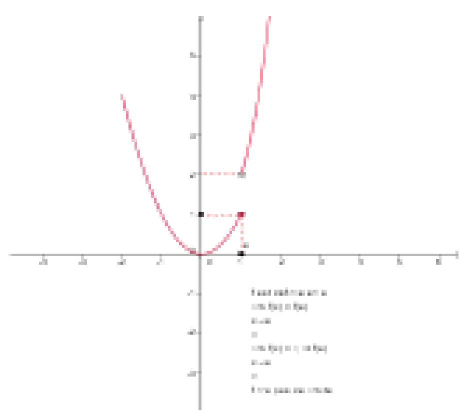
- Si la fonction f n'est pas continue en x_o, alors soit f n'est pas définie en x_o, soit

$$\lim_{x \to x_o} f(x) \neq f(x_o), \quad soit \quad f \quad n'admet \quad pas \quad de \quad limite \quad en \quad x_o. \tag{1.8}$$

- Si f n'est pas définie en x_o, alors la question de sa continuité ne se pose pas.
- Si f est définie en x_o, et limite de f(x) quand x tend vers x_o existe et est différente de f(x_o), alors f n'est pas continue en x_o.



brutus package/fig24.png

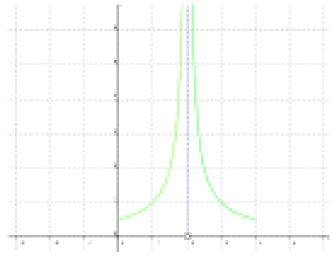


brutus package/fig23.png

- Si f n'admet pas de limite en x_o, alors f n'est pas continue en x_o.
- On ne peut pas étudier la continuité d'une fonction f en -∞ ou en $+\infty$ car ceux-ci ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

L'idée générale

La continuité d'une fonction numérique à variable réelle peut se traduire par le fait que sa courbe représentative peut être tracée d'un seul tenant, sans lever le crayon.

brutus package/fig25.png 

Propriété 1.1.1 : Si f est une fonction continue en x_o, alors on a $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Cette propriété permet de calculer les limites en un point de toutes les fonctions continues en ce point. par exemple $\lim_{x \to 3}(x^4 - x + 3) = 3^4 - 3 + 3 = 81$.

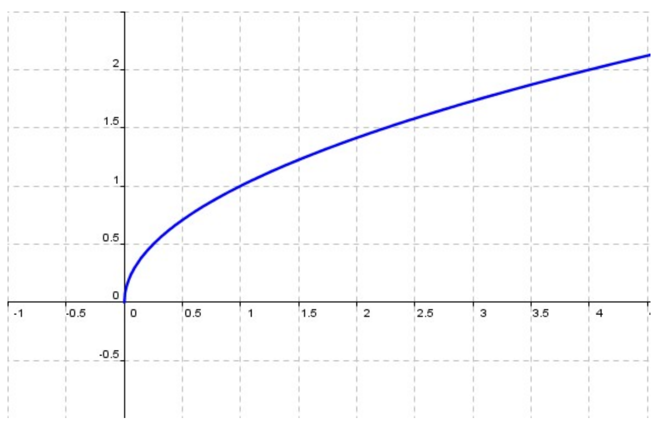
1.2.2 Fonction continue à droite en un point

Définition 1.2 : soient f une fonction et $\mathbf{x_o}$ un réel.

f est continue à droite en x_o si f est définie en x_o et $\lim_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o)$.

Exemples 1.2 :

1. f(x)=$\sqrt{x}$.

brutus package/fig0.jpg 

   f est définie sur $[0\,;+\infty[$ et,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \tag{1.9}$$

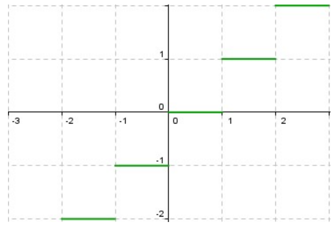
   et f(0)=0.

   Ce qui permet de dire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue à droite en 0.

2. $f(x) = E(x)$. f est la fonction partie entière définie par : f(x) = $\begin{cases} 0 & si \;\; x \in [0;1[\\ 1 & si \;\; x \in [1;2[\end{cases}$

   f est définie sur $[1;2[$.

   En calculant la limite à droite en 1, on obtient :

brutus package/fig3.jpg 

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \quad Deplus \quad f(1) = 1 \tag{1.10}$$

On conclut que la fonction partie entière est continue à droite en 1.

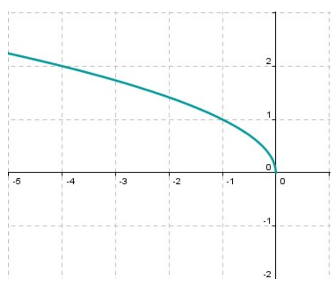
1.2.3 Fonction continue à gauche en un point

Définition 1.3 : Soient f une fonction et x_0 un réel.

f est continue à gauche en x_0 si f est définie en x_0 et $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemples 1.3 :

$f(x) = \sqrt{-x}$.

brutus package/fig4.jpg 

Elle est définie sur $]-\infty; 0]$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad et \quad f(0) = 0. \tag{1.11}$$

On en déduit alors que f est continue à gauche en 0.

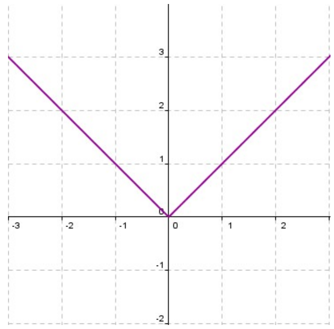
Propriété 1.3 : Soient f une fonction et $\mathbf{x_o}$ un réel.f est continue en $\mathbf{x_o}$ si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_o

i.e $\quad \lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) =$ f(x_o).

Exemples 1.4 :

$f(x) = |x|$ peut-être encore écrit : f(x) $= \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

f coïncide sur $[0\,;+\infty[$ avec la fonction t : x $\mapsto$ x et sur $]-\infty\,;0]$ avec la fonction k : x $\mapsto$ -x. Donc brutus package/fig5.jpg 

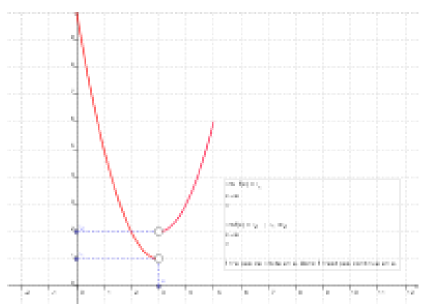
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = t(0) = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = k(0) = 0. \;\; Et \;\; de \;\; plus \;\; f(0) = 0. \tag{1.12}$$

Ainsi donc, la fonction valeur absolue est continue à gauche et à droite en 0. Elle est continue en 0.

Remarques 1.2 :

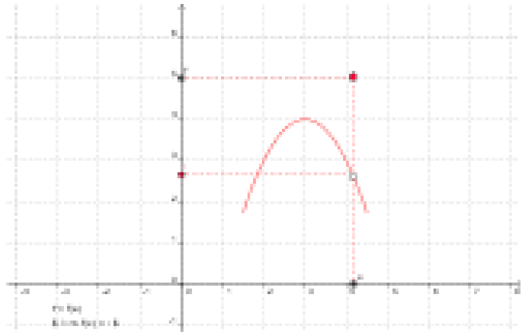
1. Il est des fonctions dont pour étudier la continuité, on n'a pas besoin d'étudier la continuité à droite et la continuité à gauche (car ce type de fonction n'est pas définie soit à droite, soit à gauche en cet élément) . On a par exemple la fonction racine carrée, qui est continue en 0 sans l'être à gauche de 0.

2. Si les limites à droite et à gauche en x_o existent et sont différentes, alors f n'est pas continue en x_o.

package/fig26.png 

3. Si f n'est pas continue en x_o, alors elle est dite discontinue en x_o. graphiquement, elle se remarque par un saut en x_o. Par exemple une route coupée par un fossé est une route discontinue.

4. si la limite à droite est égale à la limite à gauche en x_o et est différente de f(x_o), alors la fonction n'est pas continue en x_o.

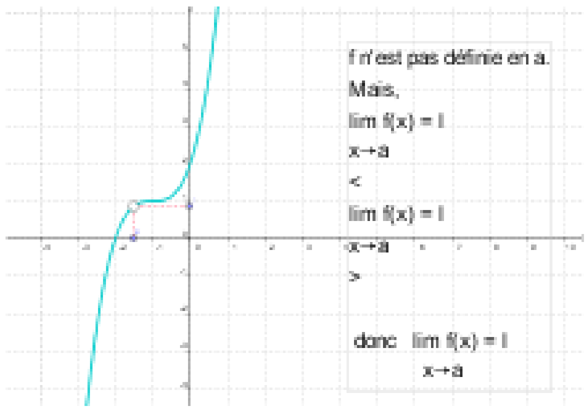
package/fig24.png 

$\lim_{x\to a^<} f(x) = 1$

$\lim_{x\to a^>} f(x) = l$

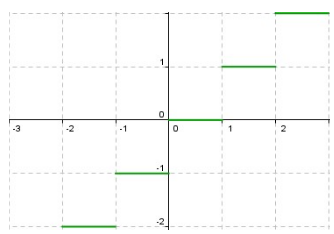
l $\neq$ f(a)

f n'est pas continue en a.

package/fig27.png 

Exemples 1.5 :

$f(x) = E(x)$.

package/fig3.jpg 

f est définie sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \quad et \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \tag{1.13}$$

On obtient ainsi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x). \tag{1.14}$$

Il en résulte que f n'est pas continue en 1.

De même f n'est continue en aucun nombre entier. On dit alors que la fonction partie entière n'est continue en aucun nombre entier relatif. Cependant, elle est continue en tout nombre non entier. (la démonstration est laissée au soin du lecteur)

1.3 Comment reconnaître une fonction continue en un point ?

Propriétés 1.4(fonction élémentaires) : On admet que les fonctions suivantes sont continues en tout élément x_o de leur ensemble de définition.

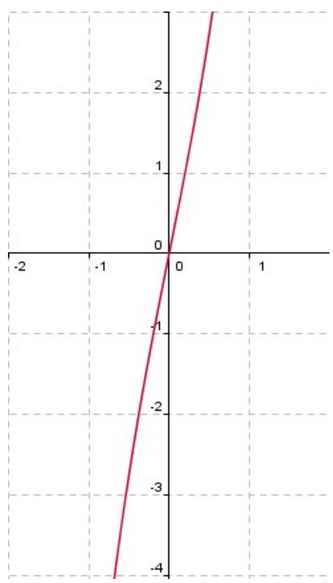
$x \mapsto \|x\|$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto x^n$ (n, entier naturel non nul)	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n, entier naturel non nul)
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto x^q$ (q, rationnel non nul)	$x \mapsto k$ (k, constante)

1.3.1 Critère de continuité en un point

Propriété 1.5 : Toute fonction qui est somme, produit,ou quotient de fonctions élémentaires est continue en tout élément de son ensemble de définition.

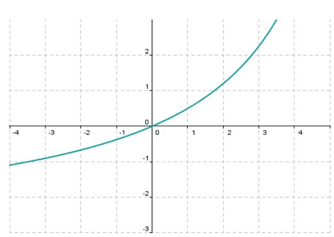
Exemples 1.6 :

1. $f(x) = 2x^3 + 5x$

package/fig6.jpg 

f est une fonction polynôme, qui est somme des produit des fonctions élémentaires continues en tout élément x_o de $\mathbb{R}$.

2. $t(x) = \dfrac{3x}{|x-7|}$

brutus package/fig7.jpg 

t est une fonction rationnelle qui est continue en tout x_o de $\mathbb{R}\backslash\{7\}$.

1.3.2 Continuité en un point et opération

Propriété 1.6 : Soient x_o et λ deux réels, f et g deux fonctions.

1. Si f et g sont continues en x_o, alors f+g, f.g, λf sont continues en x_o
2. Si de plus g(x_o) $\neq 0$, alors f/g est continue en x_o.

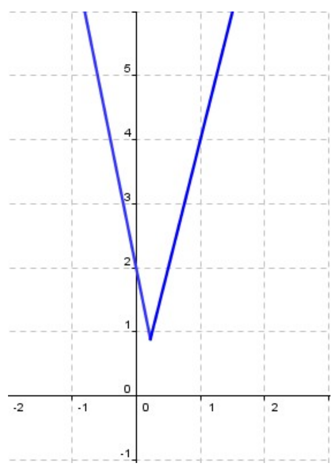
Démonstration :

Supposons que f et g sont continues en x_o. Alors les limites de f et g existent et sont respectivement égales à f(x_o) et g(x_o).Par suite, f+g, f.g, λf admettent chacune une limite, et elles sont respectivement : f(x_o)+ g(x_o), f(x_o). g(x_o), λf(x_o). D'où f+g, f.g, λf sont continues en x_o.

Si par ailleurs g(x_o) $\neq 0$, alors f/g admet une limite en x_o égale à f(x_o)/g(x_o). Donc f/g est continue en x_o.

Exemples1.7 :

1. $h(x) = |x| - 3$

   brutus package/fig9.jpg 

   h est une fonction continue en tout nombre réel comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. $v(x) = (3x - 7)(6x - 2)$

   v est une fonction continue en tout nombre réel comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

3. $w(x) = \dfrac{x^5 - 6x^3}{4 - x^2}$ est une fonction continue en tout élément de $\mathbb{R}\backslash\{2; -2\}$ comme rapport de fonctions continues sur $\mathbb{R}\backslash\{2; -2\}$.

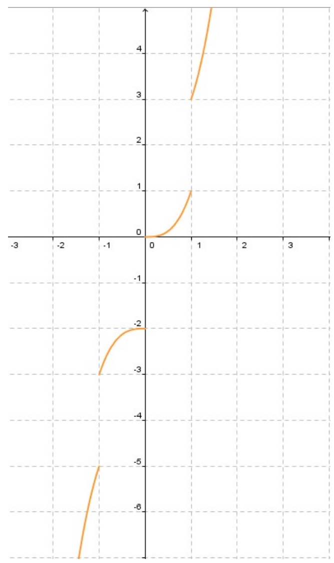
Il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut directement appliquer le critère de continuité en un point. Dans ce cas comment procéder ?

Propriété1.7 : Étant donné deux fonctions qui coïncident sur un intervalle ouvert K, si l'une est continue en un élément x_o de K, alors l'autre est aussi continue en ce même élément x_o.

On rappelle que deux fonctions f et g coïncident (ou sont égales) sur un intervalle I si et seulement si pour tout élément x de I, on a f(x) = g(x) .(Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de f et celle de g sont confondues sur cet intervalle.)

Exemples1.8 :

1. $f(x) = x^3 + 2E(x)$

brutus package/fig8.jpg 

Étudions la continuité de f en 0.5.

Sur l'intervalle $[0\,;\,1[$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est équivalente à la fonction g : $x \mapsto x^3$. Donc f et g coïncident sur $[0;1[$. Or g est continue en 0.5. Donc

$$\lim_{x\to 0.5} f(x) = g(0.5) = 0.5^3. \tag{1.15}$$

On en déduit que f est continue en 0.5.

2. $f(x) = \max(4x; 2-5x)$

Étudions la continuité de f en 0.

x	$-\infty$	$2/9$	$+\infty$
f(x)	2-5x		4x

f coïncide avec h : $x \mapsto 2-5x$ sur $]-\infty;\frac{2}{9}]$ et $0 \in]-\infty;\frac{2}{9}]$.

puisque h est continue en 0,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = h(0) = 2. \tag{1.16}$$

IL en ressort que f est continue en 0.

1.3.3 Continuité en un point et composition

Soient f et g deux fonctions définies par :

1. pour x positif, f(x) = $\sqrt{x}$

2. pour tout élément de $\mathbb{R}$, g(x) $= 3x - 1$.

Alors pour $3x - 1 \geqslant 0$, et sachant que f∘ g(x) = f(g(x)), on a :

f∘ g(x) $=f(3x-1)= \sqrt{3x-1}$.

Donc f∘ g(x) $= \sqrt{3x-1}$.

Et pour tout x réel positif, on a :

g∘ f(x) $= 3\sqrt{x} - 1$.

On peut remarquer que g∘ f(x)≠ f∘ g(x).

On sait aussi que, pour que g∘f soit définie, il faut et il suffit que f(x) appartienne au domaine de définition de g.

Ainsi :

Propriété1.8 : Soient f et g deux fonctions et x_o un réel.

f∘g est continue en x_o si et seulement si g est continue en x_o et f est continue en g(x_o).

Démonstration :

soit x_o un élément de $\mathbb{R}$.

g étant continue en x_o, on a

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = g(x_o). \tag{1.17}$$

Ainsi ,en posant $u_o =$ g(x_o) et f étant continue en g(x_o), est continue en u_o.D'où par un changement de variable (poser u = g(x)), on a :

$$\lim_{u \to u_o} f(u) = f(u_o). \tag{1.18}$$

C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to x_o} f \circ g(x) = f(g(x_o)) = f \circ g(x_o). \tag{1.19}$$

Par conséquent f∘ g est continue en x_o.

Remarques1.3 :

1. Si g n'est pas continue en x_o ou si f n'est pas continue en g(x_o), alors f∘g n'est pas continue en x_o.
2. Si f∘g n' est pas continue en x_o, alors soit g n'est pas continue en x_o, soit f n'est pas continue en g(x_o).

Exemples1.9 :

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - 1$.

f est continue en tout élément non nul de $\mathbb{R}$ et g est continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Étudions la continuité de f∘g en 1 et en 0.

G est continue en 1 comme fonction polynôme. Mais $g(1) = 0$. Alors f(g(1)) n'est pas défini, c'est-à-dire que f∘g n'est pas définie en 1. Donc elle n'est pas continue en 1.

g est continue en 0 en raison du critère de continuité en un point. Et pour la même raison f est continue en $g(0) = -1$. Il vient alors que f$\circ$g est continue en 0.

Chapitre II

Continuité sur un intervalle

Définition d'un intervalle2.1 :

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble de la forme :]a ; b[, [a ; b[, [a ; b] ;]a ;b],]-∞ ; a],]-∞ ; a[, [b ;+∞ [,] b ; +∞[, $\mathbb{R}$ =]-∞ ; +∞[.

Remarque2.1 : $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Une propriété des intervalles2.1 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour tout a, b ∈ I on a [a ; b] ⊆ I.

2.1 Activité 2.1

soit f la fonction définie par : f(x) = $\frac{3x+5}{x-2}$

1. f est-elle définie en 2 ?
2. Étudier la continuité de f en 2.
3. Étudier la continuité de f en -2 ; 0 ; 3.
4. soit $x_o \in$]- ∞ ; 2[. Étudier la continuité de f en x_o et donner une représentation graphique de f.
5. Etudier la continuité de f en chaque point de l'intervalle [-1 ; 4]. Que remarque-t-on ?
6. Que peut-on en conclure ?

solutions

1. 2 annulant le dénominateur de f, on en conclut que f n'y est pas définie .
2. La fonction f n'étant pas définie en 2, f n'y est pas continue .
3. On a, puisque f est définie en -2, 0 et en 3,

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{1}{4} = f(-2), \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{5}{2} = f(0) \quad et \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 14 = f(3). \tag{2.1}$$

   On en déduit alors que f est continue en -2, 0 et en 3.

4. $x_o \in$]- ∞ ; 2[implique que f est définie en x_o. d'où f est continue en x_o comme rapport de fonctions continues en x_o telles que le dénominateur de f est non nul en x_o.

   Puisque x_o est pris quelconque, on a donc pour tout élément x_o de]-∞ ; 2[, f continue en x_o .

D'où la définition suivante :

2.1.1 Fonction continue sur un intervalle

Activité :

Un chauffeur, empreinte un virage. Les eaux de pluies l'ayant dégradé, des fossés s'y sont formés. Ainsi, il se rend compte qu'un certain intervalle de la route a trois fossés. A 4 mètres de son point de départ il y a un fossé, également 3 mètres après et enfin 5 mètres après le précédent . Ces fossés ont tous la même longueur qui est d'un mètre.

On suppose qu'on est dans un repère R = (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), l'axe des abscisses étant confondu avec la bordure extérieure (à la chaussée) du trottoir. La route dans ce repère est une ligne.

1)- Représentons h la courbe représentative de la route dans le repère R, si nous supposons que cette route est parabolique passant par l'origine de R et que le trottoir a une largeur de 2 mètres.

2)- Que pouvons-nous dire de la fonction h en les points d'abscisses respectifs 7, 10, et 15 ?

3)- Que pouvons-nous dire de la fonction h dans l'intervalle [7 ; 15]

Définitions

Définition2.2 :

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I si f est continue en tout élément de I.

Autres exemples2.1 :

1. $f(x) = x^2$ et I=] -1 ; 1 [.

   f est définie sur I, puisque définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout élément x_o de I, on a

   $$\lim_{x \to x_o} f(x) = x_o^2 \quad et \quad f(x_o) = x_o^2. \tag{2.2}$$

   Alors f est continue en tout élément de I. Donc f est continue sur I.

2. f(x) =sin x et I=] -Π ; 0 [.

   f est définie sur I et pour tout a élément de I, on a :

   $$\lim_{x \to a} f(x) = \sin a. \tag{2.3}$$

   D'où f est continue en tout élément de I.C'est-à-dire que f est continue sur I.

Une fonction est dite continue lors qu'elle est continue sur son ensemble de définition.

Remarques2.2 :

1. Si f est définie sur I et s'il existe un élément de I en lequel f n'est pas continue, alors f n'est pas continue sur I.
2. Si f n'est pas continue sur I, alors soit f n'est pas définie sur I, soit il existe un élément de I en lequel f n'est pas continue.
3. f est définie sur une réunion d'intervalles , si ses restrictions sur chacun de ces intervalles y sont continues.
4. si f est une fonction continue en un élément x_o de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur un intervalle centré en x_o et f est définie en x_o.
5. Si f est continue à droite (resp, à gauche) en x_o, alors f est définie en x_o et f est continue sur un intervalle de la forme $]x_o\,; x_o+\alpha[$, (resp, de la forme $]x_o-\alpha\,; x_o[$).

2.1.2 Continuité sur un intervalle et fonctions élémentaires

Propriété2.2 : Les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition.

$x \mapsto \lvert x\rvert$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto x^n$(n entier naturel no nul)	$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (n entier naturel non nul)
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto x^q$(q, un rationnel non nul)	$x \mapsto k$(k, constante)

Démonstration :

Ces propriétés se remarquent facilement sur le graphe et se déduisent de la continuité en un point.

2.1.3 Continuité sur un intervalle et opération

Propriété2.3 :

Soient f et g, λ un réel et K un intervalle de $\mathbb{R}$.

si f et g sont continues sur K, alors :

– f+g, f.g, λf sont continues sur K.

– Si g ne s'annule pas sur K, alors f/g est continue sur K.

– Toute fonction qui est somme, produit ou quotient de fonctions continues sur K, est continue sur K. (Critère de continuité sur un intervalle).

Démonstration :

soit x_o un élément de K.

– Puisque f et g sont continues sur K et donc continues en x_o, on a f+g, f.g et λf sont continues en x_o. comme x_o est pris quelconque, on en conclut que f+g, λf et f.g sont continues sur K.

– De plus si g(x_o) $\neq 0$, alors f/g est continue en x_o. Donc f/g est continue sur K.

– Soit v une fonction qui est somme (rep, produit ou quotient) de fonctions élémentaires continues sur K.

Alors ces fonctions élémentaires sont continues en x_o puisque continues sur K. D'où v est continue en x_o d'après le critère de continuité en un point. On en déduit que v est continue sur K.

Exemples2.2 :

1. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
3. Les fonctions :x $:\mapsto$ sin x, x $:\mapsto$ cos x sont continues sur $\mathbb{R}$.

2.1.4 Continuité sur un intervalle et composition

Propriété2.4 :

Soient f et g deux fonctions, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

f$\circ$g est continue sur I si et seulement si g est continue sur I et f est continue sur g(I) (g(I) est l'ensemble de tous les réels g(x), x parcourant I).

Démonstration :

Soit x_o un élément de I.

On a

$$\lim_{x\to x_o} g(x) = g(x_o) \tag{2.4}$$

car g est continue sur I.

Mais, g(x_o)est un élément de g(I) et f est continue sur g(I).

Donc f est continue en g(x_o).

D'où

$$\lim_{x\to g(x_o)} f(x) = f(g(x_o)) = f\circ g(x). \tag{2.5}$$

Il en résulte que

$$\lim_{x\to x_o} f\circ g(x) = f\circ g(x_o). \tag{2.6}$$

ceci entraîne que f∘g est continue en tout point de I.On peut ainsi conclure que f∘g est continue sur I.

Exemple2.3 :

Démontrons que la fonction x$\mapsto$ sin $\sqrt{3x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

la fonction f : x $\mapsto 3x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus f est positive sur $\mathbb{R}$.

la fonction g : x $\mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a f($\mathbb{R}$) $\subset \mathbb{R}_+$.

Donc g∘f : x $\mapsto \sqrt{3x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque2.3 :

Plus généralement, la composée de eux fonctions continues sur leurs ensembles de définition est continue sur son ensemble de définition.

2.1.5 Image d'un intervalle par une fonction continue

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Il convient de rappeler que f(I) est l'ensemble de tous les réels f(x) lorsque x parcourt I. f(I) est l'image de I par f.

Ainsi, on a : y élément de f(I) équivaut à : il existe x élément de I tel que $y = f(x)$ (y ϵ f(I) $\leftrightarrow \ni$ x $\in$ I / $y = f(x)$).

Activité 2.2 :

Soient f(x)= $\frac{x^2+3}{x-4}$ et g(x) $= x^3$. Soit I = [-2 ; 6].

1. Représenter graphiquement f et g.
2. Étudier la continuité de f et de g sur I.
3. Déterminer graphiquement l'image de I par f et par g.
4. Relever les intervalles images de I par f et g.
5. Que pouvons-nous remarquer ?

Solutions

1. Représentations graphiques
2. f n'est pas définie en 4 et 4 $\in$ I. Donc f n'est pas continue sur I. g quant à elle est continue sur I comme fonction polynôme.
3. Représentions graphiques

4. f(I) =]- ∞ ;- $\frac{7}{6}$] $\cup$ [- $\frac{7}{6}$; $\frac{37}{2}$] $\cup$ [$\frac{37}{6}$; + ∞ [et g(I) = [-8 ; 216].
5. nous remarquons que f(I) est une réunion d'intervalles, qui n'est pas un intervalle. Tandis que g(I) est un intervalle.

Ce qui nous permet d' énoncer les propriétés suivantes :

Propriétés :

Propriété2.5 :L'image d'un intervalle par une fonction non continue peut ne pas être un intervalle.

Exemple2.4 :

1. soit $f(x) = E(x)$ la fonction partie entière, et I = [0 ; + ∞ [.

   On a $f(I) = \mathbb{N}$ qui n'est pas un intervalle.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ et I = [-1 ; 1].

On a f(I)=] -∞ ; 0 [$\cup$] 0 ; +∞ [qui n'est pas un intervalle, mais une réunion d'intervalles.

Propriété2.6 : Limage d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. c'est-à-dire que si f est une fonction continue et I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f(I) est un intervalle.

Exemples2.5 :

Soient $f(x) = (x-2)^2 + 1$ et I =] 1 ; 3 [.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et I $\subset$ $\mathbb{R}$.

Donc f est continue sur I.

Déterminons f(I).

Soit x un élément de I. On a :

x élément de I équivaut à 1 <x < 3.

équivaut à -1 $< x - 2 < 1$

équivaut à $0 \leq (x-2)^2 < 1$

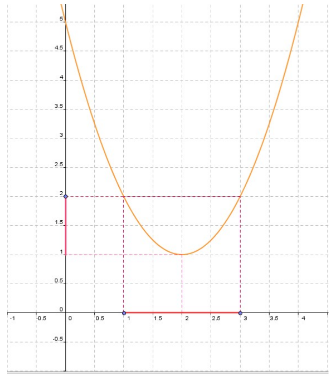
équivaut à $1 \leq (x-2)^2 + 1 < 2$

équivaut à f(x) $\in [1; 2[$.

On a donc f(I) = $[1; 2[$ qui est un intervalle.

Mais,

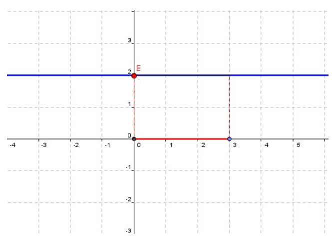
Remarques2.4 :


brutus package/fig13.jpg

1. Si f est une fonction constante, alors f(I) est réduit à un singleton.
2. Si f est continue sur I, les intervalles I et f(I) ne sont pas forcément de même nature (c'est– dire tous ouverts, tous semi-ouverts, tous fermés).

Exemples2.6 :

1. $f(x) = 2$ et I $=]0; 3[$.


brutus package/fig14.jpg

   f est continue sur I comme fonction constante. Ainsi, pour tout élément x de I, $f(x) = 2$. D'où $f(I) = \{2\}$.

2. $u(x) = x^4$ et I $=] - 2; 5[$.

   u est continue sur I comme fonction polynôme et $u(I) = [0; 625[$.

Toute fois pour les intervalles fermés, nous énonçons la propriété suivante :

Propriété2.7 : Soient f une fonction et I =[a ; b] un intervalle fermé
avec a et b deux réels distincts tels que a <b.
Si f est une fonction continue sur I, alors f(I) est un intervalle fermé.

Remarques2.5 :

1. soit I = [a ; b] un intervalle fermé. Alors f(I) est un intervalle fermé et donc il existe m et M tels que f(I) = [m ; M].

   Par suite on a pour tout élément x de I, on a m $\leq$ f(x) $\leq$ M. Ce qui traduit que f est bornée.

2. L a fonction continue f admet sur l'intervalle fermé I, un minimum m et un maximum M absolus ; ce sont les deux bornes du segment f(I). Cependant,m et M ne sont pas forcément f(a) et f(b).

Corollaire2.1 :

Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et f un fonction.

Si f est continue sur I, alors il existe au moins un couple (c, ; d) de I $\times$I tel que l'on ait :

pour tout x élément de I, f(c) $\leq$ f(x) $\leq$ f(d).

Démonstration :

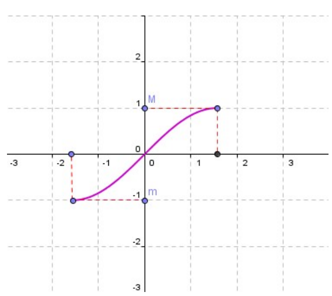
I étant un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle fermé, et f continue, d'après la propriété précédente, f(I) est intervalle fermé [m ; M]. On a donc pour tout élément x de I, m $\leq$ f(x) $\leq$ M.

d'autres part, m et M appartiennent à f(I). Ainsi d'après la propriété précédente, on obtient [m ; M] $\subset$ f(I). Il existe donc au moins un couple (c ; d) de I $\times$I tel que l'on ait $m = f(c)$ et $M = f(d)$.

Exemple2.7 :

Soit f : x $\mapsto$ sinx et I = $[-\frac{\Pi}{2}; \frac{\Pi}{2}]$.

brutus package/fig15.jpg



On a f([-$\frac{\Pi}{2}$; $\frac{\Pi}{2}$]) = $[-1; 1]$ et pour tout élément x de I, f($-\frac{\Pi}{2}$) $\leq$ f(x) $\leq$ f($\frac{\Pi}{2}$).

2.1.6 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 2.3 :

Soit f la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par f(x) = $\sqrt{x-1} - 2$.

1. Étudier la continuité de f sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.
2. Justifier que pour tout x élément de $[\,1\,;+\infty\,[$, $f(x) \geq -2$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. Démontrer que tout élément β de $[\,-2\,;+\infty\,[$ a un antécédent α dans $[\,1\,;+\infty\,[$; en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[\,1\,;+\infty\,[$.
5. Déterminer l'image par f de l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$.

Résoudre certaines équations relève d'un travail assez fastidieux. Dans certains cas il est impossible de trouver les valeurs exactes des solutions de celles-ci. Ainsi, on convient souvent de prouver l'existence de ces solutions sans pour autant les déterminer. Le théorème des valeurs intermédiaires est pour ce fait d'une très grande utilité. Après avoir prouvé l'existence de ces solutions, les valeurs approchées de celles-ci sont déterminées par différentes méthodes apprises :

- Le balayage des intervalles contenant chacun l'une des solutions, après avoir choisi un pas adéquat.
- La dichotomie.

Théorème2.1 : Soient f une fonction continue sur un intervalle I,
a et b deux éléments de I. Tout nombre réel compris entre f(a) et f(b) a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

Interprétation graphique

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, soit (C) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I.

Alors pour toute valeur y_o comprise entre f(a) et f(b), la droite d'équation $y = y_o$ coupe (C) en au moins un point entre a et b d'ordonnée y_o.

Démonstration :

On sait que $f([a\,;b])$ est un intervalle K.

Soit y_o un réel compris entre f(a) et f(b).

On a f(a) et f(b) sont deux éléments de K. K étant un intervalle, on a $[\,f(a)\,;f(b)\,] \subset K$ si $f(a) < f(b)$ (ou $[\,f(b)\,;f(a)\,] \subset K$ si $f(b) < f(a)$). Ainsi, $y_o \in K$.

Or $K = f([\,a\,;b\,])$. Donc $y_o \in f([\,a\,;b\,])$. On en déduit par définition de $f([\,a\,;b\,])$ que y_o a au moins un antécédent compris entre a et b.

Remarque2.6 :

si f n'est pas continue sur [a ; b], un réel compris entre f(a) et f(b) peut ne pas avoir d'antécédent dans l'intervalle [a ; b].

Exemple2.7 :

E désigne la fonction partie entière.

On a E(1) < 1,5 < E(2). Mais 1,5 n'a pas d'antécédent par E dans [2 ; 3].

Ceci prouve que l'hypothèse de continuité est fondamentale pour l'application de ce théorème.

On déduit du théorème précédent la propriété suivante :

Propriété2.8 :

Soient f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue et s'il existe deux éléments a et b (a <b) de I tels que f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

Démonstration :

f(a) et f(b) sont de signes contraires. Alors, on a $0 \in [\, f(a) ; f(b)\,]$ (ou $0 \in [\, f(b) ; f(a)\,]$). Il résulte du théorème précédent qu'il existe un réel $c \in]\, a ; b\, [$ tel que f(c) = 0.

Interprétation graphique

Le plan étant toujours muni d' un repère orthonormal, et (C) la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I.

Alors, la courbe (C) coupe l'axe des abscisses au moins une fois entre a et b.

Exemple2.8 :

Soient s(x) = $x^5 + x + 1$ et I = [-1 ; 1].

Montrons que l'équation (E) : s(x) = 0 a au moins une solution dans I.

On a s(-1) = -1 et s(1) = 3. on peut remarquer que s(-1) et s(1) sont de signes contraires.

D'après donc le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que (E) a au moins une solution dans I.

La propriété suivante est la contra posée de la propriété 1.

Propriété2.9 : Soient f une fonction, et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue sur I et ne s'y annule pas , alors f garde un signe constant sur I.

Démonstration :

Procédons par l'absurde.

Supposons que f est continue sur I et ne s'y annule pas (c'est-à- dire, pour tout x élément de I, f(x) $\neq$ 0) et f change de signes sur I.

Alors il existe a et b deux élément de I tels que f(a) et f(b) sont de signes contraires.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c élément de] a ; b [tel que f(c) = 0.Et par suite il existe c élément de I tel que f(c) = 0.

il vient alors que : pour tout élément x de I, f(x) $\neq$ 0 et c $\in$ I tel que f(c) = 0. Ce qui est absurde.

2.1.7 Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

On rappelle qu'une fonction est dite monotone, si elle est croissante ou décroissante. Elle est dite strictement monotone, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème2.2 :

1. Soit f une fonction, a et b deux réels tels que a < b, I = [a ; b]. Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors f(I) est le segment [f(a) ; f(b)] (ou [f(b) ; f(a)]).
2. Soit a un réel, b désignant soit un réel, soit $+\infty$ et I = [a ; b [.

   Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors f a une limite c en b (ou c' en b) et f(I) est l'intervalle [f(a) ; c [(ou] c' ; f(a)]), c désignant soit un réel, soit $+\infty$ et c' désignant soit un réel, soit - ∞.
3. a désignant soit un réel, soit - ∞, b désignant soit un réel, soit + ∞ et I =] a ; b [.

   Si f est continue et croissante sur I (ou décroissante sur I), alors f a une limite c en a, d en b (ou c' en a et d' en b) et f(I) est l'intervalle] c ; d [(ou] d' ; c' [ ) et d et c' désignant soit des réels, soit + ∞ et , c et d' désignant des réels, soit - ∞.

Le théorème est vrai si f est strictement monotone.

Exemple2.9 :

1. f(x) = x^2 et I = [1 ; 3].

   f est continue et strictement croissante sur I, donc F(I) = [f(1) ; f(3)]. e.i. f(I) = [1 ; 9].
2. g(x) = cos x et I = [0 ; Π].

f est continue et strictement décroissante sur I. Donc g(I) = [g(Π) ; g(0)]== [-1 ; 1].

3. h(x) = $\sqrt{x^2+1}$ et I = [0 ; +∞ [. f est continue et croissante sur I. Ainsi f(I) = [1 ; + ∞ [.

Remarque2.7 :

Lors qu' une fonction f est continue et strictement monotone sur I, f(I) est un intervalle de même nature que I et ses bornes sont limites de f aux bornes de I.

Le tableau suivant précise f(I) suivant la nature de I et le sens de variation de f.

Soient a et b deux réels distincts tels que a < b.

I	f(I)	
	f strictement croissante	f strictement décroissante
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
[a ; b [	[f(a) ; $\lim_{x\to b^-} f(x)$ [	] $\lim_{x\to b^-} f(x)$; f(a)]
] a ; b [	] $\lim_{x\to a^+} f(x)$; $\lim_{x\to b^-} f(x)$ [	] $\lim_{x\to b^-} f(x)$; $\lim_{x\to a^+} f(x)$ [
[a ; +∞ [	[f(a) ; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ [	] $\lim_{x\to +\infty} f(x)$; f(a)]
$\mathbb{R}$	] $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ [	] $\lim_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ [

Si f n'est pas monotone sur I, l'étude des variations de f nous amène à découper I en sous-intervalles sur lesquels f est monotone. Nous savons déjà trouver l'image de chacun de ces intervalles et f(I) est la réunion de ces images ; nous pouvons montrer que f(I) est lui aussi un intervalle.

2.1.8 Bijection réciproque d'une fonction continue et monotone

Activité2.4 :

Soient f(x) = tan x et I =]- $\frac{\Pi}{2}$; $\frac{\Pi}{2}$ [.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. Calculer f(I) et en déduire que f(I) est un intervalle.
3. montrer que f :]- $\frac{\Pi}{2}$; $\frac{\Pi}{2}$ [→ $\mathbb{R}$ est une bijection.
4. Représenter (C) la courbe graphique de f et représenter (C') la courbe obtenue par symétrie d'axe Δ : y = x de f.

Propriétés :

Propriété2.10 :

Soit f une fonction et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

1. f réalise une bijection de I vers f(I).
2. Sa bijection réciproque, notée f^{-1}, est continue et strictement monotone, de même variation que f de f(I) sur l'intervalle I.
3. Pour tout élément x de I, f(x) $\in$ f(I) et f(x) $=$ y équivaut à y $= f^{-1}(x)$.

Démonstration :

1. La fonction f est continue sur I. Donc f(I) est un intervalle.
   - la fonction f est une surjection de I sur f(I) car par définition de f(I), pour tout y élément de f(I), il existe x élément de I tel que y $=$ f(x). i.e. l'équation y $=$ f(x) admet au moins une solution sur I.
   - Démontrons que f est aussi injective sur I.

     Soient a et b deux éléments distincts (a $\neq$ b) de I. Supposons a $<$ b. Puisque f est strictement croissante (resp strictement décroissante) sur I, on obtient : f(a) $<$ f(b) (resp f(a) $>$ f(b)), et par suite f(a) $\neq$ f(b). Donc f est injective sur I. Ainsi, f est à la fois surjective et injective sur I. Par conséquent f est bijective de I vers f(I).
2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f sur I.

   f^{-1} est une application bijective de f(I) vers I.

   Conformément au programme, nous admettons que f^{-1} est continue sur f(I).

   Étudions son sens de variation sur f(I).

   Soient y et z deux éléments quelconques de f(I) distincts ; supposons que l'on ait y $<$ z et appelons x (resp a) l'antécédent de y (resp z).

   On a ainsi y $=$ f(x) et z $=$ f(a) .

   Par suite on obtient x$=$ f^{-1}(y) et a $=$ f^{-1}(z) .

   Supposons f strictement croissante et f^{-1} strictement décroissante.

   Si x $>$ a, ce qui équivaut à f^{-1}(y) $>$ f^{-1}(z), alors on a f(f^{-1}(y)) $>$ f(f^{-1}(z)) puisque f est strictement croissante. c'est-à-dire y $>$ z. ce qui est absurde.

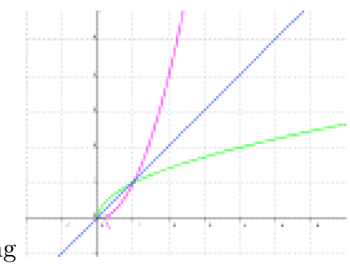
3. De même pour f strictement décroissante et f^{-1} strictement croissante, si x > a, on aboutit à y > z. ce qui est absurde.

Remarques2.8 :

1. Pour tout x élément de I, $f^{-1} \circ$ f(x) = x, pour tout y élément de f(I), f $\circ$ f^{-1}(y) = y, ceci signifie que $f^{-1} \circ$ f = id_I et f $\circ$ $f^{-1} = id_{f(I)}$.
2. Si (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont respectivement les courbes représentatives de f et de f^{-1}, alors elles sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation y=x).

Soit f :x $\mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$. f a pour fonction réciproque f^{-1} : x $\mapsto \sqrt{x}$ définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$.

brutus package/fig.png



Plus généralement, la fonction h : x $\mapsto x^n$ pour n $\in \mathbb{N}^*$ (définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ si n est pair et de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si n est impair) a pour fonction réciproque h^{-1} : x $\mapsto \sqrt[n]{x}$.

2.1.9 Prolongement par continuité

Activités2.5

Soit la fonction définie par : f(x) = $\dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Calculer la limite de f en 0.
4. Soient les fonctions définies par : h(x)= $\begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} & si \;\; x \neq 0. \\ \qquad 1 & si \;\; x = 0, \end{cases}$ et

   t(x) = $\begin{cases} \dfrac{\cos(x)-1}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ \qquad 2 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

   – représenter graphiquement h et t.

   – Étudier la continuité de h et t en 0. Que peut-on dire de h et de t ?

Solutions

1. f existe si et seulement si $x \neq 0$. Donc le domaine de f est $D_f = \mathbb{R}^*$.

2. f n'étant pas définie en 0, f n'est pas continue en 0.

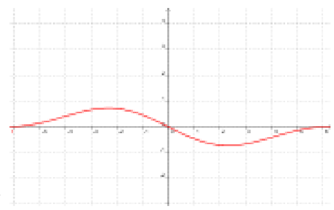
3. D'après un résultat sur les limites, on a

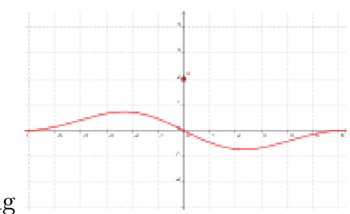
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1. \tag{2.7}$$

4. Par définition de h on obtient

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 1. \;\; et \;\; h(0) = 1. \tag{2.8}$$

   Donc h est continue en 0.

package/fig16.png 

package/fig17.png 

   Également par définition de t on obtient

$$\lim_{x \to 0} t(x) = 1. \;\; et \;\; t(0) = 2. \tag{2.9}$$

   on peut donc remarquer que

$$\lim_{x \to 0} t(x) \neq t(0) \tag{2.10}$$

   Il en résulte que t n'est pas continue en 0.

La définition suivante permet de conclure :

Définition2.3 :

Soit f une fonction non définie en x_o et l un nombre réel tel que $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$.

On appelle prolongement de f par continuité en x_o, la fonction g définie par : g(x) = $\begin{cases} f(x) & si \;\; x \in D_f \\ l & si \;\; x = x_o \end{cases}$

Ainsi h est un prolongement par continuité de f, tandis que t ne l'est pas.

Autres exemples2.10 :

1. Soit la fonction définie par f(x) = $\dfrac{\sin(x)}{x}$.

   Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^*$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. Donc la fonction t définie par :

   t(x) = $\begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f en 0.

2. Soit la fonction s(x) $= \dfrac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1}$.

   $D_s = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$ et f étant une fonction rationnelle, elle est continue sur son domaine de définition.

   Pour tout élément x de D_s, s(x)$= \dfrac{(2x+1)(x^3+3)}{(2x+1)(2x-1)} = \dfrac{x^3+3}{2x-1}$.

   Donc
$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} = -\frac{25}{16} \tag{2.11}$$

   Alors un prolongement par continuité de s en $-\dfrac{1}{2}$ est donc v défini par : v(x)=
$$\begin{cases} \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1} & si \;\; x \in D_s \\ -\frac{25}{16} & si \;\; x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$
   v est continue sur $D_s \cup \{\frac{-1}{2}\}$

   .

Remarque2.9 :

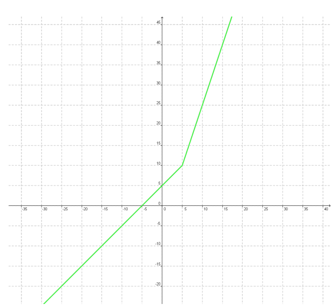
1. Si g est un prolongement de f par continuité en x_o, alors f est la restriction de g par continuité en x_o.
2. De façon analogue aux paragraphes 1.2.2 et 1.2.3, on introduit la notion de prolongement par continuité à droite(resp à gauche) en un point et on démontre qu'une fonction admet pour limite à droite (resp à gauche) en x_o le réel l si et seulement si elle admet en x_o un prolongement par continuité g à droite (resp à gauche) en x_o tel que l'on ait g(x_o) = l.
3. Si g est un prolongement par continuité de f, alors g est unique.

Exemple2.11 :

1. Soit la fonction f : x → 2x+|x-5|

   Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

   On a $\begin{cases} \forall \;\; x \in]-\infty; 5[& f(x) = 2x - x + 5 = x + 5 \\ \forall \;\; x \in]5; +\infty[& f(x) = 2x + x - 5 = 3x - 5 \\ f(5) = 10. & \end{cases}$

package/fig18.png 

Cherchons la limite à droite et la limite à gauche de f en 5.

La fonction

g :]- ∞ ; 5[→ $\mathbb{R}$

x ↦ x+5

coïncide avec f sur]- ∞ ; 5[et est continue à gauche en 5. On a donc

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = g(5) = 10 \tag{2.12}$$

La fonction

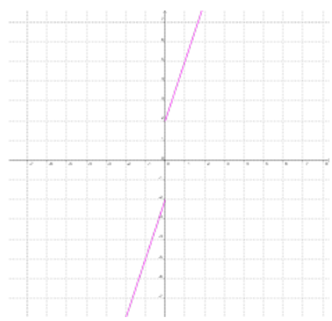
h :] 5 ; + ∞ [$\to \mathbb{R}$

x $\mapsto$ 3x-5

De même h coïncide avec f sur] 5 ; + ∞ [et on a :

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = h(5) = 10 \tag{2.13}$$

Soit la fonction h(x) = $\begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & si \quad x \neq 0. \\ 2 & si \quad x = 0. \end{cases}$

package/fig19.png 

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ =]-∞ ; 0] $\cup$ [0 ; +∞ [.

Nous allons étudier la continuité de h en 0.

On a : h(x) = $\begin{cases} 3x + \frac{-2x}{x} = 3x - 2 & si x < 0 \\ 3x + \frac{2x}{x} = 3x + 2 & si \quad x > 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}$

Ainsi h coïncide avec la fonction définie par :

l :]-∞ ; 0 [$\to \mathbb{R}$

x $\mapsto$ 3x - 2

sur]-∞ ; 0 [. Donc l étant continue sur cet intervalle, h y est aussi continue.

Également, h coïncide avec la fonction définie par :

j :] 0 ; +∞ [$\to \mathbb{R}$

x $\mapsto$ 3x + 2

sur] 0 ; +∞ [. Et puisque j est continue sur cet intervalle, h y est aussi continue.

Par conséquent h est continue en tout point non nul de $\mathbb{R}$. Ainsi le point problème ici est 0.

h est-il continue en 0 ?.

Calculons la limite à droite et la limite à gauche de h en 0.

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = l(o) = -2 \tag{2.14}$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = j(o) = 2 \tag{2.15}$$

Nous remarquons tout de suite que :

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) \neq \lim_{x \to 0^+} h(x) \tag{2.16}$$

Il en résulte que h n'est pas continue en 0.

Mais remarquons aussi que :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = 2 = h(0) \tag{2.17}$$

Donc h est continue à droite en 0. Ainsi, j est un prolongement par continuité de h à droite en 0. h n'est pas continue à gauche donc n'admet pas de prolongement à gauche en 0.

Remarquons que l'on a :

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = 10 \tag{2.18}$$

et par suite

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 10. \tag{2.19}$$

Donc f est continue en 5.

On aurait pu démontrer ce dernier résultat directement.

Théorème 2.3 : Soient x_0 et l deux réels,I un intervalle épointé de centre x_0 et f une fonction définie sur I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f admet pour limite en x_0 le réel l.
2. f admet un prolongement par continuité g en x_0 et l'on a : g(x_0) = l.

Démonstration :

1) ⇒ 2) découle de la définition. Prouvons que 2) ⇒ 1). Soit g le prolongement par continuité de f en x_0 ; la fonction g est définie sur D ∪ { x_0 } et continue en x_0.Il résulte de la propriété(1.1.1) (1.2.111) les égalités : $\lim_{x \to x_0}$ g(x) = g(x_0) = l.

Les fonctions f et g coïncident sur I ; de la définition de la limite en x_0, il résulte l'égalité : $\lim_{x \to x_0}$f(x) = $\lim_{x \to x_0}$ g(x).

On a donc $\lim_{x \to x_0}$f(x) = l.

Remarque :

Ce théorème permet dans certains cas de trouver, de façon très simple, la limite en un point x_0 de toute fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur s'annulent en x_0. Par simplification, on obtient un prolongement par continuité de f et la limite de f en x_0 est la valeur numérique de ce prolongement en x_0.

Par exemple pour la fonction f(x) = $\dfrac{(x-1)(x^2+x+1}{x-1}$. On a :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3. \tag{2.20}$$

2.1.10 Recollement par continuité

Activités2.6 :

Activité2.6.1

Un électricien veut installer une ligne de courant dans une maison. Mais il se rend compte que la distance entre la source de courant et la maison en question est très grande. Pourtant il ne possède que de morceaux de fils de courant chacun d'une longueur bien précise.

1)- Que peut-il faire pour résoudre ce problème ?

2) Si nous considérons que u,v et w sont les fonctions représentant chacune la ligne tendue par chaque morceau de fils et qu'il n'en a utilisé que trois morceaux. Que peut-on dire de la fonction t représentant la ligne totale tendue par les trois fils ? (notons que h est l'association de u,v et w)

Activité 2.6.2 Soient les fonctions définies par : u(x) = -2x+6 ; v(x) = x-3.

1. Étudier la continuité de u sur] 3 ; +∞[et de v sur]-∞ ; 3[.
2. Posons s et w les fonctions définies par : s(x) = $\begin{cases} -2x+6 & si \;\; x \geq 3 \\ x-3 & si \;\; x \leq 3 \end{cases}$

   w(x) = $\begin{cases} -2x+6 & si \;\; x>3 \\ x-3 & si \;\; x<3 \\ 1 & si \;\; x=3 \end{cases}$

   a. Déterminer les domaines de définition de s et de w.

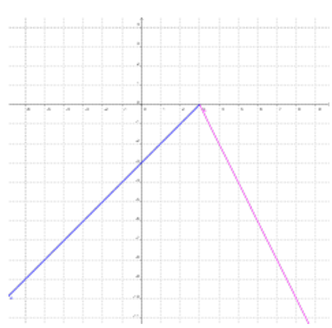
   b. Représenter graphiquement s et w.

   c. Étudier la continuité de s et w en 3. Conclure.

Solutions

1. les fonctions u et v sont continues respectivement sur] 3 ; +∞[et]-∞ ; 3[comme fonctions polynômes. (ou les restrictions de s respectivement sur] 3 ; +∞[et]-∞ ; 3[y sont continues).

a. D_s= D_w =]- ∞ ; 3] ∪ [3 ; + ∞ [= ℝ

package/fig20.png 

c. En utilisant la définition, on a

$$\lim_{x \to 3^-} s(x) = 0 \;\; et \;\; \lim_{x \to 3^+} s(x) = 0 \;\; et \;\; s(3) = 0. \tag{2.21}$$

Par conséquent s est continue en 3.

$$tandisque \lim_{x\to 3^-} w(x) = 0 \;\; et \;\; \lim_{x\to 3^+} s(x) = 0 \;\; et \;\; s(3) = 1. \tag{2.22}$$

Ainsi w n'est pas continue en 3.

Définition2.4 : Un recollement par continuité peut être défini comme la jonction de deux fonctions définies chacune dans un intervalle donné, pour en former une seule de sorte que celle-ci soit continue. La fonction résultante est alors définie dans la réunion de ces intervalles.

Ainsi on retient le théorème suivant :

Théorème2.4 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
Si f est continue sur I $\cap$ $]-\infty\,;\,a\,]$ ainsi que sur I$\cap$ $[a\,;\,+\infty\,[$, alors f est continue sur I.

Exemples2.12 :

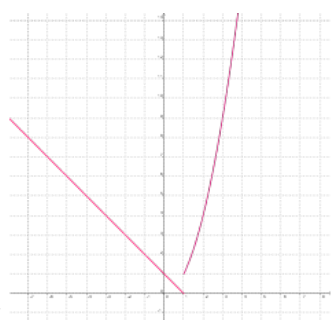
f(x)= |x| $\Leftrightarrow$ f(x)= $\begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x \leq 0 \end{cases}$

f est continue sur] - ∞ ; 0] et sur [0 ; + ∞ [comme fonctions polynômes.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$ =]- ∞ ; 0] $\cup$ [0 ; + ∞ [. f est un recollement par continuité.

Remarque2.10 :

q(x) = $\begin{cases} x^2 & si \;\; x \geq 1 \\ -x+1 & si \;\; x < 1 \end{cases}$



package/fig21.png

q est continue sur [1 ; + ∞ [et sur] - ∞ ; 1[comme fonctions polynômes.

Mais on a

$$\lim_{x\to 1^-} q(x) = 0 \;\; et \; \lim_{x\to 1^+} q(x) = 1. \;\; Alors \lim_{x\to 1^-} q(x) \neq \lim_{x\to 1^+} q(x). \tag{2.23}$$

On en déduit que q n'est pas continue en 1.

Astuce* : Pour étudier la continuité d'une fonction f sur son D_f, il faut souvent faire deux études :

- Une étude globale sur des intervalles : on utilise pour cela les théorèmes généraux sur les fonctions continues.
- Des études locales, pour lesquelles il faut revenir à la définition.
- **Attention** :

  Avant d'étudier la continuité d'une fonction, il faut absolument déterminer son ensemble de définition,que l'énoncé le précise ou pas ; cela doit être un réflexe.

2.2 Exercices résolus

:

Exercice 1 :

Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule.

(1)- Calculer le volume de l'eau contenue dans la boîte.

(2)- Trouver de deux façons différentes, le volume de la boule immergée.

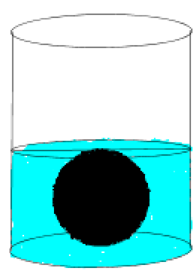
(3)- On pose f(x) $= \frac{1}{3}\,x^3$-72 x + 180

* justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

* Montrer que f(x)= 0 admet une unique solution dans chacun des intervalles suivants : [-16 ; -15.5], [2.5 ;3] et [13 ; 13.5].

*Déterminer à 10^{-3} mm près la solution dans [2.5 ; 3].

(4)- Montrer que le rayon de la boule vérifie l'équation f(x)= 0. Déterminer le à 10^{-3} mm près.



package/fig28.png

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall$ x $\in \mathbb{R}^*$, f(x)= $\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$

f(0) = 0

(1)- Quelle est la limite de f en 0 ?

(2)- Démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

(3)- Vérifier que la fonction réciproque de f est la fonction x $\longmapsto$ |x|x.

Solutions

Exercice 1 :

(1)- Calculons le volume de l'eau contenue dans la boîte.

l'eau étant contenue dans le cylindre jusqu'à 5 cm de hauteur, son volume est celui de la partie du cylindre qu'il occupe (cylindre de 5 cm de hauteur et 12 cm de rayon).

Rappelons que le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est donné par :

V $= \pi \times r^2 \times$h.

Donc $V_{eau} = \pi \times 12^2 \times 5 = 720\ \pi\ cm^3$.

(2)- Première façon :

la boule est une sphère. Donc par la formule usuelle, on obtient : pour une sphère de rayon R ,

$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ en cm^3.

- Deuxième façon :

la boule étant immergée, l'eau contenue dans le cylindre se déplace d'une certaine hauteur. Puisque la surface de l'eau est tangente à la boule, le diamètre d= 2R de la boule (où R est son rayon) est la nouvelle hauteur de l'eau.

Ainsi le nouveau volume occupé par l'eau est :

$V'_{eau} = \pi \times 12^2 \times (2\text{R})^3 \quad en \quad \text{cm}^3$.

Par ailleurs, la poussée d'Archimède énonce que le volume du liquide déplacé est égale au volume du solide immergé.

D'où, le volume déplacé de l'eau est égale au volume de la boule. Et le volume du liquide déplacé est donné par :

$V_{liquide\ \text{déplacé}} = V'_{eau}$ - V_{eau} en cm^3.

Il en résulte que :

$V_{boule} = V'_{eau}$ - V_{eau} en cm^3.

c'est-à-dire que :

$V_{boule} = 144 \times \pi \times (2\text{R})^3 - 720\pi$

(3)- * Le domaine de f est $\mathbb{R}$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

* Montrons que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution dans chacun des intervalle suivant :

- Dans [-16 ; -15.5].

f étant continue sur $\mathbb{R}$, est continue sur cet intervalle.

De plus on a :

Étudions la monotonie de f dans [-16 ; -15.5].

Soient a, b deux éléments de [-16 ; -15.5].

$$\Delta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}b^3 - 72b + 180 - \frac{1}{3}a^3 + 72a - 180}{b - a}$$
$$= \frac{(b - a)[\frac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - 72]}{b - a}$$

$= \dfrac{1}{3}(b^2 + ba + a^2) - 72$

Mais, on a :

-16 $\leq$ a $\leq$ 15.5 et -16 $\leq$ b $\leq$ 15.5

d'où en encadrant Δ, on obtient 168.25 $<$ Δ $<$ 184. c'est-à-dire que Δ >0.

Donc f est strictement croissante dans l'intervalle [-17 ; -16]. i.e. f est bijective de [-16 ; -15.5] vers f([-16 ; -15.5]).

Et,

f(-16)=-33.33 $<$ 0 et f(-15.5) = 35.29 $>$ 0.

Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f(x)=0 admet une unique solution dans [-16 ; -15.5].

- Dans [2.5 ; 3]. f est continue sur cet intervalle. De plus,

Soient u, v $\in$ [2.5 ; 3]

$\Delta = \dfrac{f(v) - f(u)}{v - u}$

$= \dfrac{\frac{1}{3}v^3 - 72v + 180 - \frac{1}{3}u^3 + 72u - 180}{v - u}$

$= \dfrac{(v-u)[\frac{1}{3}(v^2 + vu + u^2) - 72]}{v - u}$

$= \dfrac{1}{3}(v^2 + vu + u^2) - 72.$

Et puisqu'on a :

2.5 $\leq$ u $\leq$ 3 et 2.5 $\leq$ v $\leq$ 3,

dans un encadrement de Δ, on obtient : -65.75 $<$ Δ $<$ -63. Donc Δ $<$ 0.

Ainsi f est strictement décroissante sur [2.5 ; 3]. Et puisque

f(3)= -27 $<$ 0 et f(2.5) = 5.21 $>$ 0,d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f(x)=0 admet une unique solution dans [2.5 ; 3].

-dans [13 ; 13.5].

Egalement, f est continue sur [13 ; 13.5] et par suite,

pour tous x, y dans [13 ; 13.5],

$\Delta = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$= \frac{\frac{1}{3}y^3-72y+180-\frac{1}{3}x^3+72x-180}{y-x}$

$= \frac{(y-x)[\frac{1}{3}(y^2+yx+x^2)-72]}{y-x}$

$= \frac{1}{3}(y^2 + yx + x^2) - 72.$

Et comme on a :

13 $\leq$ x $\leq$ 13.5 et 13 $\leq$ y $\leq$ 13.5, il vient que 97 $<$ Δ $<$ 110.25. Ce qui montre que Δ $>$ 0.

D'où f est strictement croissante dans [13 ; 13.5]. Par ailleurs, f(13.5)= 28.13 $>$ 0 et f(13) = -23.67 $<$ 0.Toujours en raison du théorème des valeurs intermédiaires, f(x)=0 admet une unique solution dans [13 ; 13.5].

* Déterminons à 10^{-3} près la solution de l'équation précédente dans [2.5 ; 3].

Nous allons le faire en procèdent par deux méthodes.

- Méthode par balayage

On choisit un "pas" et on procède à un balayage systématique de l'intervalle [2.5 ; 3].

Posons α cette solution.

On a f(2.5) = 5.21 et f(2.6)= -1.34. Donc $\alpha \in$ [2.5 ; 2.6].

Pour un pas de 0.001, on calcule f(2.501) ; f(2.502) ; ... ; f(2.509).

On obtient alors : f(2.501) = 5.14 ; f(2.502) = 5.08 ; ... ; f(2.5O9) = 4.62 ;

f(2.511)= 4.49 ; ... ; f(2.579)= 0.03 ; f(2.580)= -0.04 ; ... f(2.599)= -1.28.

On peut alors remarquer que $\alpha \in$ [2.579 ; 2.580].

Donc 2.579 et 2.580 sont respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès, à 10^3 près de α.

- Méthode par dichotomie

On a $\alpha \in$ [2.5 ; 2.6] ; on choisi x_0 le milieu de [2.5 ; 2.6].

Alors $x_0 = \frac{2.6+2.5}{2} = 2.55$;

f(x_0) = 1.93 ; f(2.5)= 5.21 et f(2.6)= -1.34.

D'où on observe que $\alpha \in$ [2.55 ; 2.6] et |2.55-2.6|= 0.05 > 0.001.

Donc on reprend le processus avec l'intervalle [2.55 ; 2.6].

Posons x_1 le milieu de [2.55 ; 2.6]. Alors $x_1 = \frac{2.6+2.55}{2} = 2.575$

f(2.575) = 0.29 ; f(2.55) = 1.93 et f(2.6) = -1.34.

D'où $\alpha \in$ [2.575 ; 2.6] et |2.6-2.575| = 0.025 > 0.001

On poursuit l'algorithme, jusqu'à obtenir $\alpha \in [a_n ; b_n]$ avec $|a_n$-$b_n| < 0.001$.

D'après la question (2), le rayon de la boule vérifie l'équation suivante :

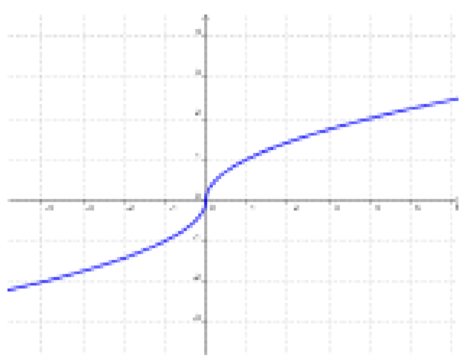
En égalant les deux expressions du volume de la boule, on obtient :

144 $\times$ π $\times$ $(2 \times R)^3$ - 720 π = $\frac{4}{3} \times \pi \times R^3$.

Ce qui en simplifiant donne l'équation voulue.

Exercice 2 :

Représentons tout d'abord graphiquement f.



package/fig29.png

(1) Calculons la limite de f en 0.

f peut encore se définir de la manière suivante :

f(x) = $\sqrt{x}$ si x > 0

f(x) = - $\sqrt{-x}$ si x < 0

f(0) = 0

Ainsi, f est coïncide sur]0 ; +∞[avec la fonction t : x $\mapsto \sqrt{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Alors, $\lim_{x\to 0^+}$ f(x) = t(0) = 0.

Par ailleurs, f coïncide sur]- ∞ ; 0[avec la fonction q : x $\mapsto$ - $\sqrt{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^-$.

Alors $\lim_{x\to 0^-}$ f(x) = q(0) = 0.

Il résulte donc de ces deux résultats que $\lim_{x\to 0}$ f(x) = 0.

(2) Démontrons que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que x < y.

- Si x et y sont tous deux strictement positifs, alors f(x) < f(y), puisque f coïncide sur]0 ; +∞[avec t qui est strictement croissante.

- Si x et y sont tous deux négatifs, alors f(x) < f(y) car on a :

x < y implique -y < -x . la fonction racine carrée étant croissante, on obtient par la suite :

$\sqrt{-y} < \sqrt{-x}$. Et ensuite on a -$\sqrt{-x}$ < -$\sqrt{-y}$.

- Si x et y sont de signes contraires, donc x est négatif et y est positif. Alors f(x) = - $\sqrt{-x}$ et f(y) = $\sqrt{y}$. D'où f(x) < 0 et f(y) > 0. il en résulte donc que f(x) < f(y).

On a ainsi pour tous les cas ∀ x, y ∈ $\mathbb{R}$, x < y ⇒ f(x) < f(y). C'est-à-dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(3) Vérifions que la fonction réciproque de f est la fonction x $\longmapsto$ |x|x.

f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ vers f($\mathbb{R}$)= $\mathbb{R}$.

Donc f admet une fonction réciproque de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, on sait que f^{-1} est la fonction telle que :

f ∘ f^{-1}(x) = x et f^{-1} ∘ f (x) = x, pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Vérifions cela !

pour tout x élément de $\mathbb{R}^*$, on a :

f ∘ f^{-1}(x)= $\frac{||x|x|}{|x|x}\sqrt{||x|x|} = \frac{|x|}{|x|}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x||x|} = \frac{|x|}{x}|x| = \frac{|x|^2}{x}$ = x.

f^{-1} ∘ f (x) = $|\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}|\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$

$= \frac{|x|}{|x|}\sqrt{|x|}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} = \frac{x^2}{x}$ = x.

Ainsi nous pouvons conclure que la fonction définie par : x $\longmapsto$ |x|x est la fonction réciproque de f.

Bibliographie

[1] Mathématique première SE : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.

[2] Mathématique première SM : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.

[3] Mathématiques terminale SM : CIAM ;EDICEF. limites et continuité.

[4] Mathématiques terminale C et E :M. Monge, M-C Audouin-Ergoroff F. Lemaire- Body, Tome 2 : BERLIN. Limites et continuité

[5] Mathématiques terminale C et E :ANALYSE, collection"Fractale", Bordas

http://www.google.fr