Dérivabilité d'une fonction numérique de variable réelle

Nom de L'étudiant:
Nguele Mve François Landry

Nom de l'encadreur de l'ENS: Professeur Diffo Lambo Lawrence

Nom de l'inspecteur: Mounchingam Abdou Salam

Nom de l'encadreur du Lycée: Tchokona Donatien

Yaoundé, le 31 octobre 2013

Objectifs pédagogiques

a. Objectif pédagogique général
   A la fin de cette ressource, l'élève doit être capable de savoir statuer sur la dérivabilité et calculer le nombre dérivé lorsque la fonction peut être décomposée comme somme, produit, rapport de fonction dérivable ou comme réciproque d'une fonction dérivable.

   Les compétences attendues sont :

b. Objectif pédagogique spécifique premier
   -Définir la dérivabilité d'une fonction en un point ainsi que le nombre dérivé en ce point.
c. Objectif pédagogique spécifique second
   -Savoir prouver que si une fonction est dérivable en un point alors elle est continue.
d. Objectif pédagogique spécifique troisième
   -Savoir interpréter graphiquement le nombre dérivé ou la dérivée en un point.
e. Objectif pédagogique spécifique quatrième
   -Maitriser l'étude de la dérivabilité à gauche et à droite en un point.
f. Objectif pédagogique spécifique cinquième
   -Savoir étudier la dérivabilité d'une fonction et calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point dans le contexte où il suffit de la décomposée comme somme, rapport, produit, ou composée de fonctions connues ou si elle peut être vue comme la réciproque d'une fonction connue.

Introduction

a. Pour étudier cette ressource l'élève doit être familier avec l'étude de la continuité d'une fonction (voir la ressource sur la continuité). L'élève a besoin d'avoir compris cette ressource avant de s'intéresser à la prochaine ressource sur la fonction dérivée ainsi qu'à la ressource sur les applications de la fonction dérivée.

b. L'étude de la dérivabilité d'une fonction nous permet d'avoir des précisions sur le tracé de la courbe. Elle permet de voir si cette dernière admet une tangente à gauche ou à droite. En outre, la notion de dérivabilité joue un rôle important en sciences physiques où elle formule la notion de vitesse instantané d'un mobile, la notion d'intensité pour un courant électrique, de densité linéique, en géographie du débit instantané d'un fleuve. Une partie de la ressource sera consacrée à l'utilisation de la dérivabilité en sciences physiques, en géographie, en économie.

Pré-requis

a. Pour aborder ce cours avec succès, il importe que l'apprenant ait des connaissances sur les notions suivantes.
-Le taux d'accroissement.
-Le calcul des limites.
-L'étude de la continuité des fonctions.

b. Afin de tester le niveau de compétence des apprenants, nous proposons la grille d'exercices suivante :

Exercices de révision
Exercice 1 Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.

(a) $A(2;5)$ et $B(-1;6)$
(b) $A(-2;3)$ et $B(-\frac{3}{2};4)$
(c) $A(0;2)$ et $B(3;\frac{1}{4})$
(d) $A(-\frac{7}{3};1)$ et $B(\frac{1}{3};4)$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-5x+4)$
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x+1)$
(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-6x^2)$
(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^3+x^2-1)$

Exercice 3 Calculer les limites en$-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes.

(a) $x \mapsto \frac{x^4-2x+5}{3x^4+1}$
(b) $x \mapsto \frac{x-3}{-3x^2+1}$

Exercice 4 Utiliser les fonctions composées pour calculer les limites suivantes

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}$
(b) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$
(c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3x-\pi}$

Exercice 5 Démontrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$

(a) $x \mapsto \tan(\frac{x^2-1}{x^2+1})$
(b) $x \mapsto \frac{x^2-2x}{x^2+3}$
(c) $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
(d) $x \mapsto x^2-3x+5$

Table des matières

1 Rappel : Étude de la monotonie de fonction à partir d'une notion abordée en classe de Première

1.1 Activités de rappels et de révision

On considère une fonction numérique de variable réelle f définie sur un intervalle contenant les réels a et b, $a \neq b$.
On veut étudier la variation de f par rapport à la variation de x qui passe de a à b. Pour cela, on calcule le rapport $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qui est appelé taux d'accroissement entre a et b.

activité 1
Soit la fonction f définie par $y = f(x) = x^3$. Trouver le taux d'accroissement entre 1 et 3, puis entre 2 et 4.

$$\Delta_f(a,b) = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^3-1^3}{3-1} = 13$$
$$\Delta_f(a,b) = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{4^3-2^3}{4-2} = 28$$

Remarque On remarque que quand la variable a augmenté, la valeur augmente aussi. La variation de la variable, c'est la valeur finale moins la valeur initiale.
Ici, la variation passe de 1 à 3 donc connait une variation égale à $3-1=2$ alors que la valeur de $f(x)$ passe de 1 à 27 donc connait une augmentation de $27-1=26$. La variation de la variable et la variation de la valeur de la fonction ont le même signe positif, cela prouve que les valeurs ont augmentés simultanément.
Le rapport indique l'intensité de l'augmentation de la valeur comparée à l'augmentation de la variable.
Dans le premier cas, le calcul du taux d'accroissement nous donne 13, cela signifie que l'augmentation est 13 fois plus grande que la variable x.
Dans le second cas, la variation passe de 2 à 4, soit connait une variation de $4-2=2$ alors que la valeur de $f(x)$ passe de 8 à 64.
le calcul du taux d'accroissement vaut 28, cela prouve que l'augmentation est 28 fois plus grande que la variable$x$.
En guise de synthèse, nous obtenons le tableau de valeurs suivant :

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	8	27	64

Activité 2
Soit la fonction $f(x) = x^2$.
Considérons a et b deux réels tels que $b > a$.
Calculer le taux d'accroissement $\Delta_f(a,b)$ et simplifier le rapport obtenu.
(On montrera que ce rapport est toujours strictement positif pour chaque a et b appartenant à $\mathbb{R}_+$.
Le calcul de $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ nous donne $a+b$.

1. Sachant que a et b sont tous positifs, quel est le signe de $\Delta_f(a,b)$?
2. En déduire que si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ $\forall a, b \in D_f$ avec $a \neq b$

1.1.1 Propriétés

Une fonction f est croissante (respectivement strictement croissante) sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, on a $f(b) - f(a) \geq 0$ (respectivement, on a $f(b) - f(a) > 0$). On peut dire également qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, nous avons $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$.

Une fonction f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, on a $f(b) - f(a) \leq 0$ (respectivement, on a $f(b) - f(a) < 0$). On peut dire également qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, nous avons $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$.

Une fonction f est constante sur un intervalle I si et seulement si $\forall a, b \in I$ avec $a < b$, on a $f(b) - f(a) = 0$. On peut dire également qu'une fonction f est constante sur un intervalle I si $\forall a, b \in I$, nous avons $\Delta_f(a,b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Activité
Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.
Étudier la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Soit a,b deux réels tel que $a < b$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{2(b^2 - a^2) + 3(b - a)}{b - a} \\
&= \frac{(b - a)[2(b + a) + 3]}{(b - a)} \\
&= 2(b + a) + 3
\end{aligned}$$

Le taux d'accroissement est $\Delta_f(a,b) = 2(b + a) + 3$
Discutons suivant les valeurs de a et b du signe de $\Delta_f(a,b)$.
Si a et b sont des réels strictement positifs, alors $\Delta_f(a,b) = 2(b + a) + 3 > 0$.
Supposons que $b + a < -\frac{3}{2}$
Si de plus $a > -\frac{3}{2}$ et $b < 0 \Longleftrightarrow \forall a, b \in]-\frac{3}{2}; 0[$ alors $\Delta_f(a,b) > 0$
Si $b < -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \forall a, b < -\frac{3}{2}$ alors $\Delta_f(a,b) < 0$.
Si $a = -\frac{3}{2}$ et $b = 0$, alors $\Delta_f(a,b) = 0$.
Cette étude, nous a permis de réfléchir sur les intervalles dans lesquels
$\Delta_f(a,b) < 0$ et $\Delta_f(a,b) > 0$.
Il en ressort que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\frac{3}{2}; +\infty[$

Exercice d'application Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$

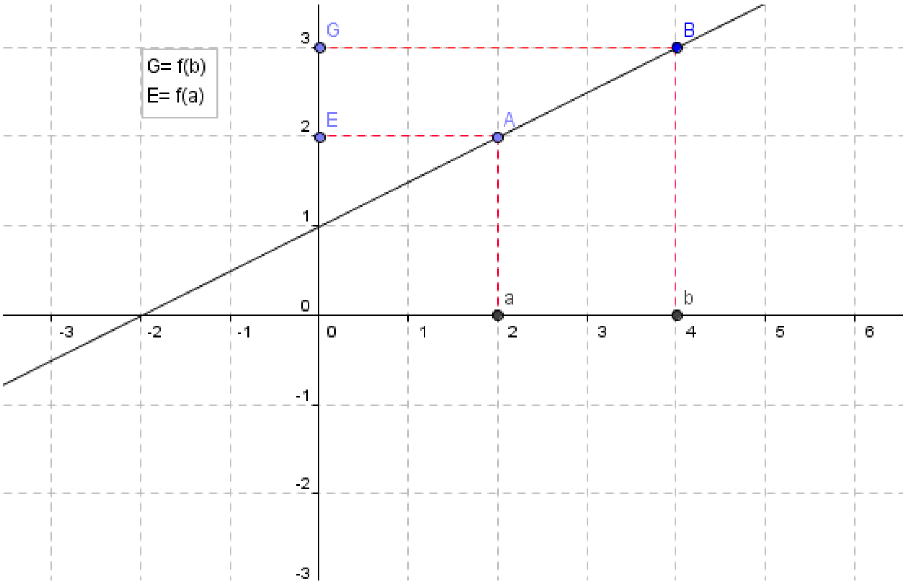
1. Déterminer le coefficient directeur de la droite définie par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$
2. Calculer le taux d'accroissement et le comparer avec le coefficient directeur.
3. En supposant que le taux d'accroissement est égal au coefficient directeur et en faisant tendre x vers a, y' a t-il une limite ?

1.1.2 cas d'une fonction affine : coefficient directeur

Soit $y = f(x) = mx + \lambda$ avec m= coefficient directeur(constante) ; λ= constante. Quelque soit le choix de a et b dans $\mathbb{R}$, $a \neq b$.

$$\Delta_f(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = m$$

$$\Delta_f(a,b) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$



Notez Bien ! Dans la suite, pour certaines activités nous posons $b = a + h$ et nous désignons par $T_{(a)}(h)$ dans ce cas, le taux d'accroissement entre a et $a + h$.

2 Dérivabilité d'une fonction numérique de variable réelle

2.1 Initiation à la notion de dérivabilité

Dans un esprit d'interdisciplinarité, nous avons pensé à d'autres disciplines.

activité 1 Le débit instantané d'un fleuve
Le Cameroun, nous le savons, est une Afrique en miniature à cause de son aspect géographique. L'Afamba est un fleuve situé dans la région du centre Cameroun. En un point de ce fleuve que nous considérons comme barrière, nous décidons d'évaluer la quantité d'eau ayant traversée cette barrière entre deux instants t_1 et t_2, t_1 étant pris comme instant initial. On note $v(t_1)$ et $v(t_2)$ les volumes d'eau ayant traversé notre barrière aux différentes dates t_1 et t_2.

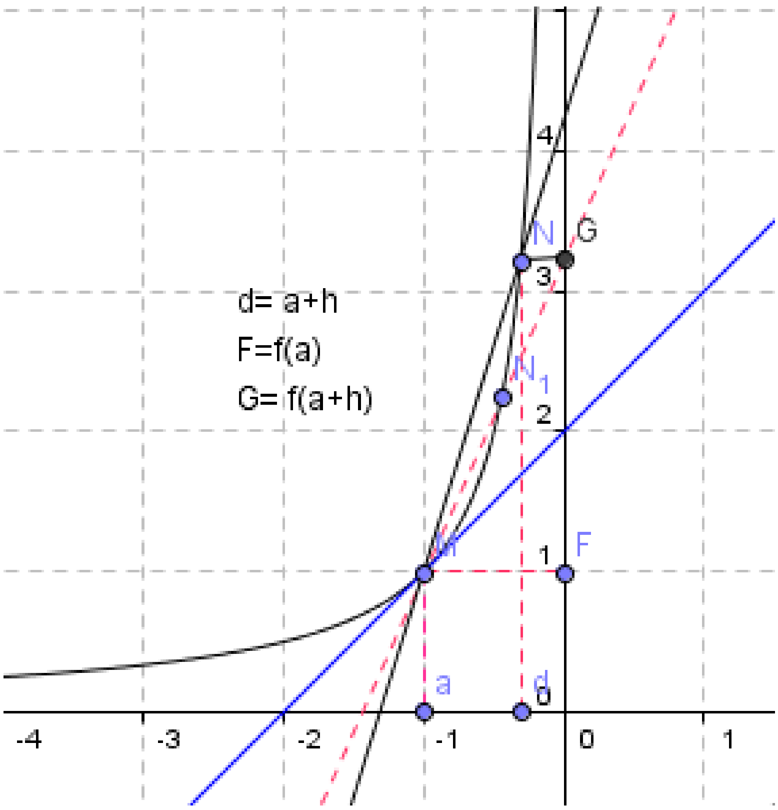
1. Exprimer le taux d'accroissement ou débit moyen.
2. Que nous suggère le calcul de la limite du taux d'accroissement lorsque t_2 tend vers t_1 ?

activité 2 Densité linéique en un point "a".
Considérons un fil d'une certaine longueur de masse négligeable. Notons O l'origine du fil et M un point quelconque d'abscisse x distant d'un mètre de l'origine O. Avec de la fine poudre de mais, on saupoudre la longueur de fil située entre les points O et M. Désignons par A un point

d'abscisse a intérieur au segment $[OM]$
On note $f(x)$ la quantité de poudre qui s'étale entre l'origine O et le point M d'abscisse x, $f(a)$ la quantité de poudre qui s'étale entre l'origine O et le point A d'abscisse a, par suite la quantité $f(x) - f(a)$ représente la quantité de poudre qui s'étale entre les points M et A d'abscisses respectives x et a.

1. Exprimer le taux de d'accroissement.
2. Que nous suggère le calcul de la limite du taux d'accroissement lorsque x tend vers "a" ?.

activité 3 Représentation graphique
On considère une fonction numérique de variable réelle f définie sur un intervalle I non vide et ouvert contenant le réel a. On pose $T_{(a)}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ avec $h \in \mathbb{R}^*$.
Considérons les points $M(a; f(a))$ et $N(a+h; f(a+h))$. $T_{(a)}(h)$ est le coefficient directeur ou la pente de la droite (MN) : La limite de ce rapport noté $\lim\limits_{h \to 0} T_{(a)}(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ nous indique la valeur limite du coefficient directeur de la droite (MN) lorsque h tend vers 0, c'est à dire lorsque N se rapproche de M.



activité 4 Intensité instantanée et puissance instantanée du courant électrique
Le tube cathodique est un outil indispensable lors de la réalisation d'expériences en sciences physiques, en ce sens qu'il favorise le déplacement accélérer d'électrons le long d'un câble électrique. A l'aide d'un tube cathodique et à partir d'une section de notre câble, assimilable à une barrière, aux instants t_1 et t_2 " suffisamment proche", nous enregistrons les quantités de charge $q(t_1)$ et $q(t_2)$ (respectivement $W(t_1)$ et $W(t_2)$ les quantités d'énergies électriques) ayant traversé notre barrière à ces dates. Par suite, rappelons que l'intensité est le quotient de quantité d'électricité qui traverse une section du câble par la durée de cette traversée et que la puissance électrique consommée par effet joule est le quotient de la quantité d'énergie qui traverse le câble par la duré de cette traversée.

t	t_1	t_2
$q(t)$	$q(t_1)$	$q(t_2)$
$W(t)$	$W(t_1)$	$W(t_2)$

1. Que représente les expressions $\dfrac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1}$? et $\dfrac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1}$?
2. Que suggère le calcul de $\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{q(t_2)-q(t_1)}{t_2-t_1}$? et $\lim\limits_{t_2\to t_1}\dfrac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1}$?
3. Conclure.

activité 5 Vitesse moyenne et vitesse instantanée. []

Une mangue située à $28m$ du sol, en un point 0 se détache du manguier. La distance parcourue par la mangue à la date t est $d(t)=5t^2+2t$, l'unité de temps est la seconde, l'unité de longueur est le mètre.

On conçoit que la mangue en mouvement possède, à chaque instant de date t, une vitesse dite vitesse instantanée. Le problème est de définir et de calculer quelques vitesses. A la date $t=1$ par exemple, nous la noterons $v(1)$ calculer cette vitesse à la date $t=1$ par exemple, nous la noterons $v(1)$. Il apparait qu'une bonne approximation de $v(1)$ s'obtiendra en calculant la vitesse moyenne de la mangue entre les dates $t=1$ et $t=1+h$ pour une valeur de h, proche de zéro par valeur positive ou par valeur négative. On rappelle que la vitesse moyenne entre les dates t et $t+h$ est :$\dfrac{d(t+h)-d(t)}{h}$.

1. (a) Calculer les vitesses moyennes entre les dates 1 et $1+h$ lorsque : $h=-0,1$; $h=-0,01$; $h=0,01$ et $h=0,1$.

   Soit v_m la vitesse moyenne entre les dates 1 et $1+h$, on a :

$$\begin{aligned} v_m=\frac{d(1+h)-d(1)}{h} &= \frac{5(1+h)^2+2(1+h)-5-2}{h}\\ &= \frac{5h^2+12}{h}\\ &= 5h+12 \end{aligned}$$

   Si $h=-0,1$, on a : $v_m=11m/s$
   Si $h=-0,01$, on a : $v_m=11,95m/s$
   Si $h=0,01$, on a : $v_m=12,05m/s$
   Si $h=0,1$, on a : $v_m=13m/s$

   En continuant le calcul des vitesses pour des valeurs de h de plus en plus proche de 0, on peut obtenir des approximations meilleures de $v(1)$. Mais aucune de ces valeurs n'est la valeur exacte de la vitesse instantanée à la date $t=1$, car cette vitesse doit évidemment être exprimée par un seul nombre. La façon d'y parvenir est de dire que $v(1)$ est la limite de la fonction $h\mapsto\dfrac{d(1+h)-d(1)}{h}$ en 0.

   (b) Calculer $v(1)$
   En effet,

$$v(1)=\lim_{h\to 0}\frac{d(1+h)-d(1)}{h}=12$$

La vitesse à l'instant $t = 1$ est $v(1) = 12\ m/s$

2. (a) Calcul de quelques vitesses instantanées. H est le point tel que $OH = 24m$. Calculer la vitesse instantanée de la mangue lors de son passage en H.
Déterminons la date à laquelle la mangue passe au point H tel que $OH = 24m$
$d(t)$ étant la distance parcourue, on pose : $d(t) = 24$

$$\begin{aligned} d(t) = 24 \;&\Leftrightarrow\; 5t^2 + 2t - 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow\; (5t+12)(t-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; t = -\frac{7}{5} \;\; ou \;\; t = 2 \end{aligned}$$

La mangue passe au point H à l'instant $t = 2$ car $d(2) = 24$.
La vitesse à $t = 2$ s'obtient en effectuant : $v(2) = \lim_{h\to 0} \dfrac{d(2+h) - d(2)}{h} = 22$
La vitesse au point H est donc $v(2) = 22\ m/s$.

(b) Quelle est la vitesse instantanée de la mangue à l'instant où elle atteint le sol ?
La résolution de l'équation $d(t) = 28$, nous permet d'avoir $t = \dfrac{13}{5} = 2,6s$
La vitesse lorsqu'elle atteint le sol est :

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(2,6+h) - d(2,6)}{h} = 28$$

Donc la vitesse vaut : $v(2,6) = 28\ m/s$

2.1.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On note $T_{(a)}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ avec $h \in \mathbb{R}^*$. Lorsque $T_{(a)}(h)$ admet une limite finie l en 0, on dit que f est dérivable en a.

2.1.2 Propriété :

Une fonction f est dérivable en a si et seulement si la limite suivante existe et est finie, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, Sa valeur l est alors appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

2.1.3 Vocabulaire

La quantité $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ s' appelle Taux d'accroissement moyen de f entre a et $a + h$ ou encore Taux de variation ou tout simplement Taux d'accroissement selon les ouvrages. Dans le même ordre, le nombre dérivée est parfois substituer par le terme "fonction dérivée en un point".

Exemple 1 Soit la fonction définie par $f(x) = 2$. Calculons la dérivée au point d'abscisse a.
Nous avons :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2-2}{h} = 0$$

Il en résulte qu'une fonction constante est dérivable et sa dérivée est nulle.

Exemple 2 Soit la fonction définie par : $h(x) = mx + \lambda$ où m et λ sont des constantes. Étudions la dérivabilité au point d'abscisse a.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{mx+\lambda-ma-\lambda}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{m(x-a)}{x-a}\\ &= m\end{aligned}$$

La fonction h est dérivable au point a et $f'(a) = m$.

Exemple 3 Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 7$.
Cette fonction est elle dérivable en $a = 2$? Pour le savoir, évaluons la limite de la quantité suivante.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(2+h)^3-7-2^3+7}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12+6h+h^2$$

D'où $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 12$. f est dérivable en $a = 2$, son nombre dérivé en 2 est $f'(2) = 12$.

Exemple 4 Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Étudions la dérivabilité aux points d'abscisses $a = 2$ et $a = \frac{5}{2}$
Pour $a = 2$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}(x-3)\\ &= -1\end{aligned}$$

Pour $a = \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{5}{2})}{x-\frac{5}{2}}\\ &= \lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{x^2-5x+6-\frac{1}{4}}{(x-\frac{5}{2})}\\ &= \lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{x-\frac{5}{2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction f est dérivable aux points d'abscisses $a = 1$, $a = \frac{5}{2}$ car $f'(2) = -1$ et $f'(\frac{5}{2}) = 0$.

Exemple 5 Étudions la dérivabilité au point d'abscisse $a = 1$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{x-1}-f(1)}{(x-1)}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

La limite est infinie, donc la fonction f n'est pas dérivable au point d'abscisse 1.

Exercices d'application Dire si les fonctions suivantes sont dérivables dans $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$
2. $g(x) = x^2 - 3x + 2$
3. $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

activité

Soit la fonction $f(x) = xE(x)$ où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.
Étudions la dérivabilité au point d'abscisse 1 par valeur inférieur.
On a : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{xE(x)-1}{x-1} = -\infty$
La fonction $x \mapsto xE(x)$ n'est pas dérivable en 1^-
Toutefois, remarquons que :

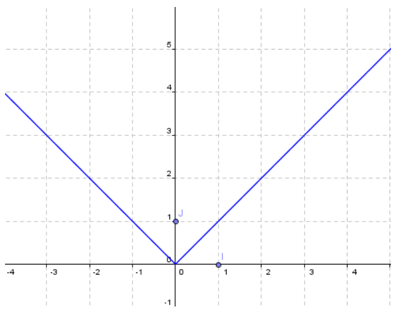
$$\lim_{x\to 1^-} xE(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} xE(x) = 1$$

Ce qui nous permets d'affirmer que la fonction $x \mapsto xE(x)$ n'est pas continue au point d'abscisse 1.
En guise de conclusion, cette étude nous a permis de dire qu'une fonction non continue n'est pas toujours dérivable.

Remarque : Toute fonction dérivable en un réel a y est continue, la réciproque est fausse.

Exemple : La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0. Sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ n'admet pas de tangente au point d'abscisse 0.



Exercice d'application Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions $h(x) = \sqrt[3]{x}$ et $k(x) = \sqrt{x}$ à l'origine 0.

3 Interprétation graphique du nombre dérivé

activité

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

1. Construire sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.
2. En remarquant qu'il s'agit d'une parabole, déterminer son sommet et les points d'intersection avec l'axe des abscisses.
3. Soient $M(a; f(a))$ et $N(a + h; f(a + h))$, tracer la droite $(MN) = (\mathcal{D})$ pour $h = 1$.
4. Calculer le coefficient directeur de la droite (MN).
5. Calculer le taux d'accroissement $T_{(a)}(h)$.
6. Lorsque h varie la droite pivote autour du point a, représenter les positions des valeurs pour $h = 0.02, h = 0.04, h = 0.06, h = 0.08$
7. Calculer la limite du coefficient directeur quand h tend vers 0.
8. Tracer la droite qui passe par le point $M(a; f(a))$.
9. Que remarquez vous ?

3.1 Définition et description

3.1.1 Définition

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite reliant les points $M(a; f(a))$ et $N(a + h; f(a + h))$.
Si $T_{(a)}(h)$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a, auquel cas le nombre dérivé de f en a est égal à la limite du taux d'accroissement.

3.1.2 Caractéristiques analytiques

En analyse, le nombre dérivé nous donne de précieuses informations sur le comportement local d'une fonction : C'est la mesure algébrique de la vitesse à laquelle cette fonction change lorsque sa variable change. Ce réel, le nombre dérivé, lorsqu'il existe et qu'il est positif sur un intervalle, indique que cette fonction sera croissante sur ce même intervalle. Inversement, s'il est négatif, elle sera décroissante. Lorsque le nombre dérivé est nul en un point, la courbe admet une tangente horizontale en ce point.

3.1.3 Interprétation géométrique du nombre dérivé

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d' une fonction f dérivable. On considère les points $M(a; f(a))$ et $N(a + h; f(a + h))$ le coefficient directeur de la droite (MN) vaut :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point N s'approche du point M (lorsque h tend vers 0), le coefficient directeur ou pente de la droite (MN) devient tangente à la courbe $(\mathcal{C})$.

Il vient que la droite (MN) a pour équation :

$$y = (\frac{f(a+h)-f(a)}{h})(x-a)+f(a)$$

Lorsque $h \to 0$, on a $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$. Cette équation cartésienne de la droite (MN) peut aussi s'écrire, $(\mathcal{D})$:

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

activité

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x^2-1|$. Étudions la dérivabilité au point d'abscisse $a = 1$.
Écriture de $f(x)$ sans symbole de valeurs absolues.
Deux cas sont à envisager.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) = \|x^2-1\|$		x^2-1	0	$-(x^2-1)$	0	x^2-1	

Premier cas :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{-x-1} = \lim_{x\to 1^-}(-x-1) = -2$$

Deuxième cas :

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

Nous avons deux valeurs finies et différentes au point d'abscisse $a = 1$.
Comment expliquer ce résultat ?

4 Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

activité 1

Sur l'axe routier Yaoundé-Bafoussam que nous assimilerons à une route rectiligne, deux voitures A et B de masses respectives M_A et M_B évoluent en sens contraire et se rencontrent violemment au lieu dit Ebebda à l'instant $t_0 = 13h$.
On suppose que les deux voitures ont des vitesses constantes, la voiture A est orienté de Yaoundé vers Bafoussam avec une vitesse V_A alors que la voiture B est orienté de Bafoussam vers Yaoundé avec une vitesse V_B. Nous supposons que le choc n'est pas élastique et qu'après le choc les deux véhicules A et B rentrent en sens contraire avec des vitesses respectives W_A, W_B
Le problématique de cette activité est de comprendre que les positions des véhicules A et B ne sont pas définies à l'instant $t_0 = 13h$ mais également la non dérivabilité de leurs positions à cet instant précis.

1. Décrire le mouvement des voitures avant et après le choc sachant qu'on exclut le cas d'accrochage et le cas où ils dérapent .

2. La résolution de la question portant sur la détermination des différentes vitesses avant et après le choc, impose que nous prenions en compte les notions portant sur la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie cinétique abordées dans le programme de sciences physiques des classes de Seconde scientifique.
   Avant le choc
   Les quantités de mouvement respectives des corps A et B s'écrivent :

$\vec{P_A} = M_A\vec{V_A}$ et $\vec{P_B} = M_B\vec{V_B}$.
Les énergies cinétiques respectives des corps A et B valent :
$E_A = \frac{1}{2}M_AV_A^2$ et $E_B = \frac{1}{2}M_BV_B^2$
Après le choc
En tenant compte du fait que le sens de déplacement du véhicule A soit le sens positif, la conservation de la quantité de mouvement donne :
$M_A\vec{V_A} + M_B\vec{V_B} = M_A\vec{W_A} + M_B\vec{W_B}$
Par projection, on a : $M_AV_A - M_BV_B = -M_AW_A + M_BW_B$
La conservation de l'énergie cinétique après le choc s'écrit :
$\frac{1}{2}M_AV_A^2 + \frac{1}{2}M_BV_B^2 = \frac{1}{2}M_AW_A^2 + \frac{1}{2}M_BW_B^2$
Exprimer les nouvelles vitesses acquises W_A et W_B par les deux véhicules après le choc en fonction de M_A, M_B, V_A et V_B.

3. On suppose que $W_A = \dfrac{2M_BV_B + (M_B - M_A)V_A}{(M_A + M_B)}$ et $W_B = \dfrac{2M_AV_A + (M_A - M_B)V_B}{(M_A + M_B)}$, il est donc clair que W_A est différent de V_A et également W_B est différent de V_B car la vitesse à l'aller ne saurait être la même après la collision. Il nous vient donc de définir pour le cas du véhicule A, par exemple la fonction :

$$x(t) = \begin{cases} V_A & \text{si } \ t < 13 \\ W_A & \text{si } \ t > 13 \end{cases}$$

Par suite, il s'ensuit donc que :

$$\lim_{t\to 13^-} \frac{x(t) - x(13)}{t - 13} = V_A$$

et que

$$\lim_{t\to 13^+} \frac{x(t) - x(13)}{t - 13} = W_A$$

En guise de conclusion, notre analyse nous indique que : la position de chaque voiture n'est pas définie à $t_0 = 13h$ mais aussi que, les positions de ces deux véhicules ne sont pas dérivables à la date $t_0 = 13$.

Notez Bien ! Puisque $T_{(a)}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ où $h \in \mathbb{R}^*$, nous distinguons deux cas à savoir : le cas $h \in \mathbb{R}_-^*$ et le cas $h \in \mathbb{R}_+^*$.

4.1 Dérivabilité à gauche

4.1.1 Définition

Soit f une fonction définie en a et K un intervalle de la forme $]a-\varepsilon; a]$. On dit que f est dérivable à gauche en a si $h \in \mathbb{R}_-^*$ et $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. C'est le nombre dérivé à gauche en a, on le note $f'_g(a)$ ou $f'(a^-)$ ou $f'(a_<)$.

Remarque : Si f est dérivable à gauche en a alors f admet une demi-tangente à gauche en a d'équation cartésienne

$$y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$$

avec $x \leq a$.

Exemple : Soit h la fonction définie par $h(x) = x^2 - 1$.
Étudions la dérivabilité à gauche en 1.

On a
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$
La courbe représentative $(\mathcal{C}_h)$ de la fonction h admet une demi-tangente à gauche en 1, de nombre dérivé à gauche 2. Autrement dit, h est dérivable à gauche en 1 de nombre dérivé à gauche 2. L'équation de la demi-tangente à gauche en 1 s'écrit,
$$(\mathcal{T}_g) : y = 2x - 2$$

4.2 Dérivabilité à droite

4.2.1 Définition

Soit f une fonction définie en a et K un intervalle de la forme $[a; a+\varepsilon[$. On dit que f est dérivable à droite en a si $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. C'est le nombre dérivé à droite en a, on le note $f'_d(a)$ou $f'(a^+)$ ou $f'(a_>)$.

Remarque : Si f est dérivable à droite en a alors f admet une demi-tangente à droite en a d'équation cartésienne
$$y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$$
avec $a \leq x$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $[0; +\propto[$ par $f(x) = x^2$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

Étudier la dérivabilité à droite en 0 :
On a '
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$
La courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente à droite en 0, de nombre dérivé à droite en 0. Autrement dit , f est dérivable à droite en 0, de nombre dérivé à droite 0. L'équation de la demi-tangente à droite en 0 s'écrit,
$$(\mathcal{T}_d) : y = 0$$

Remarque En un réel a, il peut arriver qu'on ne puisse pas faire une étude à droite et à gauche de a.

Exemple : Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 1}$
Étudier la dérivabilité de cette fonction en $a = -1$. Le domaine de définition de la fonction est $D_f = [-1; +\propto[$
Il s'agira ici d'étudier la dérivabilité en -1 par valeur supérieure.

4.2.2 Théorème

Soit I un intervalle ouvert et a un point de I. La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$.

activité 2
Étudier la dérivabilité en $a = 1$ de la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin(\pi x) & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité à gauche en 1. On a :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^1} \frac{(1 + sin(\pi x)) - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{sin(\pi x)}{x - 1} = -\pi$$

Étudions la dérivabilité à droite en 1. On a :

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$$

la fonction f n'est pas dérivable en $a = 1$

activité 3
Étudier la dérivabilité en $a = 0$ de la fonction définie par :$g(x) = x|x|$
Pour $x < 0$
On a $|x| = -x$, L'équation devient : $g(x) = -x^2$

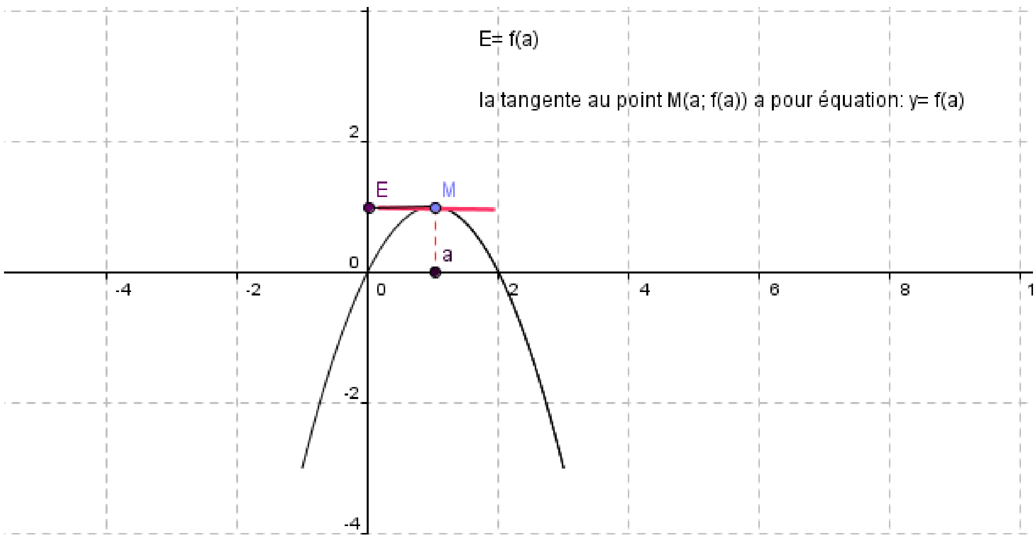
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = 0 = g'_g(0)$$

Pour $x > 0$
On a $|x| = x$, L'équation devient : $g(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 0}{x} = g'_d(0)$$

La limite à gauche est égale à la limite à droite. La fonction $g(x) = x|x|$ est dérivable en 0 et le nombre dérivé $g'(0)$ vaut 0.

Illustration d'une tangente horizontale $\lim_{h \to 0} T_{(a)}(h) = 0$ ce qui implique que la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour tangente la droite d'équation : $y = f(a)$



Exemple Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 1$. On a :

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 2 - 1}{x - 1} = 0$$

La courbe représentative de la fonction f admet au point d'abscisse $a = 1$ une tangente d'équation cartésienne : $y = 1$.

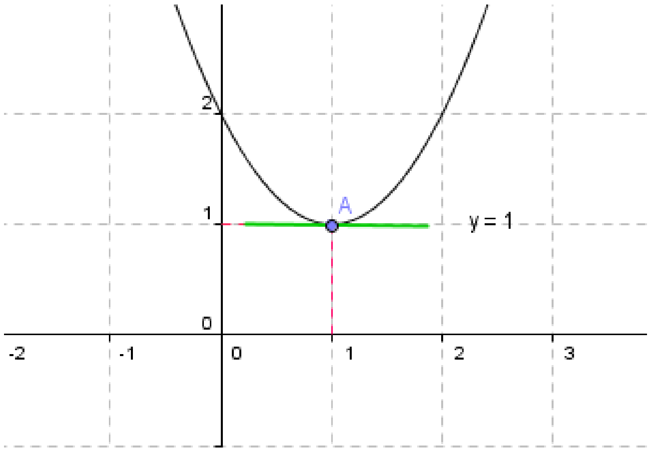
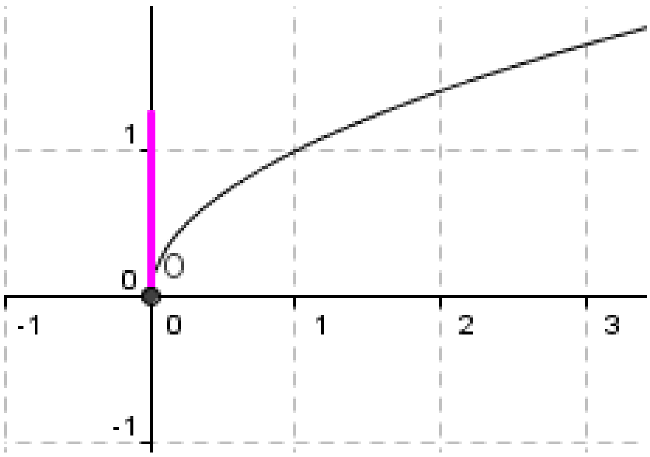


Illustration d'une tangente verticale $\lim_{h \to 0} T_{(a)}(h) = \infty$ ce qui implique que la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour tangente la droite d'équation $x = a$

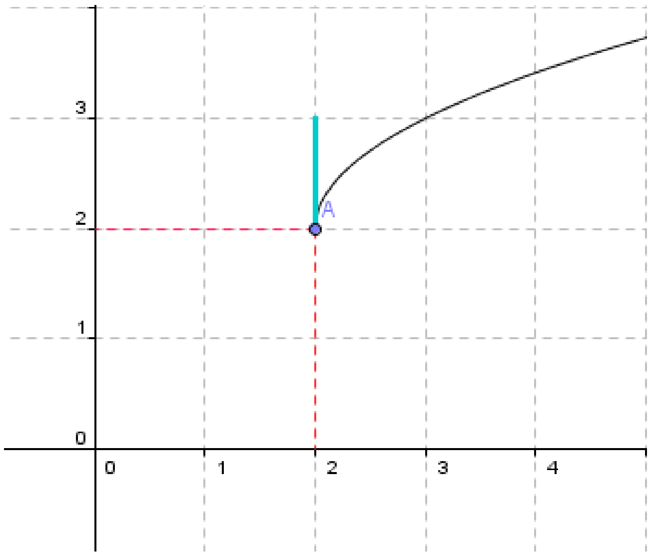


Exemple Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse $a = 2$,pour la fonction définie par $f(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$

Le domaine de définition est $D_f = [2; +\infty[$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2 + \sqrt{x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction f est la droite d'équation $x = 2$.



4.3 point anguleux

activité

Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie par : $f(x) = |x+1| + \dfrac{1}{x-1}$

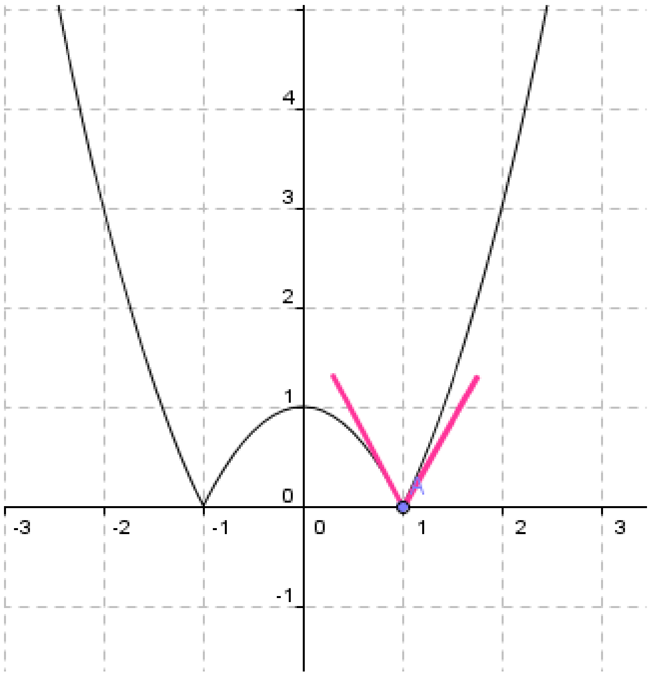
1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de cet ensemble de définition.
2. Écrire $f(x)$ sans barres de valeurs absolues.
3. Étudier la continuité de f au point d'abscisse -1.
4. Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse -1.
5. Que conclure au sujet de la dérivabilité au point d'abscisse -1.

4.3.1 Définition

Soit f une fonction, on dit qu'elle admet un point anguleux en a, si f est continue en a (dérivable à gauche et à droite) f non dérivable en a et la courbe de f admet des demi-tangentes de direction différentes au point d'abscisse a.

Exemple Soit la fonction f définie par : $f(x) = |x^2 - 1|$. Démontrer et illustrer l'existence d'un point anguleux au point d'abscisse 1.
L'étude menée plus haut de cette fonction nous a permis de remarquer que nous avons deux valeurs finies l'une à gauche $f'(1) = -2$ et l'autre $f'(1) = 2$ au même point d'abscisse $a = 1$, donc deux demi-tangentes respectivement à gauche et à droite d'équations.
$(\mathcal{T}_g) : y = -2x + 2$

$(\mathcal{T}_d) : y = 2x - 2$



Exercice d'application Étudier la dérivabilité sur le domaine de définition, puis calculer, s'il existe, le nombre dérivé au point d'abscisse a pour chacune des fonctions suivantes.

1. $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

2. $f(x) = |x^2 - 4| \quad a = 2$
3. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-1} \quad a = 2$
4. $f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad a = 0$
5. $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x+1} \quad a = 0$

5 Dérivabilité sur un intervalle

5.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K de $\mathbb{R}$

1. f est dérivable sur K si f est dérivable en tout point $x_0 \in K$
2. En particulier, f est dérivable sur $[a;b]$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ si f est dérivable sur $]a;b[$ et $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existent et sont finies.

5.2 Propriétés relatives à la dérivation sur un intervalle

activité : Dérivation d'une somme de fonctions

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = 2x^3 - 12x$ et $g(x) = -3x^2 + 2$ dérivables sur un

intervalle K de $\mathbb{R}$.
En supposant que $K = [a; b]$ et que $x_0 \in K$.

1. (a) Montrer que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ est dérivable sur K.

   (b) Évaluer $\dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}$

   (c) En déduire la $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}$

   (d) En supposant que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$, Conclure.

   Soit λ un réel.

2. (a) Justifier que $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis sur K.

   (b) Évaluer $\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0}$

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0)$

   (d) Conclure.

5.2.1 Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle K, alors la fonction $f+g$ est dérivable sur K et $\forall x_0 \in K$ on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

5.2.2 Propriété

Soit f une fonction dérivable sur K, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction (λf) est dérivable sur K et $\forall x_0 \in K$ on a $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

Remarque Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1 Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^4 + 1$ et $g(x) = -2x^2$.
Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la somme de fonctions $f(x) + g(x)$.
En effet $f(x) + g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^4 - 2x^2 + 1) - (x_0^4 - 2x_0^2 + 1)}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 - x_0^2)[(x^2 + x_0^2) - 2]}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x + x_0)(x^2 + x_0^2 - 2) \\
&= 4x_0^3 - 4x_0
\end{aligned}$$

En définitive, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{(x - x_0)} = f'(x_0) + g'(x_0)$
La fonction $f(x) + g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 Soit h et t deux fonctions définies par $h(x) = x^2$ et $t(x) = x^3 + x$.
Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la somme de fonctions $h(x) + t(x)$.
En effet $h(x) + t(x) = x^3 + x^2 + x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 + x^2 + x) - (x_0^3 + x_0^2 + x_0)}{(x - x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) + (x^2 - x_0^2) + (x - x_0)}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x \times x_0 + x_0^2 + x + x_0 + 1)}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x^2 + x \times x_0 + x_0^2 + x + x_0 + 1) \\
&= 3x_0^2 + 2x_0 + 1
\end{aligned}$$

En somme, $\lim_{x \to x_0} \frac{(h(x) + t(x)) - (h(x_0) + t(x_0))}{(x - x_0)} = h'(x_0) + t'(x_0)$
La fonction $h(x) + t(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 Soit f, une fonction définie par : $f(x) = x^2 - x$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Étudier la dérivabilité de la fonction λf sur $\mathbb{R}$.
En effet la fonction $\lambda f(x) = \lambda x^2 - \lambda x$ est une fonction polynôme.
De plus :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\lambda f(x) - \lambda f(x_0))}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\lambda(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)} = \lambda f'(x_0)$$

Donc la fonction $\lambda f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice d'application

Étudier la dérivabilité de la somme de fonctions f et g, puis calculer le nombre dérivé au point d'abscisse x_0 :

1. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x \quad x_0 = 3$
2. $f(x) = x^2 + 5x + 4$ et $g(x) = 2x^2 + 3x \quad x_0 = 0$

activité :Dérivation d'un produit de fonction

Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 3x^2 + 1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Évaluer les produits $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ et justifier que ces fonctions sont dérivables. On pose $q(x) = (fg)(x) = f(x) \times g(x)$
2. Évaluer $\frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0}$
3. Montrer que : $\lim_{x \to x_0} \frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
4. Conclure.

5.2.3 Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle K, alors la fonction $(f \times g)$ est dérivable sur K
et $\forall x_0 \in K$ on a $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$

Exemple 1 Soit f et g deux fonctions définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$ et dérivables sur $\mathbb{R}$
Le produit $f(x) \times g(x) = x^3 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 + x - x_0^3 - x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) + (x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x \times x_0 + x_0^2) + (x - x_0)}{(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)[x^2 + x \times x_0 + x_0^2 + 1]}{(x - x_0)} \\
&= 3x_0^2 + 1
\end{aligned}$$

En définitive, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$
La fonction $f(x) \times g(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 Soit h et t deux fonctions définies par : $h(x) = 5x^2$ et $t(x) = -x + 1$ dérivables sur $\mathbb{R}$
Le produit $h(x) \times t(x) = -5x^3 + 5x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)t(x) - h(x_0)t(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{-5x^3 + 5x^2 + 5x_0^3 - 5x_0^2}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{-5(x^3 - x_0^3) + 5(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)[-5x^2 - 5x \times x_0 - 5x_0^2 + 5x + 5x_0]}{(x - x_0)} \\
&= -15x_0^2 + 10x_0
\end{aligned}$$

En somme, $\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)t(x) - h(x_0)t(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0)t(x_0) + t'(x_0)h(x)$

Exercice d'application

Étudier la dérivabilité du produit de fonctions f par g, puis calculer le nombre dérivé au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = 3x^2 + 2x$ et $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x \quad x_0 = 3$
2. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + 4$ et $g(x) = 2x^2 + 3x \quad x_0 = 0$

activité : Dérivation d'un rapport de fonction

Soit u et v deux fonctions définies par $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = x - 1$. On pose $\dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{2x^2}{x - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $\dfrac{u(x)}{v(x)}$
2. Évaluer $\dfrac{u(x)}{v(x)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}$

3. Montrer que pour $x_0 \neq 1$, on a : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\dfrac{u(x)}{v(x)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{(x - x_0)} = \dfrac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{v(x_0)^2}$
4. Étudier la dérivabilité au point d'abscisse $x_0 = 1$
5. Conclure.

5.2.4 Propriété

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle K telle que $\forall x_0 \in K$, $g(x_0) \neq 0$ sur K alors les fonctions $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur K.
et $\forall x_0 \in K$, on a $(\dfrac{1}{g})'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, $\quad (\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)})' = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$

Remarque Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 1 Soit g, une fonction définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x}$.
$\forall x \neq 0$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
En outre, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\dfrac{1}{x_0^2} = g'(x_0)$
Il vient que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 2 Soit f, une fonction définie sur $]-\infty, 1[\bigcup]1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$
Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 \neq 1$.
On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x_0+2}{x_0+1}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{(x_0-1)(x+2) - (x-1)(x_0+2)}{(x-1)(x_0-1)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0-1)(x+2) - (x-1)(x_0+2)}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)} \\
&= -\frac{3}{(x_0-1)^2}
\end{aligned}$$

Pour $x_0 = 2$, nous avons $f'(x_0) = -3$

Exercice d'application

Étudier la dérivabilité sur le domaine de définition, puis calculer le nombre dérivé au point d'abscisse x_0 pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-4} \quad x_0 = 8$
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad x_0 = 2$
3. $h(x) = \dfrac{x^2-1}{3x+4} \quad x_0 = -3$

activité :Dérivation d'une fonction composée [3]

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J. Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout x de I, $h(x)$ soit dérivable dans J.
Considérons la fonction f définie par $f(x) = g(h(x))$, et montrons que f est dérivable en tout point x_0 de I. Pour tout a de I, posons $t(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. (a) En supposant que pour tout x voisin de a et distinct de a, $h(x)$ est distinct de $h(x_0)$, vérifier la relation : $t(x) = \dfrac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \times \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}$

   (b) En utilisant la continuité de la fonction h en x_0, vérifier que $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$.

   (c) En remarquant que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0)$ et $\lim_{X \to h(x_0)} \dfrac{g(X) - g(h(x_0))}{X - h(x_0)} = g'(h(x_0))$, conclure que $\lim_{x \to x_0} t(x) = g'(h(x_0)) \times h'(x_0)$ et que cette limite est le réel $f'(x_0)$.

   En supposant que sur I, $g(y) = \sqrt{y}$ et que h est dérivable et strictement positive sur I.

2. (a) Montrer que $g \circ h(x) = \sqrt{h(x)}$.

   (b) Montrer que $(g \circ h)'(x_0) = \dfrac{h'(x_0)}{2\sqrt{h(x_0)}}$.

5.2.5 Propriété

Si f est fonction dérivable sur K et g une fonction dérivable sur $f(K)$ alors $g \circ f(x)$ est une fonction dérivable sur K et $\forall x_0 \in K$ $(g \circ f)'(x_0) = f' \circ g' \circ f(x_0)$.

5.2.6 Propriété

Soit f une fonction dérivable sur K telle $\forall x \in K$, $f(x) > 0$ alors les fonctions $\sqrt{f}$, f^r
$r \in \mathbb{Q}$ sont dérivables sur K et $\forall x_0 \in K$ on a $(\sqrt{f(x_0)})' = \dfrac{f'(x_0)}{2\sqrt{f(x_0)}}$, $(f^r(x_0))' = rf'(x_0)f^{r-1}(x_0)$

Remarque 1 Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2 La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Exemple 1 Soit la fonction $f(x) = \cos(2x)$ définie sur $K = [0; 2\pi]$.
Étudier la dérivabilité de la fonction $f(x) = \cos(2x)$ au point $x_0 \in K$
Montrons que $\forall x_0 \in K$ $f'(x_0) = -2\sin(2x_0)$.
En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\cos(2x) - \cos(2x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} -2\sin(\frac{2x + 2x_0}{2})\sin(\frac{2x - 2x_0}{2}) \\
&= \lim_{x \to x_0} -2\sin(x + x_0) \times \sin(\frac{x - x_0}{2}) \\
&= -2\sin(2x_0)
\end{aligned}$$

Pour $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, nous avons $f'(\frac{\pi}{4}) = -2$

Exemple 2 Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x-2}$ définie sur $K = [2; +\infty[$ et $x_0 \in K$.
En supposant que $f(x) = u \circ v(x)$ où $u : x \mapsto \sqrt{x}$ et $v : x \mapsto x - 2$.
Étudions la dérivabilité de la fonction $f(x) = \sqrt{x-2}$
Son domaine de définition est :$D_f = [2; +\infty[$
Montrons que $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 - 2}}$.
En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x_0 - 2}) - (\sqrt{x-2} + \sqrt{x_0 - 2})}{(x - x_0)(\sqrt{x-2} + \sqrt{x_0 - 2})} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x-2) - (x_0 - 2)}{(x - x_0)(\sqrt{x-2} + \sqrt{x_0 - 2})} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x-2} + \sqrt{x_0 - 2})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0 - 2}}
\end{aligned}$$

Pour $x_0 = 4$, nous avons $f'(x_0) = \dfrac{1}{4}$

Exercice d'application Calculer le nombre dérivé au point x_0 pour chacune des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$
2. $f(x) = \sqrt{x+3}$
3. $f(x) = \cos(-3x + \frac{\pi}{3})$

activité :Dérivation de la bijection réciproque

Soit f une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I. Le théorème des fonctions continues et strictement monotones prouve que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

1. Vérifier que pour tout $y \in f(I)$, on a : $f(f^{-1}) = y$.
2. En appliquant le théorème de la dérivée d'une fonction composée, montrer que $f'(f^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1$
3. En déduire que pour les points y de $f(I)$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, on a : $(f^{-1})(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
4. On pose $y_0 = f(x_0)$ ou x_0 est un élément de I et on suppose que $f'(x_0) = 0$. f^{-1} est-elle dérivable en y_0 ?

5.2.7 propriété

Soit f est un fonction dérivable sur K et bijective de $K \longrightarrow J$ avec $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in K$ alors f^{-1} est une fonction dérivable sur J et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.

Exemple 1 Soit la fonction $x \mapsto \cos(x)$. Cette fonction définie une bijection de $[0; \pi]$ vers $[-1; 1]$.
Sa fonction réciproque notée $\cos^{-1}(x)$ ou $\arccos(x)$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple 2 Soit la fonction $x \mapsto \sin(x)$. Cette fonction définie une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1; 1]$.
Sa fonction réciproque notée $\sin^{-1}(x)$ ou $\arcsin(x)$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple 3 Soit la fonction $x \mapsto \tan(x)$. Cette fonction définie une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.
Sa fonction réciproque notée $\tan^{-1}(x)$ ou $\arctan(x)$ admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

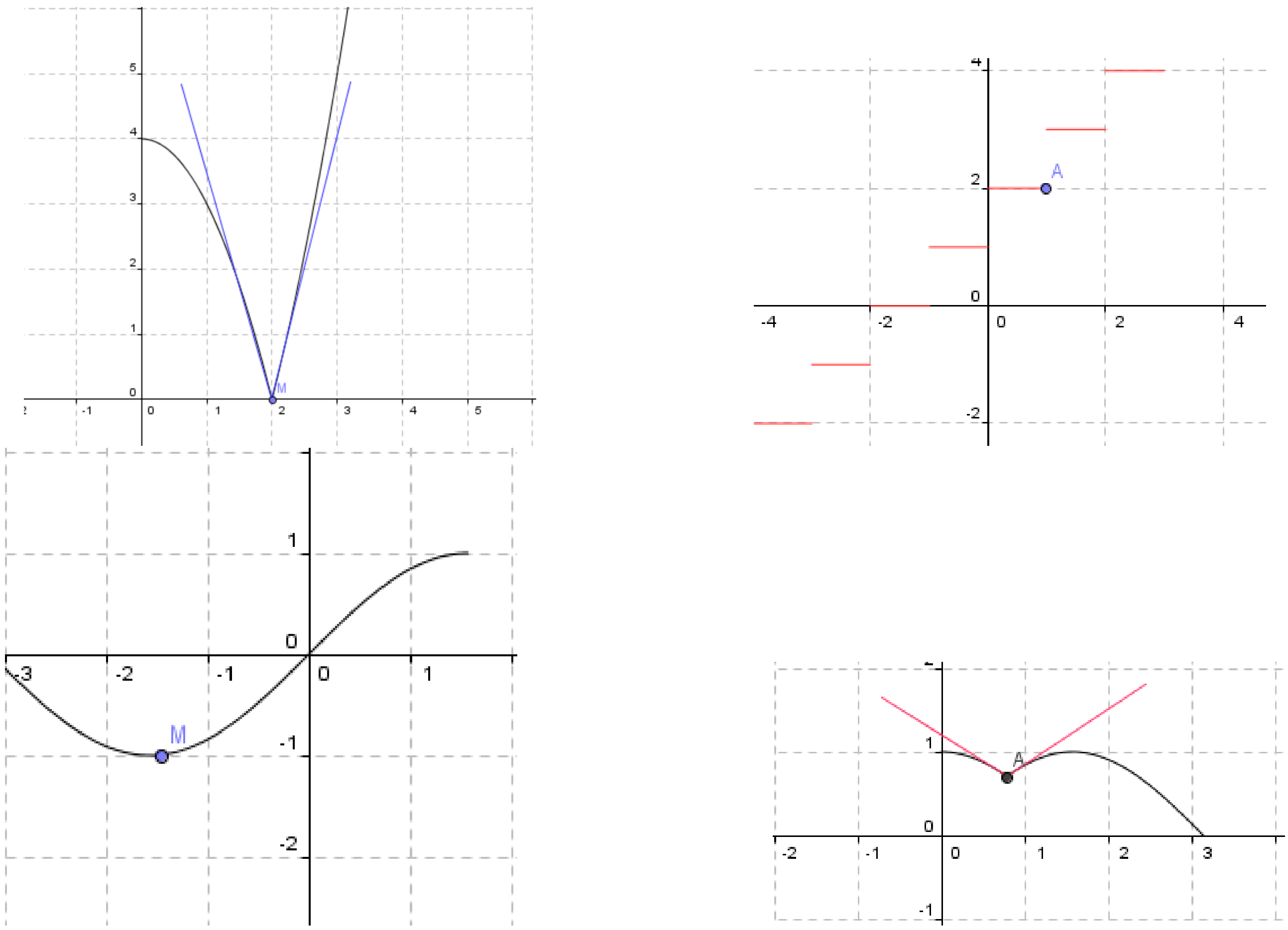
Exercice d'application Soit f la fonction de $]-\pi; \pi[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(\frac{x}{2})$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Démontrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

6 Activités d'évaluation

6.1 Première partie

Exercice 1 Dire dans chacun des cas suivants si la fonction est dérivable au point A ou M .



Exercice 2 Dans cet exercice répondre par "vrai" ou "faux"

1. Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto 2x - 1$ en -2 est 0.
2. Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \dfrac{x-1}{x+3}$ en 0 est $\frac{4}{9}$.
3. La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ n'est pas dérivable en -1 et en 1.
4. Toute fonction continue en a est dérivable en a.
5. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x-4}$ et $x \mapsto x^3 - 2x$ sont dérivables sur $[1; 3]$.
6. Les fonctions $x \mapsto \frac{x+3}{x-1}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ sont dérivables sur $[4; 5]$.

Exercice 3 Dans cet exercice une seule des réponses proposées est exacte.

Le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^3 - 1$ en 1 est :

1. (a) 3
   (b) -2
   (c) 1

   Une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ au point d'abscisse 0 est :
2. (a) $y = 3x - 2$
   (b) $y = -3x + 2$
   (c) $y = -3x - 2$

   La fonction $x \mapsto x^3 - 3x^2$ a pour sommets les points d'abscisses :
3. (a) -2 et 0 ;
   (b) 0 et 3 ;
   (c) 0 et 2 ;

   Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+2}$, alors
4. (a) f est dérivable sur $[-2; +\infty[$.
   (b) f n'est pas dérivable sur $]-2; +\infty[$.
   (c) f n'est pas dérivable en -2.

6.2 Deuxième partie

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction f en a.

a) $f : x \mapsto x^2 - x \qquad a = 1$

b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} \qquad a = 2$

c) $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1 \qquad a = 3$

Exercice 5 Dans chacun des cas suivants, donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentation de f en son point d'abscisse a

a) $f : x \mapsto x^2 - x \qquad a = 1$

b) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} \qquad a = 2$

c) $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1 \qquad a = 3$

Exercice 6 f étant une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, préciser l'ensemble des nombres réels où f est dérivable.

1. $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$
2. $f(x) = 3x^2 - 1 + \frac{3}{x}$
3. $f(x) = x^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$
4. $f(x) = \sin(3x)$
5. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$
6. $f(x) = \sqrt{2x-3}$
7. $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{3x-1}$
8. $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$
9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-5x}}$
10. $f(x) = \frac{tan(x)}{1+tan(x)}$

Exercice 7 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

2) f est-elle dérivable en 0 ?[]

Exercice 8 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et dont les courbes représentatives sont $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ respectivement de f et g.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ et en déduire la courbe représentative de f.
2. Étudier la dérivabilité de f en 1 et 2.
3. Donner une interprétation graphique des résultats et les illustrer sur le schéma.
4. Démontrer que la courbe représentative de la fonction g admet aux points d'abscisses 1 et 2 des demi-tangentes parallèles à la droite (OJ).

Exercice 9 Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)(2x-3)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Démontrer que $\forall h \in \mathbb{R}$, $f(2+h) = 1 + 3h + 2h^2$
2. En déduire que f est dérivable en 2 et calculer son nombre dérivé en 2.
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2.
4. Représenter $(\mathcal{C})$ et (T) sur le même graphique.[1]

Exercice 10 Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x + \dfrac{1}{x})\sin(\pi x)$

1. Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi(x + \dfrac{1}{x})\dfrac{sin[\pi(x-1)]}{\pi(x-1)}$
2. Déduire que f est dérivable en 1 et calculer son nombre dérivé en 1.[1]

Exercice 11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2-x}{3x+1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative

1. Démontrer que $\forall h \in]-\infty, \dfrac{8}{3}[\cup]\dfrac{8}{3}, +\infty[$, on a : $f(-3+h) = f(-3) + \dfrac{7h}{24\ h - 64}$
2. En déduire que f est dérivable en -3 et calculer son nombre dérivé en -3
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -3.
4. Représenter $(\mathcal{C})$ et (T) sur le même graphique[].

Exercice 12 Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer le nombre dérivé de f en 2 et donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2
3. Calculer le nombre dérivé de f à droite en 0 et donner une équation de la demi-tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.[1]

Exercice 13 Soit f la fonction définie par $f(x) = x|x-3|$

1. (a) Étudier la continuité de f en 3.
   (b) Calculer le nombre dérivé de f à droite et à gauche en 3. f est-elle dérivable en 3 ?
2. (a) Étudier la continuité de f en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité en 0.[]

Exercice 14 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } \ x < 1 \\ \frac{x-2}{x+1} & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 1
2. Étudier la dérivabilité de f en 1
3. Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.[]

Exercice 15 Soit f la fonction définie par :

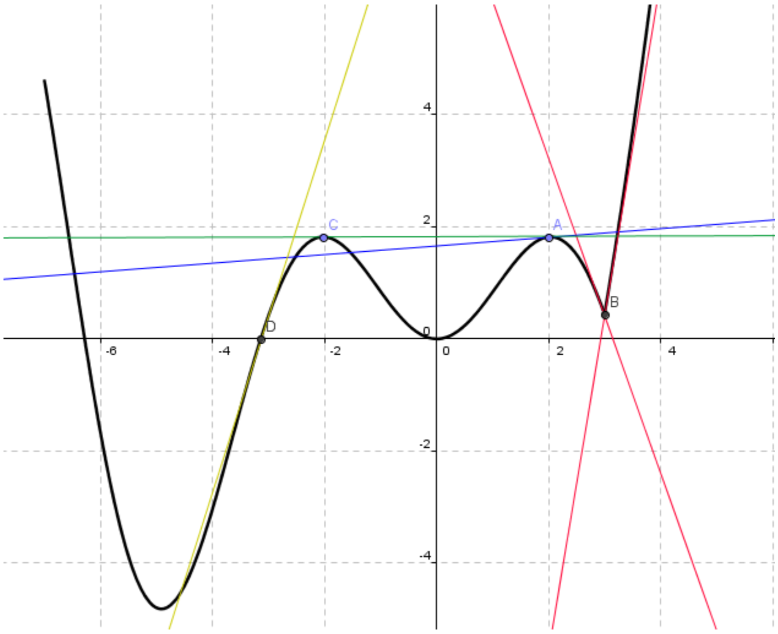
$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } \ x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes[].

Exercice 16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 4$

1. Soit a un réel et h un réel strictement positif , calculer $f(a), f(a+h)$
2. Montrer que $f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h)$ où A et $\varphi(h)$ sont à préciser.
3. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
4. Commenter le résultat

Exercice 17



1. f est-elle dérivable au point d'abscisse $\frac{1}{2}$?
2. f est-elle dérivable aux points D ? C ? O ? A ? et B ?

On suppose que f est dérivable aux points d'abscisses -2 et 2.

1. Calculer $f'(-2)$, $f'(2)$.
2. Déterminer graphiquement la valeur de $f(0)$.

Exercice 18 Un corps en chute libre lâché sans vitesse initiale a parcouru au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par $d(t) = 5t^2$

1. Calculer la distance parcourue par le corps en chute libre au bout de 0, 1, 2, 3, 4, 5 secondes. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de la fonction d sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps en chute libre dans les intervalles de temps $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$
3. Soit h un réel strictement positif tel que $t - h > 0$. Calculer la vitesse moyenne du corps en chute libre dans les intervalles de temps $[t-h; t]$ et $[t; t+h]$.(AN : $t = 2s$ et $h = 0,1s$)
4. " La vitesse instantanée à l'instant t est $v(t) = 10t \;\; m/s$ ". Expliquer cette affirmation.

Exercice 19 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue en 0
2. Étudier la dérivabilité de f en 0
3. Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. [3]

Exercice 20 Soit la fonction $f : x \longmapsto |x^2 - 1| + 2|x| - 3$

1. Étudier la continuité en -1, 0, 1
2. Étudier la dérivabilité en -1, 0, 1. [2]

Exercice 21 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{|x^2 - x| + 1}{|x| + 1}$ $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 0. [2]

Exercice 22 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 0.[2]

Exercice 23 Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 1}}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente parallèle à (OJ) au point d'abscisse 2.
2. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes parallèles. [2]

Exercice 24 Les fonctions f, g, h définies par $f(x) = x^2|x|$, $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $h(x) = \cos(\sqrt{|x|})$ sont-elles dérivables en 0 ? []

Exercice 25 Un agriculteur décide de ravitailler certaines localités de la région du centre Cameroun en produits vivriers à partir d'une camionnette. Il part d'Akonolinga à une date t_0 avec une vitesse v_0 et arrive à Awaé , localité situé à $60Km$ avec une vitesse v_1 à l'instant t_1.

1. (a) Exprimer la vitesse moyenne v_m en fonction de v_0, v_1, t_0, t_1.
   (b) Calculer la vitesse moyenne en Km/s pour $v_0 = 40Km/s$, $v_1 = 70Km/s$, $t_0 = 6h25min$, $t_1 = 6h45min$
2. (a) Déterminer les vitesses instantanés aux dates $t = 6h30min$, et $t = 6h40min$
   (b) En déduire la valeur de l'accélération entre les deux localités.

Exercice 26 Soit f la fonction de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1; 1]$ définie par :$f(x) = \sin x$

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'intervalle sur lequel f^{-1} est dérivable et démontrer que sa dérivée en x_0 vaut : $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}$.
3. De manière analogue, étudier la dérivabilité de la fonction réciproque g de $[0; \pi]$ vers $[-1; 1]$,définie par $g(x) = \cos 2x$, puis déterminer sa dérivée en x_0. [2]

Exercice 27 Soit f la fonction de $[0; \frac{\pi}{2}[$ vers $[1; +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable.
3. Démontrer que sa dérivée au point d'abscisse x_0 est la fonction : $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{x_0\sqrt{x_0^2-1}}$.
   [2]

Exercice 28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} + a & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. Comment faut-il choisir les réels a et b pour que f soit continue ?
2. a et b sont choisis pour que f soit continue. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 29 Soit la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 ? [2]

Exercice 30 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(x)$ sans le symbole de « valeur absolue ».
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son de définition. $(\mathcal{C})$ admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3. Démontrer que les droites d'équations $y = x - 3$ et $y = -x + 3$ sont asymptotes à $(\mathcal{C})$. [2]

Références

[1] Saliou Touré, Le livre de Mathématiques Première C "collection CIAM", édition EDICEF, 1998 (292 pages)

[2] Saliou Touré, Le livre de Mathématiques Terminale C "collection CIAM", édition EDICEF, 1999 (347 pages)

[3] Mvomo Otam Charles, Majors en Mathématiques classe de Premières C "collection ASVA EDUCATION" (312 pages)

[4] Ebanga Josette, Mosé Mounjouopou, Abraham Sipa. Physiques Premières C, D, E. programme Camerounais (1982) "collection Les classiques Camerounais"(240 pages)

[5] G. costantini. http ://bacamaths.net

[6] http ://xmath.free/

[7] Gerard Lavau-http ://lavau.pagesperso-orange.fr/index.htm