Table des matières

Objectif Pédagogique Général

Dans ce cours sur les applications de la fonction dérivée, nous recherchons les renseignements sur les variations d'une fonction en examinant sa fonction dérivée. Nous nous focalisons sur les théorèmes énonçant une relation entre les variations de $f(x)$, les variations de x et les valeurs de $f'(x)$. Ces théorèmes méritent d'être connus à cause de leur importance en analyse. Dans la suite du cours, ils nous serviront à déduire (avec tous les justificatifs) le sens de monotonie de la fonction sur un intervalle grâce au signe de la fonction dérivée.

Objectifs Pédagogiques spécifiques

A l'issue de ce cours, l'élève doit :

1. comprendre pourquoi si f admet un extrémum local en c, alors $f'(c) = 0$.
2. être capable de déduire le signe de la dérivée de f sur un intervalle lorsque le sens des variations de f est connu.
3. découvrir le théorème de Rolle et pouvoir l'appliquer pour prouver l'existence de racines à certaines équations.
4. découvrir le théorème de la moyenne et pouvoir l'appliquer pour prouver l'existence de racines à certaines équations.
5. découvrir l'inégalité des accroissements finis et pouvoir l'appliquer pour obtenir des majorations ou minorations utiles pour certaines démonstrations.
6. être capable de déduire le sens des variations de f sur un intervalle quand le signe de sa dérivée est connu.
7. être capable de déterminer les valeurs extrémales d'une fonction en analysant les racines de sa fonction dérivée.
8. être capable d'étudier la position relative d'une courbe par rapport à sa tangente sur intervalle donné. En particulier, pouvoir identifier les points d'inflexion en analysant les racines de la fonction dérivée seconde.

Pré-requis

Avant d'aborder cette partie, l'élève doit être apte au calcul des limites, au calcul de la dérivée et à l'étude de la continuité d'une fonction. Il doit en particulier savoir que si f continue en c vérifie $f(c) > 0$, alors il existe un intervalle ouvert contenant c sur lequel tout x vérifie $f(x) > 0$.

1 Extrémum local d'une fonction en un point

1.1 notion d'extrémum local

Activité 1.1. *On considère le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 3$*

1. *Donner le domaine de définition de la fonction f .*
2. (a) *Dresser le tableau donnant le signe de $f(x) - f(1)$ en fonction de x.*

   (b) *Dresser également le tableau du signe de $f(x) - f(0)$.*
3. *Donner un intervalle ouvert I_1 contenant 1 tel que $\forall x \in I_1$; $f(x) - f(1)$ garde un signe constant sur I_1.*
4. *Donner la plus petite valeur possible que peut prendre $f(x)$ sur l'intervalle I_1*
5. *Peut-on trouver un intervalle ouvert I_2 contenant 0 tel que*

   (a) $\forall x \in I_2$; $f(x) - f(0) \geq 0$?

   (b) $\forall x \in I_2$; $f(x) - f(0) \leq 0$?

Plus généralement on a la définition suivante :

Définition 1.1.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et a un réel tel que f est définie en a.

- *On dit que la fonction f admet un* ***minimum local*** *en a s'il existe un intervalle ouvert I contenant a, tel que f est définie sur I et tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$.*
- *On dit que f admet un* ***maximum local*** *en a s'il existe un intervalle ouvert I contenant a,tel que f est défini sur I et tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(a)$.*
- *On dit que f admet un extrémum local en a si elle admet un maximum local ou un minimum local en a*

Exemple 1.1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- *Pour $a = 1$, on a $(f(x) - f(1)) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x - 2)$. Donc $f(x) - f(1)$ a le même signe que $(x - 2)$. On a le tableau de signe suivant :*

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x) - f(1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

On peut observer que $1 \in]0\ ;\ 2[$ *et* $\forall x \in]0\ ;\ 2[$ *on a* $f(x) - f(1) \leq 0$ *c-à-d* $f(x) \leq f(1)$. *Don* f *admet un maximum local en* 1.

- *Pour* $a = 0$, *on a* $(f(x) - f(0)) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$. *Le tableau donnant le signe de* $(f(x) - f(0))$ *est le suivant :*

x	$+\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$-\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - f(0)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut observer que $f(x) - f(0)$ *s'annule et change de signe en* 0. *Ainsi on ne peut trouver un intervalle ouvert contenant* 0 *sur lequel* $f(x) - f(0)$ *garde un signe constant. Donc* f *n'admet pas d'extrémum en* 0.

Remarque 1.1.
Si pour tout x *tel que* f *soit définie en* x *on a* $f(x) \leq f(a)$ *(respectivement* $f(x) \geq f(a)$*), alors on dit que* f *admet un* **maximum global** *(respectivement* **minimum global***) en* a *ou tout simplement* **maximum** *(respectivement* **minimum** *) en* a.

Exercices d'application

Exercice 1.1.
Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction f *admet un extrémum au point* a. *Si oui, préciser la nature de l'extrémum.*

1. $f(x) = (2x - 3)^2 + 6$; $a = \frac{3}{2}$.
2. $f(x) = (5x - 4)(x + 7) - 5$; $a = \frac{4}{5}$ *puis* $a = -7$.
3. $f(x) = (x + 3)^2(4x - 5) + 1$; $a = -3$

Exercice 1.2.
On considère la fonction g *définie par :* $g(x) = |x + 1| + 2|x|$.

1. *Donner une écriture sans valeur absolue de* $g(x)$.
2. *Donner une représentation graphique de* g.
3. *Déduire à partir du graphique les extréma de* g.

1.2 Relation entre la dérivée et l'extrémum en un point où la fonction est dérivable.

Proposition 1.1. *Si une fonction est dérivable en un point* a *et si* f *admet un extrémum local en* a, *alors* $f'(a) = 0$.

preuve : On suppose par exemple que f admet un maximum local en a. Il existe donc un intervalle ouvert I contenant a tel que f est définie sur I et tel que $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in I$.

1. Si $x \in I$ tel que $x > a$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0. \tag{1}$$

2. Si $x \in I$ tel que $x < a$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0. \tag{2}$$

f étant dérivable en a, on a :

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

En passant à la limite dans (1) et (2), on obtient respectivement

$$\lim_{\substack{x \mapsto a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{\substack{x \mapsto a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

Par suite on obtient $f'(a) \leq 0$ et $f'(a) \geq 0$. D'où $f'(a) = 0$.

Remarque 1.2. *La réciproque de la proposition précédente est fausse. C'est-à-dire, une fonction dérivable en a et vérifiant $f'(a) = 0$ n'admet pas nécessairement un extrémum local en a.*

Exemple 1.2. *On considère la fonction $f : x \longmapsto (x + 2)^3$.*

1. *Étudier la dérivabilité de f en -2 et vérifier que $f'(-2) = 0$.*
2. *Étudier les variations de f et conclure.*

2 Signe la dérivée d'une fonction connaissant son sens de variations

Activité 2.1.

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et monotone sur I. Nous allons étudier le signe de la fonction dérivée f' sur I. Soit $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(a+h) \in I$.

1. *On suppose que f est croissante sur I.*
   (a) *Montrer que $f(a+h) - f(a)$ et h ont le même signe quel que soit le signe de h.*
   (b) *En déduire le signe de $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$.*
   (c) *En déduire que $f'(a) \geq 0$.*
2. *Supposons maintenant que f est décroissante sur I.*
   (a) *Comparer le signe de $f(a+h) - f(a)$ et h.*
   (b) *En déduire le signe de $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$.*
   (c) *Montrer qu'alors $f'(a) \leq 0$*
3. *On suppose que f est constant.*
   (a) *Que vaut $T(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$?*
   (b) *En déduire que $f'(a) = 0$*

Plus généralement, nous avons la propriété suivante :

Propriété 2.1.

soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

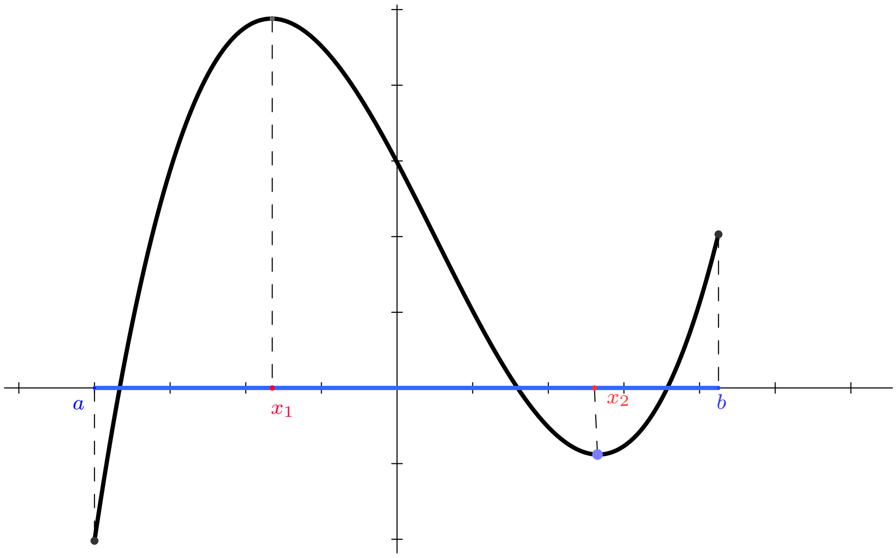
i) *si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*

ii) *si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.*

iii) *si f est constante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.*

Exercice 2.1.

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $[a;b]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(0;I;J)$ est donnée ci-dessous :



a) *Étudier les variations de f sur $[a;b]$*

b) *En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[a;b]$*

Théorème 2.1. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel appartenant à I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extrémum en a.*

Remarque 2.1. *Le théorème précédent donne une condition suffisante, mais non nécessaire pour qu'une fonction f admette un extrémum local en a.*

Exercice 2.2. *On considère la fonction f définie par* $f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ x \in]-\infty;1[\\ \dfrac{2}{x} & si\ x \in [1;+\infty[\end{cases}$

1- *Étudier la continuité de f en 1.*

2- *Étudier la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty;1[$ et $[1;+\infty[$ et calculer la dérivée dans chaque cas.*

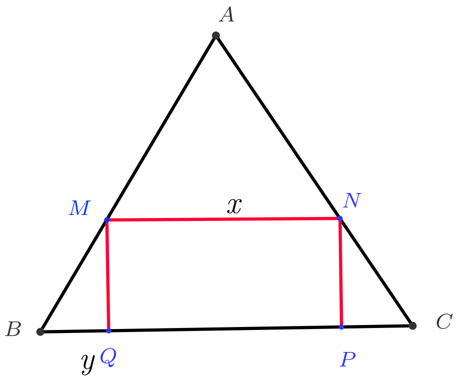
3- *Étudier la dérivabilité de f' en 1.*

4- *Étudier le sens de variation de f et en déduire que f admet un maximum en 1.*

APPLICATION: L'OPTIMISATION

Beaucoup de problèmes pratique de la vie (dits d'optimisation) poussent à la détermination des valeurs extrémales(maximales et minimales).

Exemple 2.1. *On considère un triangle ABC équilatéral de coté a. $MNPQ$ est un rectangle inscrit dans ABC. On pose $MN = x$ et $BQ = y$*



a) Écrire une relation liant x et y.

b) Exprimer MQ en fonction de x.

c) Exprimer l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction de de y et donner les valeurs possibles de y.

d) En déduire la position du point Q pour laquelle l'aire du rectangle est maximale calculer cette aire.

Exercice 2.3. *On considère les fonctions p et q définies par : $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6$ et $q(x) = x^5 - 5x^4 + 2$.*

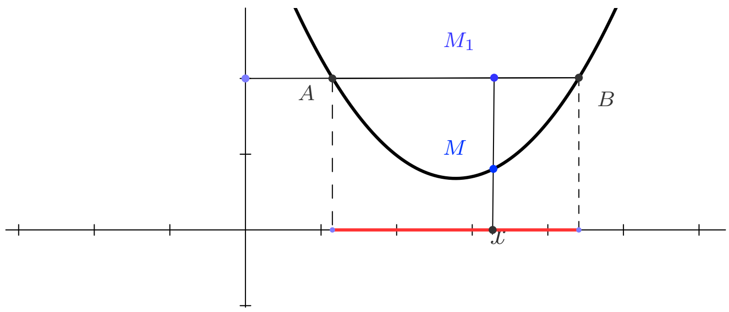
1. *Calculer les dérivées $p'(x)$ et $q'(x)$*
2. *Dresser le tableau de signe de chacune des dérivées.*
3. *En déduire les extréma de chacune des fonctions p et q.*

3 Théorème de Rolle

Activité 3.1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 11$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Soient A et B les deux points de la courbe d'abscisses respectives 1 et 3.

1. *Étudier la continuité de f sur $[1; 3]$, sa dérivabilité sur $]1; 3[$ et Vérifier que $f(1) = f(3)$.*
2. *Montrer que la droite (AB) a pour équation cartésienne $y = 8$.*
   On veut montrer qu'il existe un point de $]1; 3[$ où la dérivée est nulle.
3. *Soit $x \in]1; 3[$, M et M_1 deux points de même abscisse x tels que $M \in \mathcal{C}_f$ et $M_1 \in (AB)$ (voir figure ci-dessous).*



1. *Vérifier que la longueur du segment MM_1 vaut $MM_1 = -x^2 + 4x - 4$.*
2. *Déterminer x pour que MM_1 soit maximale. On note x_0 cette valeur.*
3. *Vérifier que $f'(x_0) = 0$.*
4. *Que peut-on dire de la tangente en x_0.*

L'exemple ci-dessus illustre un cas général qui s'énonce comme suit :

Théorème 3.1.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que :

- *f est continue sur $[a; b]$.*
- *f est dérivable sur $]a; b[$.*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

Comme f est continue sur $[a; b]$, on peut poser $f([a; b]) = [m; M]$, où m et M sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a; b]$. Ainsi,

1. si $m = M$, f est constante sur $[a; b]$. Alors, $\forall x \in]a; b[$ on a $f'(x) = 0$. Donc tout c appartenant à $]a; b[$ satisfait $f'(c) = 0$.
2. si $m < M$: la fonction étant continue sur $[a; b]$, on sait que m et M sont images respectives de deux points (distincts) appartenant à $[a; b]$. Puisque $f(a)=f(b)$, un au moins des deux points, disons c, n'appartient pas à $\{a, b\}$. Le point c appartient donc à $]a, b[$, et puisque $f(c)$ appartient à $\{m, M\}$, f admet un extrémum local en c. Donc f est dérivable en c (car c appartient à $]a, b[$) et on a $f'(c) = 0$.

si $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. L'équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse c est $y = f(c)$. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses. Donc, il existe au moins un point de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3.1.

1- Donnez quelques exemples de fonctions qui illustrent le théorème de Rolle.

2- Peut-on appliquer le théorème de Rolle aux fonctions suivantes sur les intervalles indiqués ?

a- $f(x) = \sqrt{x}$ *sur* $[0;1]$	*c-* $h(x) = 2\|x^2 - 2\|$ *sur* $[1;\sqrt{3}]$
b- $g(x) = \frac{2}{x}$ *sur* $[-1;1]$	*d-* $u(x) = \sqrt{\|x-1\|}$ *sur* $[0;2]$

Exercice 3.2.

On considère les fonctions f *définie par* $f(x) = 2x + 1 + \cos(2x)$.

On pose $g(x) = x^2 + x - 2 + \frac{1}{2}\sin(2x)$

1. *Montrez que* g *est continue* $[-1,24\ ;\ 0]$ *et dérivable sur* $]-1,24;0[$.
2. *Montrez que* $g'(x) = f(x)$
3. *En déduire que l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une racine dans* $]-1,24;0[$.

Donnée *:* $\sin(2,48) = 0,5952$

4 Théorème des accroissements finis

4.1 Théorème des accroissements finis

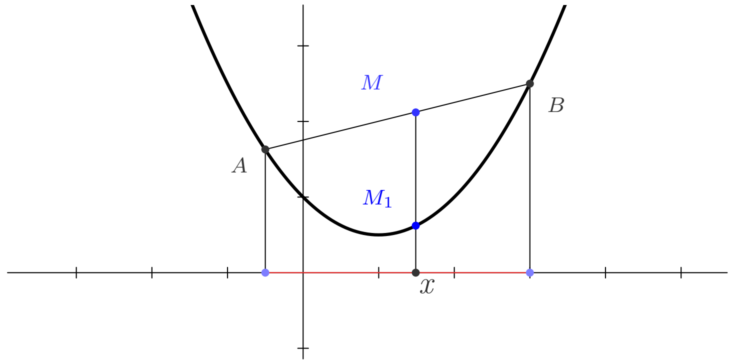
Activité 4.1.

On considère la fonction f *définie par* $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$*. Soient* A *et* B *les points de la courbe de* f *d'abscisses respectives* $a = -\frac{1}{2}$ *et* $b = 4$.

1. *Calculer le coefficient directeur de la droite* (AB)*, c'est-à-dire le nombre* $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
2. *Donner l'équation cartésienne de* (AB) *sous sa forme* $y = px + q$*. On trouvera que* M *de cordonnée* (x, y) *appartient à* (AB) *si et seulement si* $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$

   On veut montrer l'existence de $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

   On " soupçonne " que c soit la valeur de $x \in]a, b[$ *tel que le point* $M_1(x, f(x))$ *soit le plus "éloigné" possible de la droite* (AB)*, c'est-a-dire qui maximise* $|y - f(x)|$*,* x *variant sur* $]a, b[$.



3. *Montrer que pour tout* $x \in]a, b[$, $y - f(x) \geq 0$ *et en déduire une expression de* $|y - f(x)|$ *en fonction de* x, *et sans valeur absolue.*
4. *Déterminer tous les* $d \in]a, b[$ *annulant la dérivée de* $(y - f(x))$, *puis la valeur de* $c \in]a, b[$ *maximisant* $(y - f(x))$.
5. *calculer* $f'(c)$ *et conclure.*

L'activité ci-dessus constate dans un cas particulier le théorème des accroissements finis qui s'énonce ainsi qu'il suit :

Théorème 4.1.
Soient a *et* b *deux réels tels que* $a < b$, $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction d'une variable réelle vérifiant :*

- f *est continue sur* $[a; b]$.
- f *est dérivable sur* $]a; b[$.

Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve
Soient A et B les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b. L'équation cartésienne de (AB) s'écrit : $y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Pour x appartenant à $[a, b]$, on pose $h(x) = \left|\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) - f(x)\right| = |y - f(x)|$. La fonction h est continue sur $[a, b]$, donc y admet une borne supérieure atteinte, disons en $c \in [a, b]$

1) Si $h(c) = 0$, alors, sur $[a, b]$, la courbe de f coïncide avec (AB), d'où le résultat.
2) Si $h(c) > 0$, alors, $c \notin \{a; b\}$, car $h(a) = h(b) = 0$. Donc, $c \in]a; b[$. Par conséquent f est dérivable en c. De plus $h(c) \neq 0$ donc $y - f(x) \neq 0$ pour $x = c$. La fonction $y - f(x)$ étant continue en c, il existe un intervalle ouvert contenu dans l'intervalle

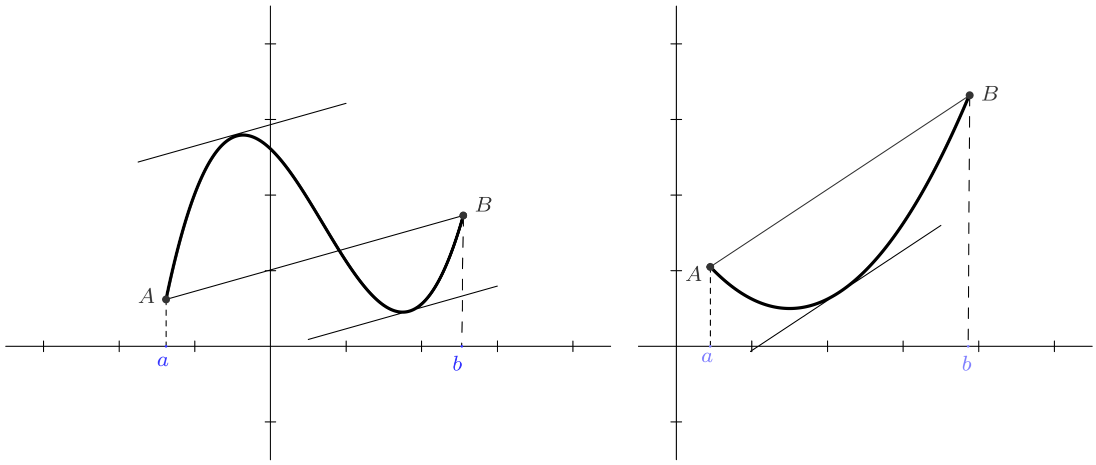
$]a;b[$ sur lequel $y - f(x)$ a le même signe en x qu'en c. Soit $\varepsilon \in \{-1;1\}$. Sur cet intervalle, on peut écrire

$$h(x) = \varepsilon(y - f(x)).$$

Puisque h atteint un maximum local en c, on a $h'(c) = 0$. Or, cette dernière équation équivaut à $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Interprétation graphique

On considère les points $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$. La droite (AB) coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ en A et B. Soit $c \in]a;b[$, alors $f'(c)$ existe et représente le coefficient directeur de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse c.
Ainsi $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ implique que (T) et (AB) sont parallèles.
Donc lorsque f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, il existe **au moins** un point $c \in]a;b[$ où la pente de la tangente à la courbe coïncide avec le taux d'accroissement quand x varie de a a b. On peut illustrer ce résultat par les figures suivantes :



Le théorème des accroissements finis affirme que l'accroissement moyen de la valeur d'une fonction dans un intervalle est une valeur atteinte par la dérivée en un point de cet intervalle.

Exercice 4.1.

On considère la fonction f d'une variable réelle définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$$

1. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f.*
2. *Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[0;5]$, c-à-d $a = 0$ et $b = 5$?*

4.2 Inégalité des accroissements finis

L'inégalité des accroissements finis est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis

Théorème 4.2.
On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I. Soient a , $b \in I$ tels que $a < b$
S'il existe deux réels m et M tel que $m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in [a;b]$.
Alors $\quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

preuve : en exercice laissé à l'élève.

Propriété 4.1.
On considère une fonction f dérivable sur un intervalle I. S'il existe M tel que $\forall x \in I$ $|f'(x)| \leq M$, alors $\forall a, b \in I$ on a $\quad |f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Remarque 4.1.
cette dernière propriété est une reformulation de l'inégalité des accroissements finis. Il suffit de poser $m = -M$.

Exemple 4.1.
Demontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$
Solution : On peut considérer l'application g définie par $g(t) = \sin t$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \cos t$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $|g'(t)| = |\cos t| \leq 1$.
soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g avec $a = x$ et $b = 0$, on obtient $|g(x) - g(0)| \leq 1 \times |x - 0|$ soit $|g(x)| \leq |x|$.

Exercice 4.2.
Démontrer que pour tout réels

$$\forall a, b \in [0; \frac{\pi}{2}[\quad a < b, \text{ on a } \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

5 Sens de variation d'une fonction dont on connaît la dérivée

Nous avons étudier plus haut comment trouver le signe de la dérivée d'une fonction connaissant son sens de variation. Il est maintenant question pour nous d'étudier la réciproque, c-à-d déterminer le sens de variation d'une fonction connaissant le signe de la fonction dérivée. l'activité suivante traite le cas où la dérivée est positive et l'autre cas peut être traité de façon analogue.

Activité 5.1. *Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.*
On veut montrer que f est croissante sur I. Soit $a, b \in I$ tel que $a < b$

1. *Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*
2. *En déduire que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$.*
3. *En déduire que $f(a) \leq f(b)$.*
4. *Conclure.*

Plus généralement, on a la propriété suivante :

Propriété 5.1. *soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

- *si pour tout $x \in I \quad f'(x) \geq 0$, alors f est croissante.*
- *si pour tout $x \in I \quad f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante.*

Remarque 5.1. *soit f une fonction dérivable sur un intervalle I*

si pour tout $x \in I \quad f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.

si pour tout $x \in I \quad f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Par ailleurs, si la dérivée s'annule plusieurs fois et garde un signe constant, on aura la remarque suivante :

Remarque 5.2.

- *Si $f'(x) > 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle I, sauf peut être en un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*
- *si $f'(x) < 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle I, sauf peut être en un nombre fini de réels pour lesquels elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.*

Exemple 5.1.

1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto (x^3 + 2)$.*
   f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
   On a :
   - *$f'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.*
   - *pour tout $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.*

   Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. *on considère $g(x) = x - \cos x$.*
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 - \sin x$. On a :

– *$g'(x) = 0$ si et seulement si $\sin x = 1$ c-à-d $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$*
– *pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, on a $g'(x) > 0$. Par ailleurs, pour tout réels a et b dans $\mathbb{R}$, $g'(x)$ s'annule en un nombre fini de valeurs dans l'intervalle $[a; b]$. En effet l'équation $a \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq b$ résolu en k dans $\mathbb{Z}$, admet un nombre fini de valeurs.*

Ainsi, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

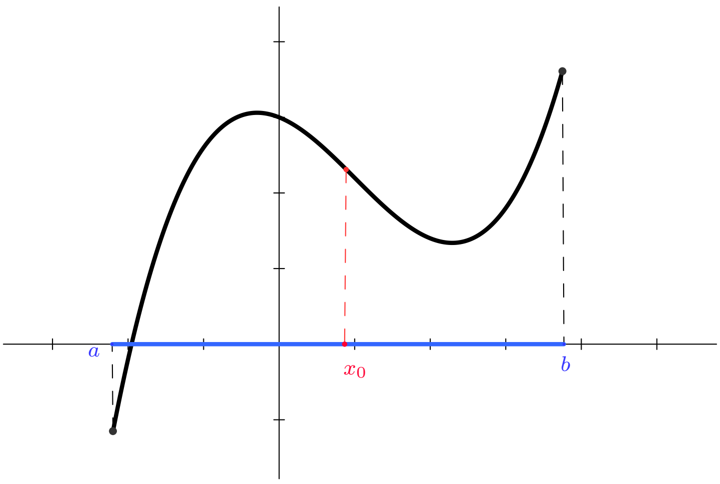
Exercice 5.1. *Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :*

a- $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *b-* $g(x) = \sqrt{2}x + \sin x$ *c-* $h(x) = \frac{x}{x+1}$

6 Concavité et point d'inflexion

Ces notions dérivent du comportement de la courbe d'une fonction donnée par rapport à ses tangentes sur un intervalle donné où elle y est continue et dérivable.

Activité 6.1.
Le plan étant muni d'un repère $(O; I; J)$, soient a et b deux réels tels que $a < b$.
On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $[a; b]$ est donnée ci-dessous :



Soit α un réel appartenant à $]a; b[$. On note D_α la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α.

1. *Tracer D_α pour 3 valeurs quelconques de α appartenant à l'intervalle $]a; x_0[$ et donner dans chaque cas la position relative de D_α et $\mathcal{C}_f$.*
2. *Reprendre la question précédente sur $]x_0; b[$*
3. *En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de ses tangentes sur chacun des intervalles $]a; x_0[$ et $]x_0; b[$.*
4. *Représenter la tangente au point d'abscisse x_0.*

5. *Que remarquez-vous par rapport à cette dernière tangente ?*

Activité 6.2.

On considère une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f et par (T), la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point M_0 d'abscisse x_0.

(T) a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

On se propose de déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (T) sur l'intervalle I.

Pour cela, on considère la fonction,

$$g : x \longmapsto f(x) - y = f(x) - [f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)].$$

On a $g(x_0) = 0$.

Par ailleurs, g est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Donc, $g'(x_0) = 0$.

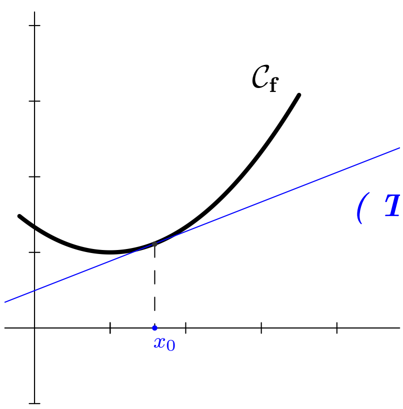
1. *Si f'' est strictement négative sur I, alors f' est strictement décroissante sur I.*
   (a) *si $x < x_0$, alors $f'(x) > f'(x_0)$; c'est-à-dire $g'(x) > 0$. Donc g est croissante.*
   (b) *si $x > x_0$, alors $f'(x) < f'(x_0)$; c'est-à-dire $g'(x) < 0$. Donc g est décroissante.*

   On déduit le tableau de variation de g sur I :

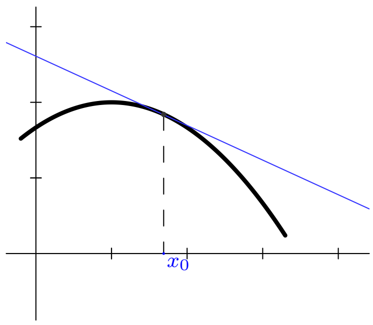
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

   On observe à partir de ce tableau que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$, $g(x) < 0$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (T).

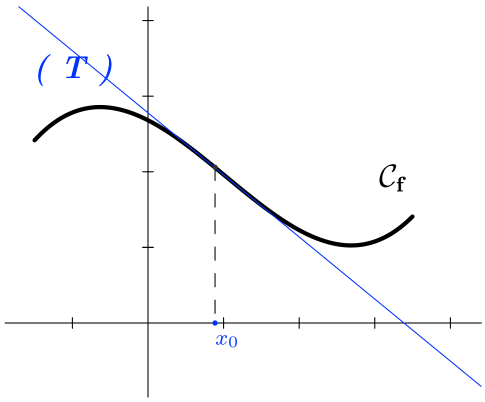
   On dit que f est ***concave*** *. On a le schéma suivant :*



2. *On montre de même que si f'' est strictement décroissante sur I, alors $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (T).*
   On dit que f est ***convexe****. On a le schéma suivant :*



3. *Si f'' s'annule et change de signe en x_0, alors (T) coupe la courbe au point M_0.*
   *On dit que M_0 est un point d'****inflexion****. On a le schéma suivant :*



4. *Si f'' s'annule sans changer de signe en x_0, g garde un signe constant sur I. Mais le point d'abscisse x_0 n'est pas un point d'inflexion.*

D'où,

Propriété 6.1.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative f.

P_1- *$\mathcal{C}_f$ est au* ***dessus*** *de ses tangentes sur I si f'' est strictement positive sur I.*

P_2- *$\mathcal{C}_f$ est en* ***dessous*** *de ses tangentes sur I si f'' est strictement négative sur I.*

P_3- *Le point $M_0\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ est un point d'****inflexion*** *si f'' s'annule et change de signe en x_0.*

Remarque 6.1.
La propriété P_3 précédente donne une condition suffisante, mais non nécessaire pour qu'un point soit un point d'inflexion pour une courbe.

Exemple 6.1.

Considérons la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^3+1 & si \;\; x \in]-\infty;0] \\ x^2+1 & si \;\; x \in]0;+\infty[\end{cases}$

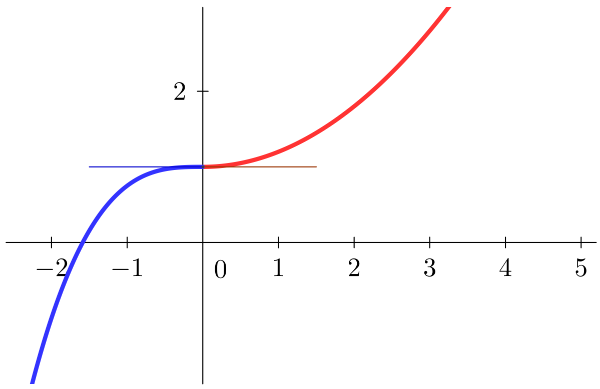
On peut observer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme fonction polynôme et on a $f'(x) = 3x^2 \; \forall x \in]-\infty;0[$ et $f'(x) = 2x \; \forall x \in]0;+\infty[$.
D'autre part on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x^3}{x} = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x^2}{x} = 0.$$

La fonction f est donc dérivable en 0 de nombre dérivé $f'(0) = 0$.
Étudions la dérivabilité de de f' en 0. on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{3x^2}{x} = 0 \quad et \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{2x}{x} = 2.$$

On en déduit que f'n'est pas dérivable en 0, et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.
Par ailleurs la représentation graphique de f est donnée par :



On peut observer à partir de la figure que la courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 0, c'est donc un point d'inflexion.

7 EXERCICES

Exercice 1. *On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - x^2$. Soit α un réel strictement positif.*
On note D_α la tangente à la courbe de f au point d'abscisse α, A et B les points d'intersection de D_α avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement dans un repère (O ;I ;J).

1. *Déterminer les coordonnées des points A et B.*
2. *Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ et le périmètre P du triangle AOB en fonction de α*

3. *Déterminer α tel que $\mathcal{A}'(\alpha) = 0$. On note α_0 cette valeur.*

4. *Justifier que $\mathcal{A}(\alpha_0)$ est l'aire maximale.*

Exercice 2.
On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 6$

a- *Montrer que f admet un point d'inflexion dont on déterminera ses coordonnées.*

b- *Étudier la position relative de la courbe de f et de ses tangentes.*

c- *Écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.*

d- *En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $x^3 - 5x^2 + 3x + 6 > -4x + 9$*

Exercice 3.
Soit la fonction f définie sur $]0; 2\pi[$ par $f(x) = (1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\sin x)\cos x$

a- *Démontrer que f est deux fois dérivable sur $]0; 2\pi[$.*

b- *Calculer les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ de f.*

c- *Dresser le tableau de variation de f'' sur $]0; 2\pi[$.*

d- *En déduire les points d'inflexions de f sur $]0; 2\pi[$.*

Exercice 4. *Point d'inflexion et minimum*
On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a,b, c et d sont des réels.
Déterminer les réels a,b,c et d sachant que f admet minimum au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que le point de coordonnée $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un point d'inflexion à la courbe de f.

Exercice 5.
On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 + |x|$.

1. *Donner une écriture de f sans le symbole de valeur absolue.*
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse 0.*
3. *Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau donnant les variations de f en fonction de x.*
4. *Donner la nature du point M_0 d'abscisse 0.*

On considère la fonction h définie par $h(x) = (x - 1)\sqrt{x - 1}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de la fonction h.*
2. *Étudier la continuité et la dérivabilité de h au point d'abscisse 1.*
3. *Déterminer la dérivée de h et dresser le tableau donnant les variations de h en fonction de x.*

4. (a) *Donner l'équation de la tangente* (T) *à la courbe de* h *au point d'abscisse* 1.

   (b) *Étudier la position relative de la courbe de* h *par rapport à la tangente* (T).

   (c) *En déduire la nature du point* M_1 *d'abscisse* 1.

Exercice 6.

On considère dans le plan, la droite (D) *d' équation* $ax + by + c = 0$ *et le point* $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *un point de la droite* (D). *On note* $d = AM$.

1. *On pose* $K = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$
   Démontrer que pour $x = \dfrac{b^2x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2}$ *on a :* $K = \dfrac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$

2. *On suppose que* $b \neq 0$

   (a) *Exprimer* d *comme une fonction de* x.

   (b) *Déterminer* x *pour que* d *soit minimale.*

   (c) *En déduire les coordonnées du point* H, *projeté orthogonale du point* A *sur la droite* (D).

3. *Retrouver alors la formule* $\mathcal{D}((D), A) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice 7.

On considère trois réels a, b *et* c *tels que* $a + \pi^2 b = 0$. *Démontrer que la courbe de la fonction* f *définie par* $f(x) = bx^3 + ax + c\sin x$ *rencontre toujours l'axe des abscisses dans l'intervalle* $[0; \pi]$.

Exercice 8.

Démontrer que pour tout réels a_1, a_2,$\cdots$, a_n *tel que* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ *; l'équation*

$$na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdot + 2a_2 x + a_1 = 0$$

admet au moins une racine dans l'intervalle $[0; 1]$.

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Exercice 13.

Exercice 14.