Projet Prenum-AC, ENS Yaoundé

1. Dénomination de la ressource et des contributeurs

Titre de la ressource	COMPLEMENTS SUR LES FONCTIONS
Nom de l'étudiant	KAMBOU DOPMO KLES BARNEY
Nom de l'encadreur de l'ENS	Simeon FOTSO
Nom de l'Inspecteur	MOUNCHINGAM ABDOU SALAM
Nom de l'Encadreur du Lycée	Pascal TSOULEU

2. Objectifs pédagogiques spécifiques

Objectif pédagogique spécifique 1: Rappel sur la notion de limite d'une fonction.

Objectif pédagogique spécifique 2: Déterminer la parité et la périodicité d'une fonction(si elle existe).

Objectif pédagogique spécifique 3: Déterminer les éléments de symétrie(s'ils existent).

Objectif pédagogique spécifique 4: Construire la courbe représentative d'une fonction déduite d'une de ses parties à l'aide des éléments de symétrie.

Objectif pédagogique spécifique 5: Etudier les branches infinies d'une fonction.

Objectif pédagogique spécifique 6: Construire la courbe représentative d'une fonction à l'aide de l'étude des branches infinies.

3. Liens avec les autres parties du programme

les autres parties du programme en lien avec **les complèments sur les fonctions**; comme cela se lit,apporte des complèments à l'étude d'une fonction.Donc on peut citer entre autres: **- Etude d'une fonction réelle.**

- Les fonctions logarithmes népériènnes.

- Les fonctions exponentielles.

Il faut aussi noter que la notion de complèment sur les fonction sera trés importante pour le jeune bachelier et ceci dés ces premiers cours de mathématiques à l'université dans la construction et l'nterprétation des courbes planes vue dans les filière scientifiques.

4. Plan de la ressource

Introduction

Lors de l'étude d'une fonction faite en classe de premier nous nous souvenons que la représentation graphique de la dite fonction fait partir ou est la partie culminante de cette étude.Donc dans l'optique de rendre plus simple cette partie de l'étude, il est plus juducieux et de connaitre le comportement de la courbe en des points ou meme à l'infinie. c'est pourquoi nous devrons savoir maitriser les notions suivantes: **les éléments de symétrie** "axe de symétrie & centre de symétrie"; **les branches infinies et les courbes déduites de celle-ci.**

Dans cette ressource nous nous proposons de donner quelques technique de détermination les éléments de symétrie en nous basant des définitions et d'étude explicite des branches infinies d'une fonction.

Pré-requis nécessaires

Pour bien aborder cette réssource les pré-requis nécéssaire sont:

- La notion de limites;

- La notion de symétrie;

Sommaire:

I°) **PARITE-PERIODICITE ET ELEMENTS DE SYMETRIE**

II°) **ETUDE DES BRANCHES INFINIES**

III°) Exercices

1 PARITE-PERIODICITE ET ELEMENTS DE SYMETRIE

Dans ce paragraphe, nos connaissances géométriques en symtries nous serons très utiles pour l'aboutissement de notre objectif.

1.1 PARITE:

1.1.1 Activité1:

Soient f et g deux fonctions définies sur $[-5;5]$ et $]-3;3[$ par: $f(x) = 2x^4 + 3x^2$.et $g(x) = x^3 - 5x$.

∘ Vérifier que $-x \in Df \cap Dg$.et calculer $f(-x)$; et $g(-x)$.

∘ Que constatez-vous ?

Solution1:

∘ $Df = [-5;5]$ et $Dg =]-3;3[$ étant des intervalles symétriques par rapport à 0.Alors $-x \in Df \cap Dg$. $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2$; $g(-x) = (-x)^3 - 5(-x)$

$$= 2x^4 + 3x^2 \qquad = -x^3 + 5x$$

$$= f(x) \qquad = -g(x).$$

∘ On remarque que : $f(-x) = f(x)$; $g(-x) = -g(x)$.

1.1.2 Définition:

★ Une fonction f dite *paire* ;si $\forall x \in Df$;$-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$.

★ Une fonction f dite *impaire* ; si $\forall x \in Df$;$-x \in Df$ et $f(-x) = -f(x)$.

1.1.3 Exercices d'application:

1.2 PERIODICITE:

1.2.1 Activité2:

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \tan(x)$

∘ Calculer $h(x+\pi)$;$h(x+2\pi)$;puis comparer avec $h(x)$.

∘ Donner la période T (le plus petit espace où la courbe se repète)de h;puis en déduire le domaine d'étude de .

Solution2:

∘ $h(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \tan x$.Donc $h(x+\pi) = h(x)$.

$h(x+2\pi)=\tan(x+2\pi)=\tan x$.Donc $h(x+2\pi)=h(x)$.

○ D'après ce qui précède et comme $\pi \prec 2\pi$;alors h admet pour période $T=\pi$ et le domaine d'étude de h est $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

1.2.2 Définition:

★ Une fonction f est dite *périodique de période T*, si $\forall\ x\in Df$, $x-T\in Df$; $x+T\in Df$ et $f\ (x+T)=f\ (x)$ .on peut alors limiter d'abord l'étude à l'intervalle $I\subset Df$ d'amplitude T et l'on déduit le graphe complet par les translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$ ou $k\in\mathbb{Z}$.

1.2.3

1.3 AXE DE SYMETRIE:

Soit f une fonction réelle admettant Df comme ensemble de défini; et soit $a,b\in\mathbb{R}$.

1.3.1 Activité3:

Soit f la fonction définie par : f(x)=3x^2+4x+$\frac{4}{3}$.

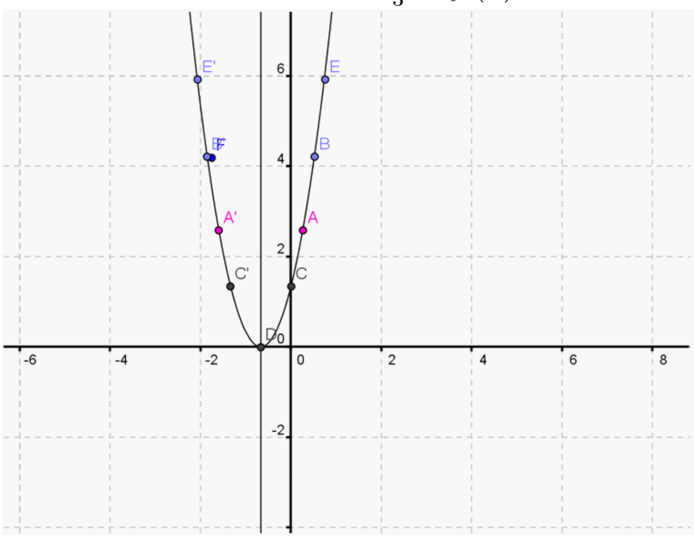
- Calculer $f\left(2\times\frac{-2}{3}-x\right)$ et comparer avec $f(x)$.
- Construire la courbe Cf de f l'axe $(\triangle)$: $x=-\frac{2}{3}$.
- Soit f_o la restriction de f sur $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right[$.

· Faire la symétrie de Cf_o par rapport à $(\triangle)$; que constatez-vous?

Solution3:

○ $f\left(2\times\frac{-2}{3}-x\right)=3\left(\frac{-4}{3}-x\right)^2+4\left(\frac{-4}{3}-x\right)+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(3x+2)^2$

$=3x^2+4x+\frac{4}{3}=f(x)$.



∘ On remarque que les points symétriques de Cf_o par rapport à l'axe $(\triangle)$ sont situés sur Cf .Donc la courbe Cf admet l'axe $(\triangle)$ comme axe de symétrie.

1.4 Définition:

On dit que la courbe représentative de f notée Cf admet la droite d'équation $x = a$ comme *axe de symétrie*, si pour tout $x \in Df$,$2a - x \in Df$ et $f(2a - x) = f(x)$.

1.4.1 Propriétés:

Soit la fonction f et Cf sa courbe représentative.Les propositions suivantes sont équivalentes.

1· La courbe Cf admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$.

2· Pour tout $x \in Df$;$a + x \in Df$, $a - x \in Df$ et $f(a + x) = f(a - x)$.

3· Pour tout $x \in Df$;posons $X = x - a$ tel que $X \in Df$, f :$x \longmapsto f(X)$ est paire.

Preuve:(**exercice dirigé**)

$1 \Longrightarrow 2$) Supposer que la droite $x = a$ est axe de symétrie à la courbe Cf; poser $X = a - x$. Calculer $f(2a - X)$; utiliser l'hypothèse recurrence pour avoir le résultat.

$2 \Longrightarrow 3$) admise.

$3 \Longrightarrow 1$) Supposer que $X = x - a \longmapsto f(X)$ est une fonction paire c'est à dire la droite $X = 0$ est axe de symétrie à sa courbe.Faites la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$ de la fonction précédente et montrer que $f(X + a)$ admet la droite $x = a$ comme axe de symétrie à sa courbe.

1.4.2 Exercices d'application:

1.5 CENTRE DE SYMETRIE:

1.5.1 Activité4:

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{3x+1}{x-4}$.

∘ Déterminer l'ensemble de définition de g.

∘ Calculer $g(2 \times 4 - x)$ et $-g(x) + 2 \times 3$.

∘ Que constatez-vous ?

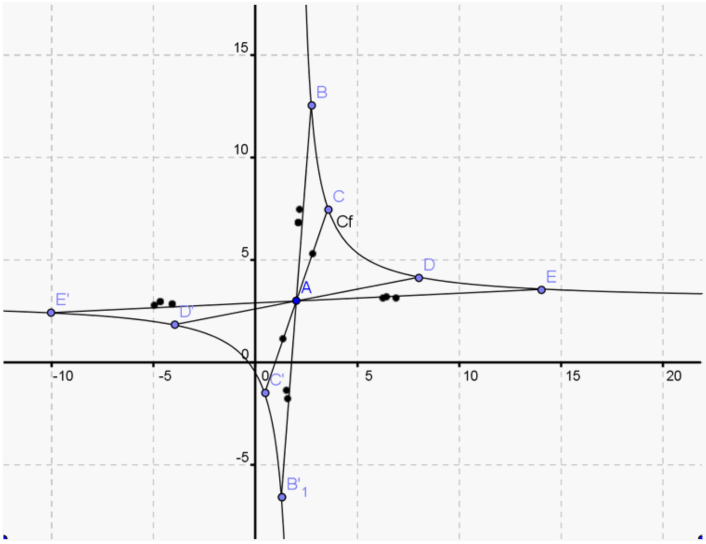
∘ Construire Cf et faites la symétrie de la restriction de Cf sur $]4; +\infty[$par rapport au point A$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

∘ Que remarquez-vous?

Solution4:

- La fonction g existe si et seulement si $x-4\neq 0 \Longleftrightarrow x\neq 4$.Donc Dg=$]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$.
- $g\left(2\times 4-x\right)=3+\frac{7}{(8-x)-4}=\frac{3(4-x)+7}{4-x}=\frac{3x-19}{x-4}$.

  $-g\left(x\right)+2\times 3=-\frac{3x+1}{x-4}+6=\frac{3x-19}{x-4}$.
- On constate que $g\left(2\times 4-x\right)=-g\left(x\right)+2\times 3$.



- On remarque que les points symétriques de la restriction à Cf sur $]4;+\infty[$ par rapport au point A$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$sont situés sur la courbe Cf.Donc la courbe Cf admet le point A$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ comme centre de symétrie.

1.5.2 Définition:

On dit que la courbe représentative de f notée Cf admet le point de coordonnées(a,b) comme <u>*centre de symétrie*</u>, si pour tout $x\in Df$, $2a-x\in Df$ et $f\left(2a-x\right)+f\ \left(x\right)=2b$.

1.5.3 Propriétés:

Soit la fonction f et Cf sa courbe représentative.Les propositions suivantes sont équivalentes.

1· La courbe Cf admet le point decoordonnées (a,b) pour centre de symétrie .

2· Pour tout $x\in Df$;$a+x\in Df$, $a-x\in Df$ et $f\left(a+x\right)+f\left(a-x\right)=2b$.

3· Pour tout $x\in Df$;posons $X=x-a$ tel que $X\in Df$, f :$x\longmapsto f\left(X\right)-b$ est impaire .

<u>Preuve:</u>(exercice dirigé)

1$\Longrightarrow$2) Supposer que le point de coordonnées (a,b) soit un centre de symétrie à la courbe Cf;puis poser $X=a-x$ et faites le Calcule $f\left(2a-X\right)$;enfin utiliser l'hypothèse recurrence pour avoir le résultat.

2$\Longrightarrow$3) admise.

3$\Longrightarrow$1) Supposer que $X = x - a \longmapsto f(X) - b$ soit une fonction impaire c'est à dire le point de coordonnées $(0;0)$ est centre de symétrie à sa courbe.Faites la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ de la fonction précédente et montrer que $f(X+a)$ admet le point de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie à sa courbe.

1.5.4 corollaire:

★ Une fonction f dite *paire*, si sa courbe représentative Cf admet (OY) comme *axe de symétrie*. Donc on peut limiter l'étude de f à $\mathbb{R}^+ \cap Df$ et l'on déduit le graphe complet par symétrie axiale (OY).

★ Une fonction f dite *impaire*, si sa courbe représentative Cf admet le point $(0,0)$ comme *centre de symétrie*. Donc on peut limiter l'étude de f à $\mathbb{R}^+ \cap Df$;puis l'on déduit le graphe complet par symétrie centrale en $(0,0)$.

Preuve:(**admise**).

1.5.5 Exercices d'application:

2 ETUDE DES BRANCHES INFINIES:

Dans cette partie,la connaissance du calcul des limites des fonctions est prépondérante pour l'application des définitions et propriétés qui suivent.

2.1 ASYMPTOTES:

2.1.1 Asymptote parallèle à l'un des axes:

Activité5: Soit f une fonction définie par: f$(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

∘ Déterminer le domaine de définition de f.

∘ Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

∘ Construire la courbe Cf et les droites $(\triangle_o) : x = -1$;$(\triangle_1) : y = 3$.

∘ Quelle remarque faites-vous sur le comportement de la courbe Cf au voisinage des droites $(\triangle_o)$ et $(\triangle_1)$?

Définition: soit f une fonction et (Cf) sa courbe représentative.

▲ Lorsque f a une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $\pm\infty$ notée $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$,on dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe Cf.

▲ Lorsque f a une limite infinie à droite ou à gauche en $x_0 \in \mathbb{R}$ notée,on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à la courbe Cf.

Exercices d'application: Déterminer les asymptotes à les courbes des fonctions suivantes si elles existent. $f\ (x) = \frac{2\ x-1}{\sqrt{x+3}}$; $g\ (x) = \frac{3x^2+1}{x^2-4}$.

2.1.2 Asymptote non parallèle aux axes :

Définition: soient f une fonction et Cf sa courbe représentative et $a, b \in \mathbb{R}$.
la droit (∇) d'équation $y = ax + b$, $(a \neq 0)$ est appelée *asymptote* à la courbe Cf ;si $\lim_{x \longmapsto \pm\infty} [f\ (x) - (ax + b)] = 0$.

propriété: soit f une fonction et Cf sa courbe représentative.
La droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote* à Cf si et seulement si, $lim_{x \longmapsto \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $lim_{x \longmapsto \pm\infty} [f\ (x) - ax] = b$.

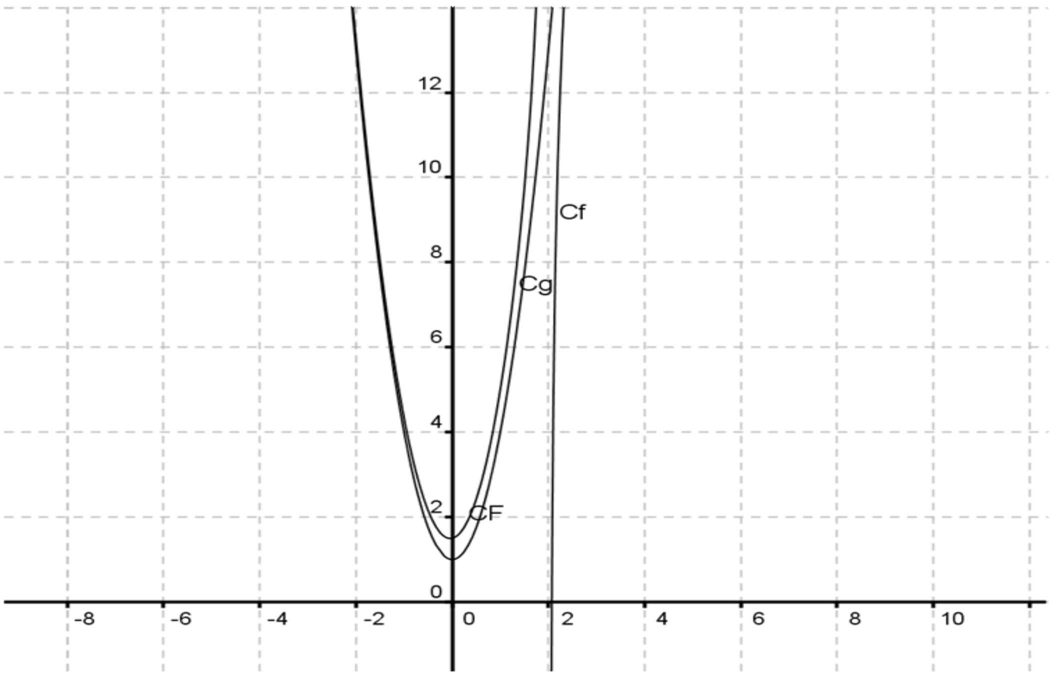
preuve:(**exercice dirigé**)

•supposer que la droite $y = ax + b$ est asymptote à Cf en $+\infty$.
considèrer la fonction $h : x \longmapsto f\ (x) - (ax + b)$;vérifier que $\lim_{x \longmapsto +\infty} h\ (x) = 0$.

• Montrer que $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}$.puis calculer $\lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $lim_{x \longmapsto +\infty} [f\ (x) - ax]$

• supposer $\lim_{x \longmapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim_{x \longmapsto +\infty} [f\ (x) - ax] = b$.
Montrer que $\lim_{x \longmapsto +\infty} [f\ (x) - (ax + b)] = 0$.

Remarque: De manière plus générale, on dit que la courbe (Γ) d'équation $y = g\ (x)$ est asymptote à la courbe Cf , si $lim_{x \longmapsto \pm\infty} (\ f\ (x) - g\ (x)) = 0$.
c'est le cas des représentations graphiques des fonctions $f\ (x) = 3x^2 + 1$ et $g\ (x) = \frac{3x^3-6x^2+x-3}{x-2}$.



car on obtient le résultat suivant : $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-g(x)]=0$.

2.2 DIRECTION ASYMPTOTIQUE :

Dans ce paragraphe ,on suppose que lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$; $f(x)$ a une limite infinie ie $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$

Ainsi on étudie la limite de $\frac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

On distingue trois cas :

2.2.1 1$^{\text{èr}}$cas : $\frac{f(x)}{x}$ a une limite infinie;

Si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ et $lim_{x\longmapsto\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$,alors il n'y a pas d'asymptotes ,et l'on dit que la courbe Cf admet *une branche parabolique dans la direction* (oy).

2.2.2 2$^{\text{ème}}$cas : $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie;

Si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ et $lim_{x\longmapsto\pm\infty}\ (f(x)-ax)=a$,on a deux cas possibles:

- pour $a=0$,on dit que Cf admet *une branche parabolique de direction* (OI).
- pour $a\neq\ 0$,on étudie la limite $lim_{x\longmapsto\pm\infty}\ (f(x)-ax)$.

$\star$si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}\ (f(x)-ax)=b,\quad b\in\mathbb{R}$,on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est *asymptote à* Cf .

$\star$si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$,on dit que Cf admet *une branche parabolique de direction de la droite d'équation* $y=ax$.

$\star$si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}(f(x)-ax)$ n'existe pas, alors Cf n'admet ni asymptote, ni branche parabolique; mais Cf admet *une direction asymptote,celle de la droite d'équation* $y=ax$.

2.2.3 3èmeCas: $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite.

Si $lim_{x\longmapsto\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ et $lim_{x\longmapsto\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite ,alors on dit que n'admet *ni asymptote, ni branche parabolique, ni direction asymptotique*.

Tableau récapitulatif: Les propriétés sur-cités conduissent à un tableau qui récapitulise celles-ci. Ici les valeurs a et b désignent les limites suivantes; $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$; $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=b$.

a=+∞ ou a=-∞	Branche parabolique de direction celle (oy)
a∈ ℝ et b∈ ℝ	La droite d'équation y=ax+b est asymptote
a∈ ℝ et b=±∞	Branche parabolique dirigée par la droite d'équation y=ax
a∈ ℝ et b n'existe pas	Direction asymptotique dirigée par la droite d'équation y=ax
a n'existe pas	Ni asymptotes, ni direction asymptotique, ni branche parabolique

Exemple: soit la fonction g définie par: $g(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-1}{(x-3)^2}$.

∘ Déteminons le domaine de définition de g.

g(x) existe si et seulement si $(x-3)^2\neq 0\Longleftrightarrow(x-3)\neq 0\Longleftrightarrow x\neq 3$.

Donc $Dg=\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$.

∘ Calculons les limites aux bornes du Dg.

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty$ (ceci conditionne l'existance d'une branche infinie) ;

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=-\infty$ (ceci conditionne l'existance d'une branche infinie);

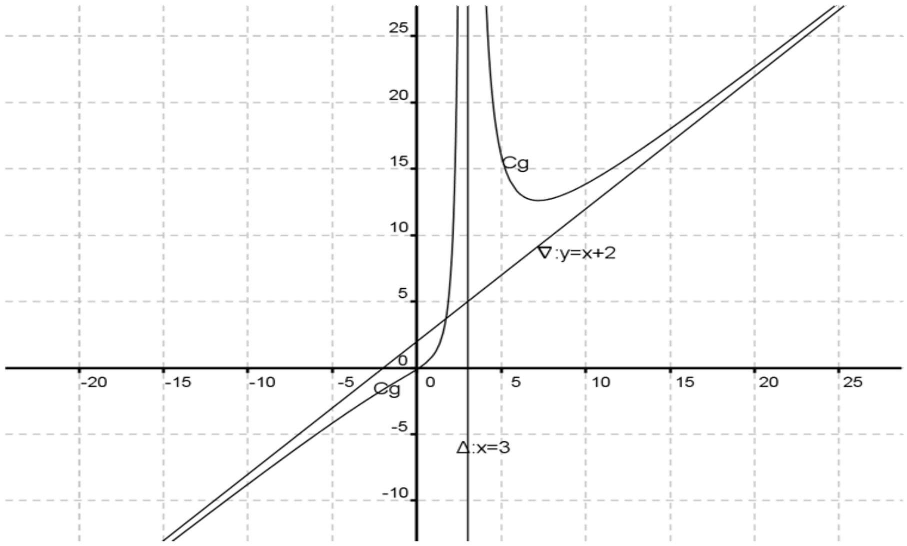
$\lim_{x\to 3}x^3-4x^2+8x-1=34$; $\lim_{x\to 3}x-3=0$.Donc $\lim_{x\to 3}g(x)=\lim\frac{34}{0}=\pm\infty$ ie la courbe Cg admet la droite d'équation x=3 pour asymptote verticale.

∘ Etudions les branches infinies à Cg.

Calculons $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3}=1\in\mathbb{R}$ (ie il n'y a pas de branche parabolique de direction (o puis calculons $\lim_{x\to\pm\infty}[g(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x-1}{(x-3)^2}=2\in\mathbb{R}$.

Donc la droite d'équation $y=x+2$ est une asymptote dite oblique à la courbe Cg.

∘ Construisons Cg et ses asymptote.



Exercices d'application: Déterminer le domaine de définition et étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$; $h(x) = x + x\cos(x)$; $r(x) = \sqrt{x}$; $u(x) = x^3 + 3$.

$v(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-1}}$.

3 *Exercices :*

3.1 Exercices:

Deux sociétés d'étude de marché proposent à une autre société d'alimentation de la place,une étude sur l'évolution de la demande en fonction du temps.Grace à certains mathématiciens(modélisateurs) ont pu à partir des données attribuer par les sociétés A et B;élaborer un modèle mathématique de cette évolution qui est une fonction réelles:

Modèle de la société A:

Modèle de la sociéte B:

Après une étude mathématique médiculeux,dites la-quelle des deux sociétés d'étude prédit un avenir prospère.

3.2 Exercice:

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x(x-2)}$.

▷ Déterminer le domaine de définition de f.

▷ Etudier la parité de f ,puis calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.

▷ Que peut-on conclure sur la courbe représentative de f ?

▷ Etudier les branches infinies et la dérivabilité de f en $x=1$.

▷ Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative Cf dans un plan rapporté à un repère $\left(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

3.3 Exercice:

On considère la fonction g définie par: $g(x)=x-\ln|x|$.

▷ Etudier les variations de g.

▷ Déterminer les branches infinies ou les asymptotes si elles existent.

▷ Déterminer la position relative de Cg par rapport aux branches infinies.

▷ Trouver l'équation de la tangente (T) à Cg au point d'abcisse $x=-1$; puis construire Cg et (T).

3.4 Exercice:

On considère la fonction h définie par: $h(x)=\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos^2(x)}$

▷ Déterminer l'ensemble de définition de $h(x)$.

▷ Etudier la périodicité de h ;calculer $h(x+\pi)$; donner une interprétation graphique et en déduire le domaine d'étude de h.

▷ Etudier les variations et construire le graphique de h.

▷ En déduire la courbe complète de h dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

3.5 Exercice:

Soit la fonction f définie par: $f(x)=x\left|1+\frac{1}{x}\right|^{-1}$, *pour* $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

▷ Déterminer l'ensemble de définition de f.

▷ Etudier les variations de la fonction f et construire la courbe représentative Cf dans un repère orthonormé.

3.6 Exercice:

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{(x-3)^2}+\frac{4}{x+2}$ et (Cf) sa courbe représentative dans le repère $\left(o;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$.

▷ Déterminer le domaine de définition de f .

▷ Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

▹ Montrer que (Cf) admet comme asymptotes les droites $(\triangle_o)$ et $(\triangle_1)$ dont on déterminera les équations.

▹ (Cf) admet-elle une asymptote verticale ? Justifier votre reponse.

▹ Etudier les positions relatives de (Cf) ; de $(\triangle_o)$ et de $(\triangle_1)$; puis construire la courbe (Cf) et les droites $(\triangle_o)$ et $(\triangle_1)$