PRIMITIVES ET INTEGRALES EN TERMINALE "C"

Rédigé par:

KOUOMOGNE KAMGAING Laurent

Sous la direction de:

Dr TEMGOUA ALOMO Etienne R.

Mr. SIELINOU Damase

Mr. FEUDJIO Anicet

Yaoundé, le 05 Juillet 2013

♣ Table des matières ♣

Chapitre Un

PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1.1 INTRODUCTION

Lors de l'étude d'une fonction faite en classe de *Première "C"* nous nous souvenons qu'étudier le signe de la dérivée était une étape capitale sinon la plus importante. Dès lors si nous avons une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ il est évidant que nous pouvons déterminer le signe de cette fonction : en résolvant l'inéquation $f(x) \leq 0$ par exemple. Si nous considérons le tableau de signe de f comme celui d'une fonction dérivée g' (c'est à dire que $f = g'$) on peut donc se poser la question : quelle est l'expression de g ? une telle fonction g lorsqu'elle existe est appelée une primitive de f. Nous allons dans ce chapitre étudier la condition d'existence et d'unicité de g ainsi que quelques méthodes de détermination de g.

Soit g une primitive de f et $a, b \in I$. La quantité $g(b) - g(a)$ sera appelée intégrale de f entre a et b. La notion d'intégrale aide aux calcul d'aires et de volumes.

Dans cette ressource nous proposons quelques techniques de détermination des primitives des fonctions réelles, nous introduisons la notion d'intégrale d'une fonction à partir d'une primitive de celle-ci et à chaque fois nous donnerons quelques propriétés.

1.1.1 Objectifs pédagogiques spécifiques

Les notions de primitives et d'intégrales étant nouvelles pour l'élève de terminale, à la fin de ce cours celui-ci doit être capable :

1^0) de définir les primitives d'une fonction,
2^0) d'énoncer et utiliser les propriétés des primitives,
3^0) de calculer les primitives de certaines fonctions continues sur un intervalle,
4^0) de définir l'intégrale d'une fonction et calculer sa valeur.

1.1.2 Liens avec les autres parties du programme

Les autres parties du programme en lien avec les primitives et intégrales sont :

- **la dérivation d'une fonction** ; En effet, lors la détermination des primitives d'une fonction, une bonne maîtrise de la dérivation est un très grand atout. En effet si f' est la dérivée d'une fonction f alors f est une primitive de f'

- **les équations différentielles** ; En effet, savoir déterminer les primitives d'une fonction facilite la résolution de certaines équations différentielles.

- **les nombres complexes** ; En effet, la détermination des primitives de certaines fonctions trigonométriques nécessite que celles-ci soient linéarisées. D'où la nécessite des nombres complexes.

- **la fonction logarithmique népérienne** car elle peut être définie comme la primitive de la fonction inverse $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

le calcul d'intégrales sera ici une application immédiate de la notion de primitive.

1.1.3 Place dans le programme

Il est souhaitable que le cours sur les primitives soit fait après :
- L'étude de la continuité des fonctions,
- L'étude de la dérivabilité des fonctions,
- L'étude des la linéarisation des fonctions trigonométriques (les nombres complexes).

Quant au cours sur le calcul d'intégrale, il peut être fait après :
- Le cours sur les primitives
- L'étude des fonctions logarithmes et exponentielles

Il est souhaitable que le cours sur les primitives et intégrales soit fait avant :
- Les équations différentielles,
- les suites numériques.

1.1.4 Pré-requis nécessaires

Pour bien aborder cette ressource les pré-requis nécessaires sont :
- Les dérivées de fonctions usuelles et quelques opérations sur les dérivées.
- La notion de solution d'une équation à une inconnue.
- La linéarisation d'une fonction trigonométrique.
- La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle.

1.1.5 déroulement de la ressource

Cette ressource peut être dispenser en 10 heures subdivisés conformément au plan de la manière suivante :
De l'introduction jusqu'au primitives des fonctions usuelles(1.2.2), 02 heures
De (1.2.2) au (1.2.6), 02 heures

De (1.4) au (1.4.2), 02 heures
En deux heures d'exercices on travaille avec les élèves sur la détermination des primitives des fonctions rationnelles (1.3.1), des fonctions trigonométriques (1.3.2) et de d'autres fonctions (1.3.3).
les deux dernière heures servirons à apprécier le niveau d'assimilation de ce cours par les élèves via un test basé sur les objectifs déclinés plus haut.

1.2 Primitives des fonctions continues.

1.2.1 Généralités

Activité

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 3$.

1°) Déterminer $F'(x)$.

2°) Soit la fonction L définie par : $L(x) = F(x) + 5$. Calculer L' la dérivée de L et vérifier que $L'(x) = F'(x)$

3°) Y a-t-il d'autres fonctions dont la dérivée est aussi égale à $F'(x)$? Si oui, donner deux exemples.

Solution

$$1°)\ F'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x.$$
$$2°)\ L(x) = -x^4 + x^3 - 2x^2 + 8.$$

On a donc :

$$L'(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x = F'(x)$$

3°) On sait qu'une constante a une dérivée nulle. On peut donc remplacer la constante 3 par un autre nombre sans changer la dérivée.

Appelons G et H deux fonctions répondant à la question.

$$\begin{array}{rcl} G(x) & = & -x^4 + x^3 - 2x^2 - 1 \\ H(x) & = & -x^4 + x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2} \end{array}$$

On a bien

$$F'(x) = L'(x) = G'(x) = H'(x)$$

.

Remarques Posons $f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 4x$.

∘ f est alors la fonction dérivée de F sur $\mathbb{R}$

∘ On dit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F de I vers $\mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que pour tout élément x de I , $F'(x) = f(x)$. [1].

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \text{ équivaut à } F \text{ est dérivable et } F'(x) = f(x)}.$$

Propriétés

Propriété 1 (admise).
Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur I. Par **Conséquent**,

- les fonctions polynômiales admettent des primitives sur $\mathbb{R}$
- les fonctions rationnelles admettent des primitives sur chaque intervalle où elles sont définies.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ admet des primitives sur $[0; +\infty[$.

Exercice
Pour chacune des fonctions f suivantes déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel f admet une primitive.

$$\begin{array}{llll} a) & f(x) & = & 2x+3 \ ; \\ b) & f(x) & = & 2x+3 \ ; \\ c) & f(x) & = & \frac{1}{2\sqrt{x}} \ ; \end{array}$$

propriété 2 (Ensemble des primitives d'une fonction)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.
Toutes les primitives de f sur I sont de la forme $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle par rapport à x.

Preuve. (Exercice guide) [3]

1) Poser $G(x) = F(x) + k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$. Dériver G et conclure.
2) Réciproquement, soit G une autre primitive de F.
Montrer que $(G(x) - F(x))' = 0$ et en déduit que $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

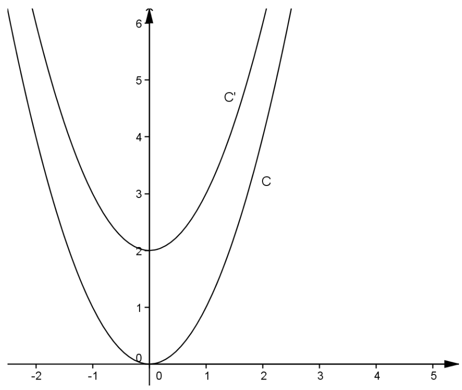
□

Remarques :

1) Si f admet une primitive F sur I alors elle en admet une infinité.
2) Toutes les primitives de f sur I sont de la forme :

$$x \longmapsto F(x)+k \quad où\ k \text{ est une constante par rapport } \textbf{à } x.$$

3) Si C est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f et G d'une autre primitives de f alors il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que la courbe représentative de G soit l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}\,(0,k)$.



$\left(\mathrm{C}\right)$ et $\left(\mathrm{C}'\right)$ représentent les courbes de deux primitives de la fonction f définie par $f\,(x)=2x$. $(c')=t_{\overrightarrow{u}(0,2)}\,(c)$.

Exemple

On donne $f\,(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

1° - Déterminer toutes les primitives de f sur $]0;+\infty[$.

2° - Déterminer la primitive G telle que $G(1)=\frac{1}{2}$.

- Déterminer la primitive H telle que $H(-1)=3$.

Solution

1° Une primitive F de f sur $]0;+\infty[$ est : $F(x)=x^2-\frac{1}{x}$. Toutes les primitives de f sont donc de la forme : $x \longmapsto x^2-\frac{1}{x}+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2° $G(x)=x^2-\frac{1}{x}+k$.

-$G(1)=1-1+k=\frac{1}{2}$ donc $k=\frac{1}{2}$ Ce qui donne $G(x)=x^2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$.

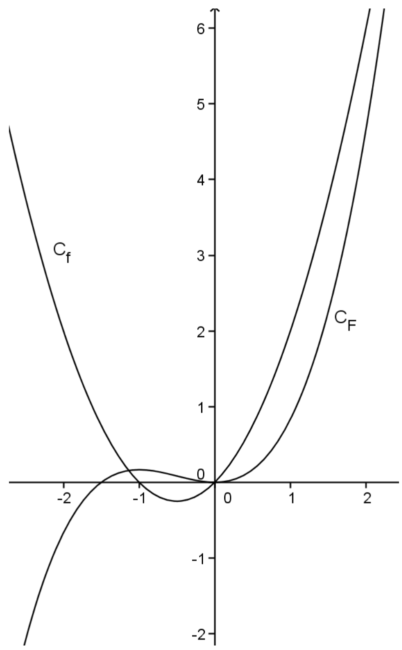
-$H(-1)=1+1+k=3$ donc $k=1$ Ce qui donne $G(x)=x^2-\frac{1}{x}+1$.

Remarque

Dans l'exemple précédent on a trouvé une seule fonction G vérifiant une condition donnée. Cette propriété peut se généraliser comme suit :

Propriété 3

Parmi toutes les primitives d'une fonction f sur I, il en existe une seule prenant la valeur y_0 en $x_0 \in I$. Ce résultat montre que dans l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle I, il existe une et une seule dont la courbe passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) avec $x_0 \in I$.



(C_f) est la courbe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ et $F(x) = \frac{1}{6}x^2(2x+3)$ est l'unique primitive de f dont la courbe (C_F) passe par l'origine du repère.

preuve. (exercice guide)

Existence :

Soit F une primitive de f sur I et (c) sa courbe dans un repère $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Soit x_0 un point de I et A le point de coordonnée (x_0, y_0).

1) Tracer la droite (D) passant par A et perpendiculaire à l'axe (Ox). Soit B le point d'intersection de (D) et (C).

2) Tracer la courbe (C') image de (C) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Remarquer que $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{j}$ avec $k = \overline{BA}$.

3) Vérifier que la fonction G représenter par (C') a pour expression $G(x) = F(x) + k$.

4) Vérifier que $G(x_0) = y_0$. Conclure.

Unicité :

Donnons nous 2 primitives F et G de f donc la courbe passe par le point de coordonnées (x_0, y_0).

1) Quelle relation y a-t-il entre F et G.

2) De $G(x_0) = F(x_o) = y_o$; en déduire que $F = G$. □

Exemple : On donne $f(x) = 2x+1$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \frac{1}{x}+3$ sur $I =]0, +\infty[$. Déterminer pour chacune des fonctions f et g la primitive dont la courbe passe par le point de coordonnées $(1, 2)$. c'est à dire vérifiant $F(1) = G(1) = 2$.

solution :

1) $F(x) = x^2 + x + k$. Il reste à trouver celle qui vérifie $F(1) = 2$.

$F(1) = 2 + k = 2 \Longrightarrow k = 0$. Donc $F(x) = x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.

2) $G(x) = \ln x + 3x + k$. Il reste à trouver celle qui vérifie $G(\mathbf{1}) = 2$.

$G(1) = 3 + k = 2 \Longrightarrow k = -1$. Donc $\mathrm{G}(x) = \ln x + 3x - 1$ sur $I =]0, +\infty[$.

Remarque : L'unicité de k dans chacun des cas précédant prouve l'unicité de la primitive.

Exercices

1) Déterminer une primitive F de $f(x) = x + cosx$ et donner les coordonnées (a, b) d'un point de la courbe de F.

2) En revenant à l'exercice (1) existe-t-il une autre primitive G de f telle que $G(a) = b$; déterminer la primitive G de f vérifiant $G(a) = b + 1$.

3) Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive F de f.

a) $f(x) = \sin x$ et vérifie $F(0) = 5$.

b) $f(x) = e^x + 2$.

c) $f(x) = e^x + 2$ et la courbe de F passe par le point de coordonnées $(0, 0)$.

1.2.2 Primitives des fonctions usuelles

Nous allons ici exploiter essentiellement nos connaissances sur les dérivées des fonctions étudié en classe de première et aussi nos connaissances des fonctions logarithmes et exponentielles.

Exemples fondamentaux :

La lecture du tableau donnant la dérivée des fonctions permet de dresser le tableau des primitives suivant :

f définie par	Une primitive F	sur l'intervalle I
0	$c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$x^n\ ;\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ;\ x > 0$	$\sqrt{x} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I =]\mathbf{0}; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I =]\mathbf{0}; +\infty[$ ou $I =]-\infty; \mathbf{0}[$
$\frac{1}{x^n}\ ;\ n > 1$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I =]\mathbf{0}; +\infty[$ ou $I =]-\infty; \mathbf{0}[$
$\cos x$	$\sin x + c\ ;\ c \in R$	$I = \mathbb{R}$
$\sin x$	-$\cos x + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\ ; n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I =]\mathbf{0}; +\infty[$
e^x	$e^x + c\ ;\ c \in \mathbb{R}$	$I = \mathbb{R}$
$\ln x\ ;\ x > 0$	$x \ln x - x$	$I =]\mathbf{0}; +\infty[$

1.2.3 Primitives des fonctions de la forme $u'.u^n$ où n est un nombre rationnel

Activité

Soit u une fonction continue sur un intervalle I et n un entier différent de -1.

1) Rappeler la dérivée de u^{n+1}.

2) En déduire une primitive de $u'u^n$.

3) Rappeler la dérivée de $\ln(u)$ et en déduire une primitive de $\frac{u'}{u}$.

Remarque : pour tout nombre rationnel $r \neq -1$, une primitive de $u'u^r$ est $\frac{u^{r+1}}{r+1}$.

Nous résumons les résultats obtenus dans le tableau suivant.

fonction	Une primitive
$u\prime.u^r \quad r \neq -1\ ;\ r \in\ Q$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^3}$. Déterminer une primitive F de f en précisant les intervalles sur lesquels f et F existent.

Solution.

Posons $v(x) = 2x - 1$ On a $v'(x) = 2$ On peut écrire $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{(2x-1)^3}$. Soit $f = \frac{3}{2} \times \frac{v'}{v^3} = \frac{3}{2}v'v^{-3}$.

Une primitive de $v'v^{-3}$ est $-\frac{1}{2}v^{-2} = -\frac{1}{2v^2}$.

On obtient

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{1}{2v^2}\right) \\ &= -\tfrac{3}{4v^2} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$F(x) = -\frac{3}{4(2x-1)^2}.$$

Les fonctions f et F existent sur chacun des intervalles $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; -\infty\right[$.

Exercice

1) Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :
$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^3}$ et vérifiant $F(2) = 0$.

2) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$; $g(x) = \frac{2}{2x+5}$; $h(x) = -2\tan(2x+1)$; $k(x) = 2e^{3+2x}$.

1.2.4 Primitives des fonctions de la forme $g'(h) \times h'$

activité

1) Soient g et h deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(h(x))$.

a) Calculer la dérivée de f.

b) En déduire une primitive de $g'(h) \times h'$.

c) Proposer une méthode de détermination des primitives de $f = g(h) \times h'$.

Résultat

Soit h une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $h(I)$. Une primitive de $g'(h) \times h'$ est $g(h)$.

Exemple

1) Une primitive de $u'e^u$ est e^u

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\left[3(x^2+1)^8 + 1\right]$ peut se mettre sur la forme $f = h'.g(h)$ avec $h(x) = x^2+1$; $g(x) = 3x^8+1$.
Une primitive de f est donc $F = G(h)$ où G est une primitive de g.

On a $G(x) = \frac{x^9}{3}$. D'où

$$F(x) = \frac{(x^2+1)^9}{3}.$$

1.2.5 Opération sur les primitives

Soit F une primitive de f , G une primitive de g ; a et b des nombres réels.

- Une primitive de $f+g$ est $F+G$.
- Une primitive de af est $a \times F$.
- Par conséquence une primitive de $af+bg$ est $aF+bG$.
- **Une primitive de $f'g+g'f$ est fg : ceci provient de la dérivation du produit de deux fonctions**.

Exercice :

On donne $f(x) = x^2 + 2\,;\;\; g(x) = sinx\,;\; h(x) = 2x^2 + 4\,;\;\; k(x) = 3x^2 + 6 + 3sinx$
1) Déterminer une primitive de f et une primitive de g.
2) En déduire une primitive de h et k.
3) En déduire une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.
$m(x) = -\left(x^2 + 2\right)\cos x + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\sin x.$
$n(x) = 3\left(x^2 + 2\right)\cos x$-$\left(x^3 + 6x\right)\sin x + 2x^2 + 4$

1.2.6 Exemples de recherche de primitives

Exemples 1
On donne $f(x) = x^2 + x + 1$. Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
Solution

$$f(x) = \tfrac{1}{3}\left(3x^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(2x\right) + 1$$

d'où $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
exemple 2
Soit $f(x) = \frac{3}{2x^2} + \frac{2}{3\sqrt{x}}$. Trouver une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.
Solution

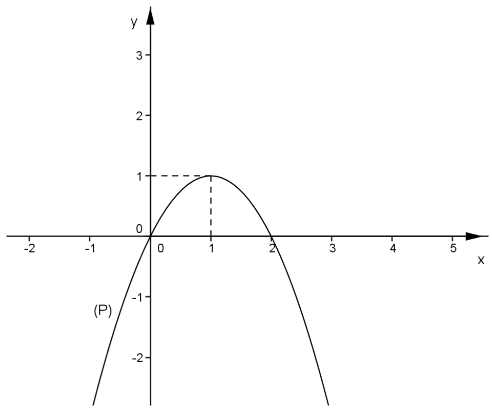
$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{x^2}\right) + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= -\tfrac{3}{2}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) + \tfrac{4}{3}\left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{aligned}$$

d'où $F(x) = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{3}\sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Exercices

Exercice 1 : Déterminer toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sachant que
$f(x) = (2x+1)(-x+3)$
Exercice 2 : Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par
$f(x) = (x+2)^3$.
Exercice 3 : Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par
$f(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 3)^2$.
Exercice 4 : Trouver une primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par
$f(x) = x - 1 + \frac{3}{(x+2)^3}$.

Exercice 5 :



La parabole (P) ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f.
1) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et (c) la courbe représentative de F. Dresser le tableau de variation de F.
2) On donne $F(1) = 0$. Donner une équation de la tangente à la courbe (c) au point d'abscisse 1.
3) Exprimer $f(x)$ puis $F(x)$ en fonction de x. Tracer (c).

1.3 Détermination des primitives

On donne dans ce qui suit des méthodes de détermination des primitives d'une fonction continue f, dans le cas où elles s'obtiennent à l'aide des fonctions élémentaires (fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielles).

1.3.1 Primitive des fonctions rationnelles

a) Décomposition d'une fonction en éléments simples

NB : cette partie sur la décomposition en éléments simples est surtout utile pour les enseignants pour aider les élèves à déterminer les primitives de certaines fonctions.

Il s'agit ici de transformer une fonction rationnelle irréductible en une somme de plusieurs fonctions rationnelles dont les dénominateurs sont :

- soit de la forme $(ax+b)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$
- soit de la forme $(x^2+px+q)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\triangle = p^2 - 4q < 0$.

Activité 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.
1) Factoriser son dénominateur.
2) On pose $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ a et b étant des réels.
a) Démontrer que a et b vérifient $(a+b)x + a - b = 2$.
b) Par identification selon les puissances de x, déterminer a et b.
c) Vérifier que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

Activité 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$.

1) Factoriser son dénominateur.

2) On pose $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$; a, b et c étant des réels.

a) Montrer que a, b et c vérifient l'équation : $(a+b)x^2 + (a+c-b)x + a - c = 1$.

b) Par identification selon les puissances de x, déterminer a, b et c.

Remarque :

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 1$ étant négatif, ($\triangle = -3 < 0$), le terme $\frac{1}{x^2+x+1}$ est multiplié par une fonction affine, (c'est à dire de la forme $cx + d$).

Activité 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^5+x^4-x+1}$.

1) Vérifier que $x^5 + x^4 - x + 1 = (x+1)^2 (x-1)(x^2+1)$.

2) On pose $f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+1}$.

a) Vérifier que :

$(b+c+d)x^4 + (a+e+2c+d)x^3 + (e-a+2c-d)x^2 + (a-e+2c-d)x + c - b - a - e = 2x^3 + 1$.

b) En déduire que $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{9}{8}$, $c = \frac{3}{8}$, $d = \frac{3}{4}$ et $e = \frac{1}{4}$.

Remarques

1) Comme dans le cas précédent à x^2+1 on associe un numérateur affine ($dx + e$) car son discriminant est négatif.

2) Le terme $x+1$ étant élévé au carré dans l'expression factorisé du dénominateur on le transforme sous la forme $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1}$.

Résumé

Pour décomposer une fonction rationnelle en une somme d'éléments simples on doit :

1) Factoriser le dénominateur de sorte que chaque facteur apparaissant soit :

- soit de la forme $(ax+b)^m$ avec $m \in \mathbb{N}$,
- soit de la forme $(x^2+px+q)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\triangle = q^2 - 4p < 0$.

2) Chaque terme de la forme $(ax+b)^m$ se transforme en une somme de m fractions :

$$\frac{a_m}{(ax+b)^m} + \frac{a_{m-1}}{(ax+b)^{m-1}} + ... + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \frac{a_1}{ax+b}$$

où a_m, a_{m-1} ... a_2 et a_1 sont des réels.

3) Chaque termes de la forme $(x^2+px+q)^n$ se transforme en une somme de n fractions :

$$\frac{b_n x+c_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{b_{n-1}x+c_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + ... + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q}$$

où les b_i et c_i ; $i = 1, .., n$ sont des réels.

4) Si on a $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $deg(p) \geq deg(q)$ alors il faut commencer par faire la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$.

On obtient $\frac{p(x)}{q(x)} = t(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ avec $deg(r) < deg(q)$. On décompose en éléments simples $\frac{r(x)}{q(x)}$.

Exemple

Dans chacun des cas suivants, décomposer f en éléments simples :

1) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

2) $f(x) = \frac{3}{(x+1)(x^2+2)}$.

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

Solution

1) Par division euclidienne on a $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2-1}$. Décomposons $\frac{2}{x^2-1}$.

On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

On écrit alors $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{b}{x+1}$. Ce qui nous donne $(a+b)x + a - b = 2$.

Par identification on a $a + b = 0$ et $a - b = 2$. Soit $a = 1$ et $b = -1$.

D'où $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ et par suite on a $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + 1$.

2) $f(x) = \frac{3}{(x+1)(x^2+2)}$. On écrit $f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+2}$.

On a alors $(a+b)x^2 + (b+c)x + 2a + c = 3$.

Par identification on a $a + b = 0$, $b + c = 0$ et $2a + c = 3$

Donc $a = c = 1$ et $b = -1$.

Donc $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2}$.

3) $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$. On écrit $f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$. Ce qui donne :

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{cx^3+dx^2+(a+b)x+b+d}{(x^2+1)^2}$$

On a $cx^3 + dx^2 + (a+b)x + b + d = x^2 - 1$

Donc $c = a + c = 0$, $d = 1$ et $b + d = -1$. C'est à dire $c = a = 0$, $d = 1$ et $b = -2$.

Donc $f(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{(x^2+1)^2}$.

Exercice

Décomposer en éléments simples chacune des fonctions ci-dessous :

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+1)(x^2+2)}$

b) $f(x) = \frac{1}{3x^2-2}$ d) $f(x) = \frac{x^3-3}{x^2-1}$.

Remarque : Décomposer une fonction en éléments simples permet de rendre plus facile la recherche des primitives des fonctions rationnelles.

b) Primitive d'une fonction rationnelle

Pour déterminer les primitives d'une fonction rationnelle f, il est souhaitable de commencer par décomposer f en éléments simples. Dès lors, la détermination des primitives d'une fonction rationnelle se réduit à la détermination des primitives des fractions $\frac{1}{(ax+b)^m}$ et $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ où $m \geq 1$; $n \geq 1$ sont des entiers naturels et $\triangle = p^2 - 4q < 0$.

$\boxed{b_1) \quad \text{Primitive de} \quad \frac{1}{(ax+b)^m}}$

Cas où $m = 1$
Une primitive de $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ est $F(x) = \frac{1}{a} \ln |ax + b|$.

Cas où $m > 1$
Une primitive de $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^m}$ est $F(x) = \frac{-1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}$.

Exemple
Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.
1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
2) $g(x) = \frac{3}{(2x-1)^2}$

Solution
1) Ici on a $m = 1$. Donc $F(x) = \ln |x + 1|$.
2) Ici on a $m > 1$. Donc $G(x) = \frac{-3}{2(2-1)(2x-1)^{2-1}} = -\frac{3}{4x-2}$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f.
a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ b) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ c) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ d) $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^4}$.

$\boxed{b_2) \quad \text{Primitive de} \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}}$

On commence ici par faire apparaitre au numérateur la dérivée du dénominateur. On obtient $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} = \frac{a}{2} \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.
Il suffit donc de déterminer une primitive de $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ et de $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.

i) Primitive de $\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$

Cas où $n = 1$

Une primitive de $f(x)=\frac{2x+p}{x^2+px+q}$ est $F(x)=\ln(x^2+px+q)$.

Cas où $n>1$

Une primitive de $f(x)=\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ est $F(x)=\frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}$.

Exemple

Déterminer une primitive de chacune des fonctions ci-dessous.

1) $f(x)=\frac{4x+10}{x^2+5x+8}$.

2) $g(x)=\frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^2}$.

Solution

1) $f(x)=\frac{4x+10}{x^2+5x+8}=2\times\frac{2x+5}{x^2+5x+8}$; or $\frac{2x+5}{x^2+5x+8}$ est de la forme $\frac{u'}{u^1}=\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+5x+8$.

D'où $F(x)=2\ln(x^2+5x+8)$.

2) Ici $n>1$ et $(x^2+3x+5)'=2x+3$. On a donc

$G(x)=\frac{-1}{(2-1)(x^2+3x+5)^{2-1}}=-\frac{1}{x^2+3x+5}$.

Exercice

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f.

a) $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ $\quad$ b) $f(x)=\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}$ $\quad$ c) $g(x)=\frac{2x}{(x^2+5)^2}$.

ii) Primitive de $\frac{1}{(x^2+px+q)^n}$.

NB : La recherche des primitives de telles fonctions n'est pas au programme de terminale C.

1.3.2 Primitives des fonctions trigonométriques.

Nous allons maintenant déterminer les primitives de fonctions trigonométriques. Ceci exige du lecteur quelques compétences telles que :

☐ Linéariser $cos^n x$ et $sin^n x$.

☐ Transformations d'une somme (respectivement produit) de fonctions trigonométriques de base en produit (respectivement somme) de fonctions trigonométriques de base.

Il est important de savoir que pour tout réel non nul b une primitive de la fonction $x\mapsto\cos(bx)$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{b}\sin(bx)$ et une primitive de la fonction $x(bx)$ est la fonction $x\mapsto-\frac{cos(bx)}{b}$.

Activités

Enoncé 1

1) Linéariser $\cos^4 x$.

2) que $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

3) En déduire une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \cos^4 x + \sin^3 x$.

Enoncé 2

On donne $f(x) = \cos(x)\sin^2(3x)$.

Déterminer l'expression linéarisée de $f(x)$ et en déduire en une primitive.

Remarques :

Transformer $\cos^n(bx)$ en $\left(\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right)^n$ et $\sin^n(bx)$ en $\left(\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\right)^n$ doit être un réflexe lorsqu'on cherche à déterminer les primitives des fonctions trigonométriques. Mais d'autres transformations sont souvent plus efficaces.

Exemple :

Déterminons les primitives de chacun des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sin 3x \cos^2(2x)$. b) $g(x) = \sin x + x\cos x$. c) $h(x) = \sin 2x \cos^2 2x$

solution :

a) On a :
$$\begin{aligned}\sin 3x \cos^2(2x) &= \left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{8i}\left(e^{i3x}-e^{-i3x}\right)\left(e^{i4x}+2+e^{-i4x}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{i7x}-e^{-i7x}}{2i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\end{aligned}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{4}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x$.

Une primitive F de f est donc

$$F(x) = -\frac{1}{28}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x$$

. b) En remarquant que la dérivée de $xsinx$ est $sinx + xcosx$,

on endéduit qu'une primitive de g est la fonction G définie par $G(x) = x\sin x$.

c) $h(x) = \sin 2x \cos^2 2x = -\frac{1}{2}\left[(-2\sin 2x)\cos^2 2x\right]$

donc h est sous la forme $-\frac{1}{2}u'u^2$ avec $u(x) = \cos 2x$

d'où une primitive H de h est $H(x) = -\frac{\cos^3 2x}{6}$.

Exercices :

exercice 1 :

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \cos^3 x$; b) $g(x) = \cos^3(x+1) + \tan x$; c) $h(x) = \sin 2x \cos^3 x$.

exercice 2 :

On donne $f(x) = \cos x \sin^2(2x+1)[2\sin x + \sin(2x+1)]$.
1) Ecrire f sous la forme $f = u'v + uv'$ où u et v sont à déterminer.
2) En déduire une primitive F de f .

exercice 3 :
Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes :
a) $f(x) = \sin x \cos^3 x$.
b) $g(x) = -3\sin(x+1)\cos^5(x+1)$ (de deux manières différentes).
c) $h(x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$.

1.3.3 Primitive d'autres fonctions

a) Primitives de $e^{ax}P(x)$, où a est un nombre complexe, et P un polynôme de degré n.

Exercice 1
Déterminer une primitive de $f(x) = e^x(x^2+1)$.
1) Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. Soit $g(x) = ax^2 + bx + x$ un polynôme.
déterminer la dérivée de $h(x) = e^x g(x)$.
2) a) Pour quelles valeur de a et b $h'(x) = f(x)$.
b) En déduire une primitive de $f(x)$.

En résumé, si p est un polynôme de dégré n, alors une primitive de $e^{ax}P(x)$ est de la forme $e^{ax}q(x)$ où q est un polynôme dégré n.
exemple Déterminer une primitive F de $f(x) = x^2 e^{2x}$.
solution Une primitive de f est de la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.
la dérivée de F est $F'(x) = [2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c]e^{2x}$.
En égalant $F'(x)$ et $f(x)$ on a : $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{4}$
Il en résulte que $F(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$.

Exercices
Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :
a) $f(x) = (5x^2+1)e^{3x}$. b) $g(x) = x^3e^x + xe^{-2x}$. c) $h(x) = (2x+2)e^{2x+1}$.

b) Primitives de $P(x)e^{ax}cos(bx)$ et $P(x)e^{ax}sin(bx)$, où P est un polynôme de degré n ; a et b sont deux nombres réels.

Exercice 2
Déterminer une primitive de $f(x) = (x^2+1)e^{3x}\cos 2x$.
1)

– a) Déterminer la dérivée de $p(x) = (x^2+1)e^{3x}[a(x)\cos 2x + b(x)\sin 2x]$ où a et b sont des polynôme de degré au plus 2.
– b) Identifier les fonctions $a\,(x)$ et $b\,(x)$ pour lesquelles $p'\,(x) = f\,(x)$.
– c) En déduire une primitive de $f\,(x)$.

En résumé, on cherche une primitive I de $f(x) = P(x)e^{ax}cos(bx)dx$ ou une primitive J de $g(x) = P(x)e^{ax}sin(bx)dx$ sous de la forme

$$I\ (ou\ J) = e^{ax}[Q(x)\cos(bx) + R\,(x)\sin(bx)].$$

où Q et R sont des polynômes de degrés au plus égales au dégré de p.

On peut également partir de la relation (★) ci-dessus, dériver et identifier pour obtenir les polynômes R et Q.

Exemple : Déterminer de deux manières différentes une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$t\,(x) = (x-1)\,e^{2x}\cos 3x\,;\quad g\,(x) = x^2\sin 2x.$$

Nous ferons ici un seul cas et l'autre est laissé comme exercice d'application pour le lecteur.

Déterminer de deux manières différentes une primitive G de $g\,(x) = x^2\sin 2x$.

1er methode : Posons $f\,(x) = x^2\cos 2x$ et $h\,(x) = f\,(x) + ig\,(x) = x^2e^{2ix}$.
une primitive de h est de la forme $H\,(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{2ix}$. En dérivant on a :

$$H^{'}\,(x) = [2iax^2 + (2ib+2a)\,x + b + 2ic]\,e^{2ix}.$$

Par identification on a : $a = \frac{i}{2}$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{i}{4}$

Par suite $H\,(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{2ix} = \frac{1}{4}\,(-2ix^2+2x+i)\,(\cos 2x + i\sin 2x)$.
La partie imaginaire de H est une primitive G de g. soit

$$G\,(x) = \frac{1}{4}\,[(1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x]$$

2^{ième} methode : Il s'agit pour nous de chercher une primitive de g sous la forme $G\,(x) = (ax^2+bx+c)\cos(bx) + (fx^2+gx+h)\sin(bx)$ où a ; b ; c ; f ; g ; et h sont des réels.

$G'\,(x) = [2fx^2 + (2g+2a)\,x + 2h + b]\cos 2x + [-2ax^2 + (2f-2b)\,x + g - 2c]\sin 2x$
de $G'\,(x) = g\,(x)$ on a :

$$2fx^2 + (2g+2a)\,x + 2h + b = 2 \ \text{ et } \ -2ax^2 + (2f-2b)\,x + g - 2c = x^2$$

Par identification on a : $a = -\frac{1}{2}$; $b = f = h = 0$; $c = \frac{1}{4}$ et $g = \frac{1}{2}$.
Il en résulte que :

$$G(x) = \frac{1}{4}\left[(1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x\right]$$

Remarque : dans cette exercice, la partie exponentielle peut être pris en compte en écrivant $1 = e^{0x}$. C'est à dire $g(x) = x^2\sin 2x = x^2 e^{0x}\sin 2x$.

1.4 Notion d'intégrale d'une fonction

Activité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, F et G deux primitives de f et a et b deux nombre réels.
a. Déterminer une relation entre F et G.
b. Calculer $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$.
On constate $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

1.4.1 Définition et propriétés

a) Définition d'une intégrale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f . Soit a et b deux éléments de I. alors la quantité $F(b) - F(a)$ $\left(\text{encore noté } [F(x)]_a^b\right)$ est appelée intégrale de f entre a et b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

Vocabulaire :

▲ $\int_a^b f(x)dx$ se lit : " somme de a à b de $f(x)dx$ "

▲ Le nombre a est la borne inférieure de l'intégrale et b est sa borne supérieure.

▲ Le nombre x apparaissant dans l'intégrale est une variable muette : elle peut donc être remplacer par une autre variable. c'est à dire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz$.

Exemples

1) Soit $g : x \longmapsto 3x^2 + 1$. Calculer : $\int_1^3 g(x)dx$; $\int_0^{-2} g(x)dx$.

2) Soit h une fonction définie dans un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$.

c. L'intégrale de h entre a et b dépend-t-elle de la primitive de h choisie ?

b) Propriétés des intégrales

Activité 1

Soient f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, F une primitive de f et a, b et c des réels.
1) Calculer les intégrales suivant : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$; $\int_a^c f(x)dx$.
2) Vérifier que $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

propriété 1(relation de Chasles)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a, b, et c de I

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Exemple

Calculer : $\int_{-2}^{3} |x+1|\,dx$

On sait que $|x+1| = x+1$ si $x \geq -1$ et $|x+1| = -x-1$ si $x \leq -1$.

Donc

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-2}^{3} |x+1|\,dx & = & \int_{-2}^{-1} |x+1|\,dx + \int_{-1}^{3} |x+1|\,dx \\
& = & \int_{-2}^{-1} (-x-1)\,dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\,dx \\
& = & -\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{3} \\
& = & \left[\left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(-2)^2 + (-2)\right)\right] \\
& & + \left[\left(-\frac{1}{2}(3)^2 - (3)\right) - \left(-\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1)\right)\right] \\
& = & \frac{17}{2}
\end{array}$$

Exercices

Calculer les intégrales suivantes :

1) $A = \int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\,dx$; $\quad B = \int_{-2}^{2} (|x| + x)\,dx$

2) Soit la fonction f définie sur $[0; 2\pi]$ par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} \sin x \text{ si } x & \leq & \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x \text{ si } x & > & \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$.

Calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ $\qquad$ b) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} f(x)dx$ $\qquad$ c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} f(x)dx$

Activité 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; F une primitive de f, G une primitive de g et a, b, c et d des réels.

1-a) Démontrer qu'une primitive de cf et cF et qu'une primitive de $f+g$ est $F+G$.
b) En déduire que $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ et que $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
2) Démontrer que

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b g(x)dx.$$

propriété 2 (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I contenant a et b. Pour tous réels α et β on a :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

.

Exemple

Calculer : $A = \int_{-2}^{3} (2\,|x+1| + 3x)\, dx$

$$\begin{array}{rcl} A & = & \int_{-2}^{3} (2\,|x+1| + 3x)\, dx \\ & = & 2\int_{-2}^{3} |x+1|\, dx + 3\int_{-2}^{3} xdx \\ & = & 2\int_{-2}^{3} |x+1|\, dx + 3\int_{-2}^{3} xdx \ . \\ & = & 2 \times \frac{17}{2} + 3 \times \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3} \\ & = & 17 + \frac{15}{2} = \frac{49}{2}. \end{array}$$

D'après l'exemple précédent. **Exercice**

Dans chacun des cas suivants, calculer l'intégrale de f entre 1 et 2.

a) $f(x) = 5x^2 + 2\,(x+1)$ b) $f(x) = \frac{5}{2x} - \frac{2}{x^2}$.

Activité 3

On donne $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

a) f et g sont-elles paires ou impaires ?

b) Déterminer une primitive F de f et une primitive G de g.

c) soit t un nombre réel. calculer les quantités

$$F(t) - F(-t) \text{ et } G(t) - G(-t).$$

d) Vérifier que $F(t) - F(-t) = 2(F(t) - F(0))$ et que $G(t) - G(-t) = 0$.

propriété 3

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Pour tout réel a de I on a :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2) Si f est une fonction paire on a $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

3) Si f est une fonction impaire on a $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

4) Pour $a, b \in I$ on a $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Preuve. 1) Notons F une primitive de f. on a $\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$.

2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. Mais lorsque x d'écrit l'intervalle $[-a, 0]$, $-x$ d'écrit $[0, a]$. On a alors $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx$ car f est paire. On a donc le résultat.

3) Lorsque f est impaire on a

$$\begin{array}{rcl} \int_{-a}^{0} f(x)dx & = & \int_{0}^{a} f(-x)dx \\ & = & -\int_{0}^{a} f(x)dx \end{array}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{array}{rcl} \int_{-a}^{a} f(x)dx & = & \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ & = & -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \\ & = & 0 \end{array}$$

4) En effet $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$ d'où $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. $\square$

Exercices

1) Calculer les intégrales ci-dessous :

a) $\int_{-2}^{2}(x^2+\cos x)\,dx$. b) $\int_{-1}^{1}(x+\sin x)\,dx$. c) $\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin x)\,dx$.
d) $\int_{-1}^{1}(x\cos x)\,dx$.

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{0}^{\pi}(3x^2+5\cos x)\,dx$. b) $\int_{0}^{\pi}(x^2+\cos x)\,dx$. c) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[3\,(x\sin x)+5\,(x\cos x)]\,dx$.

1.4.2 Complément

D'autres méthodes permettent de déterminer l'intégrale d'une fonction, mais ceci c'est l'objet d'une autre ressource. Nous vous donnons quand même de retenir les notions suivantes.

Signe de l'intégrale

Activité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

1) Tracer la courbe (C_f) de f et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) Dans chacun des cas suivants calculer $\int_a^b f(x)dx$ et en déduire son signe.

a) $\int_{-3}^{-1}f(x)dx$. b) $\int_{-5}^{0}f(x)dx$ .c) $\int_{2}^{5}f(x)dx$. d) $\int_{1}^{6}f(x)dx$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant les réels a et b tels que $a\leq b$.

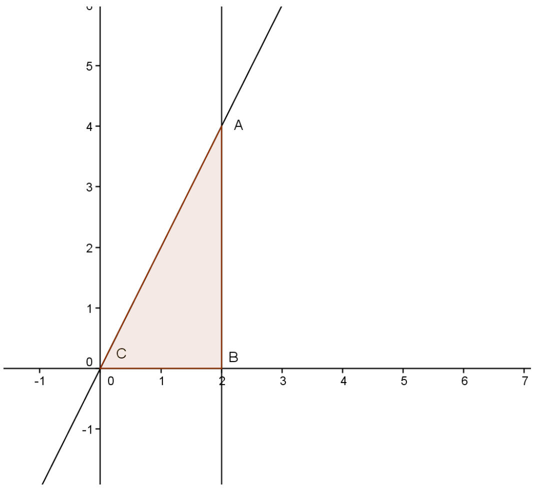
1) Si f est positive sur $[a;b]$; alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

2) Si f est négative sur $[a;b]$; alors $\int_a^b f(x)dx\leq 0$.

Intégrale et aire :

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x$ et soit (C_f) sa courbe. Soit (D) la droite d'équation $x=2$.



1) Calculer l'air du triangle ABC.

2) Calculer $\int_0^2 f(x)dx$ et comparer les deux résultats.

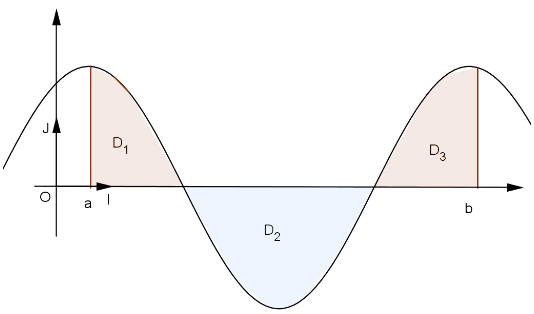
Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et soit (C_f) sa courbe représentative ; soit D l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1) Si f est toujours positive sur $[a;b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = aire(D)$ (unité d'aire) .

2) Si f est toujours négative sur $[a;b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = -aire(D)$ (unité d'aire) .

3) Si f a un signe variable sur $[a;b]$: alors $\int_a^b f(x)dx = aire(D_1) - aire(D_2) + aire(D_3)$



Exercice

f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et (C_f) sa courbe représentative.

Soit D l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Déterminer D dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = x + 1$; $a = -1$ et $b = -2$.

2) $f(x) = x + 1$; $a = -2$ et $b = 2$

3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $a = 0$ et $b = 3$.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

EXERCICES DE SYNTHESES

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$; a et b deux nombres réels distincts vérifiant $f(a) = f(b)$. Soit (c_F) la courbe représentative d'une primitive F de f, (D_a) et (D_b) les tangentes à (C_F) aux points d'abscisses a et b respectivement.

1)Démontrer que (D_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $F(b) - F(a) = f(a)(b-a)$

2)Démontrer que la droite (D_a) passe par l'origine du repère si et seulement si $F(a) = f(a)a$.

Exercice 2

Nous voulons déterminer une primitive de $f(x) = 2x\,[3(x^2+1)^8 + 1]$.

1) Déterminer deux fonctions g et h telles qu'on ait $f(x) = g(h(x)) \times h'(x)$.

2) Déterminer une primitive G de g.

3) Vérifier que $(G \circ h)' = f$ et en déduire une primitive de f.

4) Proposer une méthode de détermination des primitives de $f = g(h) \times h'$.

Exercice 3 (ce référer à l'exercice 2).

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+5} \tan[1 + \ln(x^2+5)]$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

c) $f(x) = \frac{3}{x(1+\ln^2 x)}$

d) $f(x) = \frac{1}{x} \sin(2 + \ln x)$

Exercice 4

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

b) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soient f la fonction identité de $\mathbb{R}$, F une primitive de f ; $A(a, F(a))$ et $B(b, F(b))$ deux points distincts de la courbe représentative de F notée (c_F). On note (D_a) et (D_b) les tangentes à (c_F) aux points A et B respectivement.

1) Montrer que si (D_a) et (D_b) sont linéaires et $F(a) = F(b)$ alors $b = -a$.

2) A-t-on forcement $(D_a) = (D_b)$?

3)Pour $a = 1$ et $b = -1$ construit A, B, (D_a), (D_b) et (c_F).

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient f une fonction réelle ; $A(a, b)$ un point du plan et (C) la courbe de la primitive F de f qui passe par A.

1) Au point A que représente $f(a)$ pour (C) ?

2) Donner en fonction de a la valeur de b pour laquelle la tangente (D) à (C) en A passe par l'origine du repère.

3) On donne $f(x) = 2x$ et $b = 2a^2$

a) Que peut-on dire de la nature de (D) ?

b) Déterminer l'équation de (D).

c) Déterminer l'expression de F en fonction de a.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}e^{(1+\ln x)}$.

1) Déterminer une primitive F de f.

2) Sachant que la fonction $G = F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f, donner en fonction de k la valeur de $G(1)$ pour que la tangente à la courbe de G au point $A(1, G(1))$ passe par l'origine du repère.

3) Pour quelle valeur de $G(1)$ a-t-on $F = G$?

Exercice 8

Soient a, b, c, p, r et m des nombres réels avec $m \neq 0$ Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f :

a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-mx}$

b) $g(x) = (p\cos x + r\sin x)e^{-mx}$

Exercice 9

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

a) $f(x) = (2x^2 + 2x + 2)e^{-2x}$ c) $g(x) = (\cos x + 2\sin x)e^{-x}$

b) $f(x) = (-x^2 + 1)e^{-x}$ d) $g(x) = (3\cos x + 4\sin x)e^{-2x}$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

a) $f(x) = (2x^2 + 2x + 2)e^{2x}$ c) $g(x) = (\cos x + 2\sin x)e^{x}$

b) $f(x) = (-x^2 + 1)e^{x}$ d) $g(x) = (3\cos x + 4\sin x)e^{2x}$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivant déterminer une primitive de f :

a) $f(x) = (2x^2 + 2)e^{x}$ c) $g(x) = (2\sin x)\, e^{-x}$

b) $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$ d) $g(x) = (\cos x + \sin x)e^{x}$

Signe de l'intégrale et encadrement.

Exercice 12

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux éléments de I.

1) Dans chacun des cas suivants préciser le signe de $\int_a^b f(x)dx$.

a) $a \leq b\,;\ f(x) \geq 0.$ $b \leq a\,;\ f(x) \leq 0.$

b) $a \leq b\,;\ f(x) \leq 0$ $b \leq a\,;\ f(x) \geq 0.$

2) On suppose $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$.

a) Montrer que $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0.$

b) En déduire que $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

3) Application : On donne $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $g(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Déterminer le signe de $f - g$ et comparer sans faire aucun calcul $\int_2^5 f(x)dx$ et $\int_2^5 g(x)dx$.

Exercice 13

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ et $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

1) Déterminer le signe de $f - g$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

2) En déduit que :

a) $\int_2^4 f(x)dx \geq \int_2^4 g(x)dx.$ b) $\int_{-5}^{-4} f(x)dx < \int_{-5}^{-4} g(x)dx.$

Exercice 14

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$.

a) A-t-on $-\int_0^\pi dx \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \int_0^\pi dx.$

b) En déduire que $-\pi \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \pi$

c) Déterminer un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

Exercice 15

Soit f fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de I et m et M deux nombres réels tel que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Par une intégration membre à membre montrer que
$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)$.

b) Démontrer que pour $0 \leq x \leq 1$ on a $0 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq x \leq 1$

c) En déduire que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^3}{1-x^2}dx \leq 1$.

Exercice 16

Démontrer les encadrements ci-dessous :

a) $\frac{3}{2} \leq \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \leq 3$.

b) $\sqrt{2} \leq \int_0^3 \sqrt{1+t^3}dt \leq 3$

c) $\frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+\cos x)^2} < \frac{\pi}{6}$.

d) $\frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \frac{\pi}{2}$.

(**Aide** : encadrer la fonction entre les bornes de l'intégrale)

Exercice 17

Soit f fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux éléments de I et M un nombre réel.

1-a) Démontrer que si pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M\,|b-a|$.

b) En déduire que si $a \leq b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M\,(b-a)$

2-) Donner un encadrement de $\left|\int_0^\pi (1+\sin x)\,dx\right|$

Exercice 18

Dans chacun des cas ci-dessous donner un encadrement de $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; $a = 1$ et $b = 3$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$; $a = -1$ et $b = 2$.

c) $f(x) = \ln(1+x^2)$; $a = 1$ et $b = 5$.

d) $f(x) = 2\cos x + 3$; $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3$.

1-a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$.

b) Montrer que $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$

2-a) Montrer que $\int_1^x f'(t)dt \geq \int_0^x 3dt$.

b) En déduire que $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.

Exercice 20

1) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \cos x \leq 2$.

2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t - t \leq 0$ (on peut intégrer l'inégalité précédente entre 0 et t).

Exercice 21

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$.

1) Déterminer $f'(x)$.

2) Montrer que pour tout $x < -1$, $\int_{-1}^x \leq 0$.

3) En déduire que pour $x \leq -1$ on a $f(x) \leq \frac{1}{2}$ et pour $x \geq 1$ on a $f(x) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 22

Calculer l'intégrale de chacune des fonctions suivantes entre 1 et 3 :

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+5} \tan\left[1 + \ln\left(x^2 + 5\right)\right]$.

b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

c) $f(x) = \frac{3}{x(1+\ln^2 x)}$.

d) $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(2 + \ln x\right)$.

Exercice 23

On donne $f(x) = x^2 + 2$; $g(x) = sinx$; $h(x) = 2x^2 + 4$; $k(x) = 3x^2 + 6 + 3sinx$

1-a) Calculer l'intégrale de f et h entre -1 et 2 :

b) Démontrer que $\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(x)dx$

2) Calculer l'intégrale de g et k entre 0 et π :

Exercice 24

Soient m et n deux fonctions définies par :

$m(x) = -\left(x^2 + 2\right)\cos x + \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x\right)\sin x$.

$n(x) = 3\left(x^2 + 2\right)\cos x$-$\left(x^3 + 6x\right)\sin x + 2x^2 + 4$

1) Déterminer une primitive de m et une primitive de n.

2) Calculer $\int_0^{\pi} m(x)dx$ et $\int_0^{\pi} m(x)dx$.

Exercice 25

Dans chacun des cas suivants calculer l'intégrale de f entre 1 et 2.

a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

b) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

c) $g(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

d) $g(x) = \frac{5}{(2x-1)^4}$.

Exercice 26

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 9}$.

1) Etudier et tracer f dans $[-5; 5]$

2) Déterminer une primitive de f.

3) Calculer $\int_{-5}^{5} f(x)dx$.

Exercice 27

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$.

1) Etudier et tracer f dans $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

2) Déterminer une primitive de f.

3) Calculer l'aire du domaine comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

♣ Bibliographie ♣

[1] SALIOU TOURE et les autres, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale(CIAM) SM, EDICEF, 11/2004.

[2] CHARLES MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.

[3] M. MONGE, M.-C.Audoum-Egouoff et Lemoine-Body, Mathématiques terminales C et E. Tome 1 ; librerie Classique Eugène Belin, 1974.

♣ Annexe ♣

Dans cette partie une primitive d'une fonction f sera désigné par la lettre majuscule F.

Exercice corrigé.

Exercice 3 (Correction).

a) Posons $h(x) = [1 + \ln(x^2 + 5)]$ et $t(x) = tanx$. On a $h'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$. On peut écrire $f(x) = h'(x)t(h)$. Une primitive F de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = T(h(x))$ D'après l'exercice 2. Or $T(x) = -ln|cosx|$. Il en résulte que

$$F(x) = -ln|cos[1 + \ln(x^2 + 5)]|.$$

b) En posant $h(x) = e^x$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ on a $f(x) = h'(x)g(h(x))$. Une primitive F de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = G(h(x))$. Il est résulte que

$$F(x) = arctan(e^x).$$