CALCUL INTEGRAL en Terminale C

Rédigé par

YEPDJOUO LAPA Armand

Dirigé par

Dr. TEMGOUA ALOMO Etienne R (Chargé de Cours).

M. SIELINOU Damase (IPR)

M. FEUDJIO Anicet (PLEG)

Yaoundé, le 18 mars 2014

♣ Table des matières ♣

Dédicaces **iii**

Remerciements **iv**

Résumé **v**

Abstract **vi**

1 Historique et Programme officiel du calcul intégral **1**

1.1 Introduction générale 1

1.2 Aspects historiques de l'intégration 2

1.2.1 Origine géométrique de l'intégration 2

1.2.2 Origine du symbole $\int$ 2

1.3 Programme officiel 3

1.3.1 Contenus du programme officiel 3

1.3.2 Commentaires, Savoir, Savoir-faire 4

1.4 Réflexion pédagogique 4

1.4.1 Objectif de l'étude 5

1.4.2 Intérêt de l'étude 6

2 CALCUL INTÉGRAL **7**

2.1 Place dans le programme 7

2.1.1 Pré-requis 7

2.2 Intégrale d'une fonction continue 7

2.2.1 Objectifs pédagogiques opérationnels 7

2.2.2 Définitions et rappels 7

2.2.3 Conséquences immédiates de la définition 8

2.3 Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction positive.[3] 10

2.3.1 Intégrale d'une fonction continue positive en tant qu'aire 11

2.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque 15

2.5 Interprétation cinématique de l'intégrale 16

2.6 Propriétés de l'intégrale 17
2.6.1 Linéarité de l'intégrale 19
2.6.2 Intégrales et Inégalités 20
2.6.3 Inégalité de la moyenne 22
2.6.4 Valeur moyenne d'une fonction 24
2.7 Techniques de calcul intégral 25
2.7.1 Techniques de base 25
2.7.2 Intégration de fonctions particulières 29
2.7.3 Calcul approché d'une intégrale 30
2.8 Calculs de volumes 33
2.9 Énoncé 36
2.9.1 Solutions 36

3 Exercices d'entraînement **39**

Chapitre Un

Historique et Programme officiel du calcul intégral

1.1 Introduction générale

Le sujet central de notre étude est le suivant : comment contribuer à l'amélioration de l'enseignement du calcul intégral en classe de Terminale C ? Ce thème a retenu l'attention de l'équipe dirigeante du projet Prenum-ac qui a décidé en sa ressource 8 intitulée "Calcul Intégral" de mener une réflexion pédagogique.

Outre les effectifs pléthoriques dans plusieurs établissements scolaires qui ne permettent pas un enseignement aisé, beaucoup d'autres facteurs peuvent expliquer le fait que la compréhension et l'utilisation de la notion de calcul intégral n'est pas facile pour certains élèves. Nous pouvons citer :

- Le temps accordé à l'enseignement du calcul intégral ;
- Le nombre de matières enseignées en terminale.

Plusieurs enseignants de mathématiques considèrent que le calcul intégral est un exercice facile, car celui-ci est centré sur la recherche d'une primitive ; ce qui justifie la légèreté avec laquelle ce cours est enseigné par certains. Certes, la notion de calcul intégral d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas la plus difficile dans le programme de mathématiques en classe de terminale C ; cependant, cette notion est capitale pour le futur étudiant. En effet pour le jeune étudiant, la maitrise de cette notion est un gain précieux pour faire face à la notion d'intégration qui est approfondie (les intégrales curvilignes,doubles et triples...) dans nos universités en cycle licence des filières scientifiques d'où la nécessité d'avoir une base solide dès la classe de terminale. Nous proposons dans ce travail :

- Un cours riche, complet et utile à l'enseignant de mathématiques en terminale scientifique à travers sa structure qui de façon systématique introduit chaque unité d'enseignement (définition, propriété, théorème) par une activité de l'élève.
- Des exemples corrigés et des exercices d'applications qui faciliterons la compréhension de l'élève. Notre souci étant, qu'un élève puisse s'approprier le contenu de ce cours. En effet, nous savons que même en terminale C plusieurs établissements n'ont pas de professeurs

de mathématiques et que certains promoteurs d'établissements confient cette classe à des personnes qui n'ont aucune compétence ce qui fragilise notre système éducatif.

1.2 Aspects historiques de l'intégration

1.2.1 Origine géométrique de l'intégration

L'origine de l'intégration se trouve sans conteste dans les problèmes d'ordre géométrique que se posaient les Grecs : calculs d'aires (ou quadratures), de volumes, de longueurs, de centres de gravité, de moments. Les précurseurs grecs du calcul intégral sont cependant peu nombreux. On peut les résumer à Eudoxe et Archimède. On attribue à Eudoxe, repris par Euclide, la détermination des volumes du cône et de la pyramide. Le travail d'Archimède est bien plus important : citons, entre autres, la détermination du centre de gravité d'une surface triangulaire, le rapport entre aire et périmètre du cercle, le volume et l'aire de la sphère, le volume de la calotte sphérique, l'aire du « segment » de parabole, délimité par celle-ci et une de ses cordes.

Au XVIIe siècle, KEPLER (1571-1630) obtient des formules pour calculer le volume de tonneaux à l'aide de décompositions de régions en domaines élémentaires. Enfin, LEIBNITZ (1646-1716) et NEWTON (1643-1727) construisent, de façon indépendante et presque simultanée, une méthode pour la détermination des aires et des volumes par le «calcul intégral ».

1.2.2 Origine du symbole $\int$

Aux $XVII^e$ et XIX^e siècles, l'analyse se développe de façon extraordinaire, mais l'on ne se soucie guère avant Cauchy de définir exactement ce dont on parle. Cependant, la réflexion des mathématiciens se porte de nouveau sur l'intégrale, à propos d'un des grands problèmes du XIX^e siècle, celui de la série de Fourier déduite d'une fonction.

En effet les coefficients de ces séries sont exprimés par une intégrale mettant en jeu la fonction. Remarquons au passage que si l'on doit la notation $\int$ à Leibniz, et si Euler utilisait la notation $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x=a \\ x=b \end{bmatrix}$, notre notation $\int_a^b$ est due à Fourier.

Donc, Cauchy essaie de définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue à l'aide des sommes « de Riemann » (1823). Riemann, quant à lui, en 1854, recherche à quelles conditions les sommes qui portent son nom convergent pour un « pas de subdivision » tendant vers zéro. Il aboutit à des conditions nécessaires et suffisantes s'énonçant en termes de faible longueur totale de l'ensemble des intervalles où se produisent des «

sauts » de hauteur arbitrairement petite.

Cependant, ni Cauchy ni Riemann ne disposaient du théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment. Ils ne pouvaient donc pas démontrer que « toute fonction continue sur [a, b] est intégrable ». Un premier exposé cohérent de l'intégrale, comportant entre autre ce théorème, ne sera présenté que par Darboux, en 1875. Il ne s'agit évidemment que d'une première étape, mais qui clôt notre rapide survol historique.

1.3 Programme officiel

Le programme actuel de l'enseignement des mathématiques a été signé le 12 Août 1998 par le ministre d'état chargé de l'éducation nationale, suivant l'arrêté $N°53/D/43/$MINEDUC/SG/IGP/ESG portant définition des mathématiques du second cycle de l'enseignement générale.

1.3.1 Contenus du programme officiel

Les contenus du programme officiel pour la notion d'intégration sont les suivants :

- Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; théorème sur l'existence de primitives d'une fonction continue (admis)
- Intégrale d'une fonction continue
- Relation de Chasles
- Linéarité par rapport aux fonctions
- Positivité :
  si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$.
- Inégalité de la moyenne, valeur moyenne.
- Changement de variable affine ; Intégration par parties.
- Exemples d'étude d'une fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ où f n'a pas de primitive explicitée
- Valeur approchée d'une intégration : méthode des rectangles avec majoration du reste.
- Application de l'intégrale au calcul de l'aire d'une partie du plan définie par ($a \leq x \leq b$) et ($0 \leq y \leq f(x)$),où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$; généralisation à une fonction continue de signe quelconque.
- Application de l'intégral au calcul de volumes.

1.3.2 Commentaires, Savoir, Savoir-faire

Dans l'objectif de familiariser les élèves avec quelques problèmes relevant du calcul intégral et de leurs fournir le symbolisme du calcul intégral, on combinera les activités du calcul exact d'intégral (qui mettent en oeuvre le calcul des primitives) et les activités d'encadrement et de calcul approché (qui, de façon complémentaire exploite des idées géométriques à partir d'interprétation graphique).

On déterminera les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles. La théorie de l'intégration de Riemann est hors programme.

Il est recommandé d'adopter la définition suivante : soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout (a, b) de $I \times I$, le réel $f(b)-f(a)$ est indépendant du choix de la primitive F de f sur I ; on le note $\int_a^b f(t)\,dt$ et on l'appelle : intégrale, de a à b, de la fonction continue f.

En d'autre terme, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en a.

On déduira de la positivité de l'intégrale les propriétés suivantes :
si $a \leq b$ et $f \geq g$ sur l'intervalle $[a; b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$
si $a \leq b$ alors $|\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Les élèves doivent savoir calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. Les applications de la valeur moyenne en physique pourrons faire l'objet de travaux pratiques.

La méthode d'intégration sera indiquée dans les épreuves dévaluations.

L'objectif est de pouvoir tirer des information sur ce genre de fonctions même si on ne peut pas calculer une intégrale de f.

Sur des exemples on montrera comment approchée une aire à l'aide des suites du type $U_n = \frac{(b-a)}{n}[f(a) + f(a + \frac{b-a}{n}) + ... + f(a + (n-1)\frac{b-a}{n})]$

Les élèves doivent savoir calculer l'aire d'une partie du plan définie par $(a \leq x \leq b)$ et $(0 \leq y \leq f(x))$ en tenant compte de l'unité d'aire.

Les élèves devrons connaître la formule $v = \int_a^b S(z)\,dz$ et savoir l'appliquer au calcul des volumes de solides de révolution étudiés au premier cycle.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

CALCUL INTÉGRAL

2.1 Place dans le programme

Le calcul intégrale suit les suites numériques du programme officiel et précède les équations différentielles.

2.1.1 Pré-requis

- Les théorèmes sur les limites de fonction, la continuité en un point et sur un intervalle, enfin la dérivabilité en un point et sur un intervalle et la notion de primitive.
- Les théorèmes sur les limites de suites et en particulier la convergence des suites monotones et bornées.

2.2 Intégrale d'une fonction continue

2.2.1 Objectifs pédagogiques opérationnels

Familiariser les élèves avec quelques problèmes relevant du calcul intégral et qui, en retour donne du sens à la notion d'intégrale :

- calcul de grandeurs géométriques (aires et volumes) ;
- de grandeurs physiques (distance parcourue connaissant la vitesse ;
- valeur moyenne ;
- Fournir aux élèves le symbolisme du calcul intégral et exploiter sur les exemples simples, les propriétés de l'intégrale pour l'étude des fonctions ;
- Acquérir les techniques du calcul intégral.

2.2.2 Définitions et rappels

Activité 3.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F et G deux primitives de f sur I.
En utilisant le fait qu'il existe un nombre réel c tel que :
pour tout $t \in I$, $G(t) = F(t) + c$.

1. Montrer que
$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$
2. Conclure que le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive de f choisie.

Définition 3.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel $F(b) - F(a)$. on note :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b.$$

Vocabulaire 3.1[2]

- $\int_a^b f(t)\,dt$ se lit «somme (ou intégrale) de a à b de $f(t)dt$ ».
- $[F(t)]_a^b$ se lit «$F(t)$ pris entre a et b ».
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(t)\,dt$, on peut remplacer t par toute autre lettre (sauf a et b) et écrire $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$; t est appelée variable muette.

Exemple 3.1

1. Cas de la parabole : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2.$$
on a :
$$\int_0^1 x^2\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
2. Cas de la fonction constante : Soit c un réel.
On a :
$$\int_a^b c\,dx = [ct]_a^b = c(b-a).$$
3. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.2.3 Conséquences immédiates de la définition

Activité 3.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. En utilisant la définition précédente, établir que :

1. $\int_a^a f(t)\,dt = 0\,;$
2. $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

Propriété 3.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.
On a :
- $\int_a^a f(t)\,dt = 0\,;$
- $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

Activité 3.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. Soit la fonction φ définie pour tout $x \in I$ par :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

1. Montrer que :
$$\varphi(x) = F(x) - F(a)$$
où F est une primitive de f.
2. En déduire que φ est une primitive de f sur I, c'est-à-dire, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = f(x)$.
3. Calculer $\varphi(a)$ et conclure.

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 3.2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément de I. La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$, de I vers $\mathbb{R}$ est la seule primitive de f sur I qui s'annule en a.

Conséquence

Soit φ une fonction telle que :

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

On a alors $\varphi'(x) = f(x)$.

Application

Soit I$=]0;+\infty[$. Pour tout $x \in I$, on a :

- $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$;
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

où «ln »est la fonction logarithme népérien.

Exemple 3.2

Pour $x > 0$ on pose $\varphi(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$.
Déterminer $\varphi'(x)$ et dresser le tableau de variation de φ sur $]0;+\infty[$ (pas d'étude de limite demandée).

solution

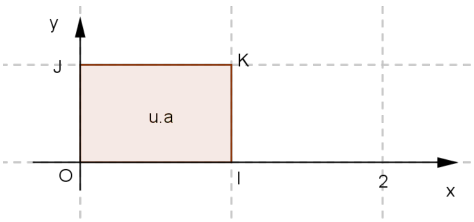
Soit $x > 0$, comme $\varphi(x) = \int_1^x \ln(t)\,dt$ alors, $\varphi'(x) = \ln x$.
Le signe de la fonction «ln»est connu sur $]0;+\infty[$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		+∞
φ'(x)		-	0	+	
φ(x)		↘	0	↗	

2.3 Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction positive.[3]

Définition 4.1 : L'unité d'aire

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$).
Soit I,J et K les points définis par : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{i} + \vec{j}$.



On appelle <u>unité d'aire</u> (notée en abrégé u.a.) l'unité de mesure des aires telles que :

$$Aire(\text{ rectangle OIKJ }) = 1u.a.$$

Remarques 4.1

– OIKJ peut être un carré lorsque le repère (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$) est orthonormé.
– Si l'on a par exemple $OI = 2cm$ et $OJ = 3cm$, alors une unité d'aire correspond à $6cm^2$.

2.3.1 Intégrale d'une fonction continue positive en tant qu'aire

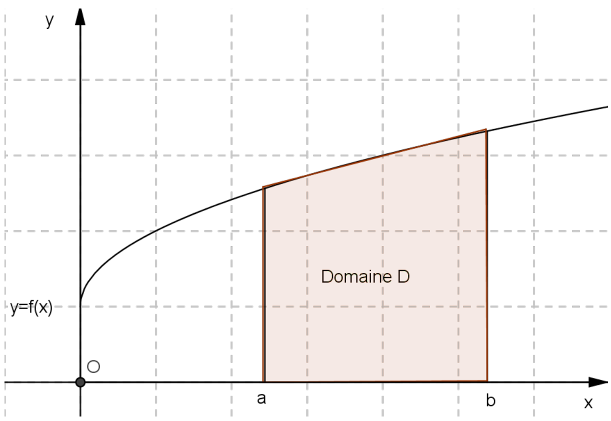
Définition 5.1

Soit P un plan muni d'un repère orthogonal (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$) .
Soient a et b ($a < b$), f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
L'intégrale de f sur $[a; b]$ ($\int_a^b f(t)\,dt$) est l'aire exprimée en u.a., du domaine D suivant :

$$D = \{M(x, y) \in P \text{ tels que } a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(D est le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$).

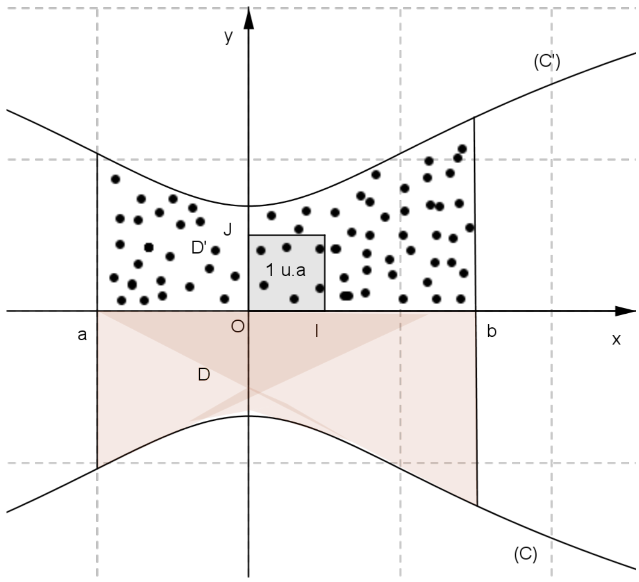
illustration :



Remarques 5.1

- L'aire de D (en unité d'aire) peut être noté $A(D)$. On a alors :
  $A(D) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a; b]$.
- Si la fonction f est continue et négative sur $[a; b]$, la symétrie orthogonale d'axe (OI) transforme la courbe $\mathcal{C}$ de f en la courbe $\mathcal{C}'$ de $(-f)$.
- Le domaine D est transformé en un domaine D' de même aire.

Illustration :



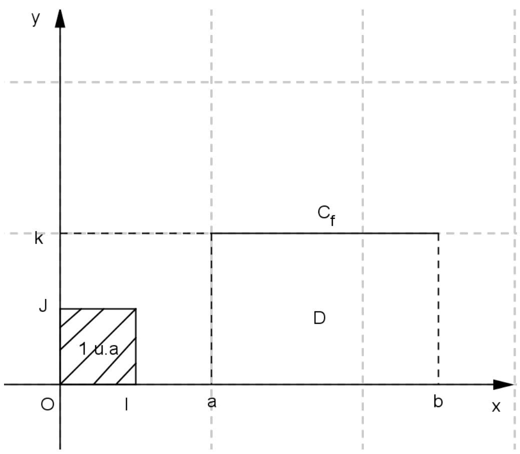
Exemple 5.1

Rapportons le plan à un repère orthonormé (O ;$\vec{i}$,$\vec{j}$) avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ (ainsi 1u.a. correspond à $1cm^2$).

- Cas d'une fonction f égale à une constante positive (notée $k \in \mathbb{R}_+$) sur $[a;b]$ alors :

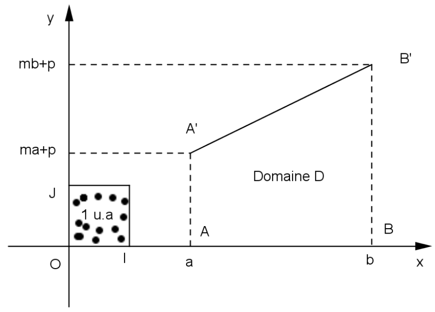
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b k\,dt = (b-a)k \qquad u.a.$$

(on a simplement appliqué la formule longueur× largeur pour calculer l'aire d'un rectangle !)



$A(D) = \int_a^b f(t)\,dt = (b-a)k \qquad cm^2.$
En particulier, si f est nulle sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0$.

- Cas d'une fonction affine (notons $f(x) = mx + p$) supposée positive sur $[a;b]$ alors :



$\int_a^b f(t)\,dt = A(D) =$ Aire du trapèze ABB'A' $= \dfrac{(\text{ petite base } + \text{ grande base }) \times hauteur}{2}$.

$A(D) = \int_a^b f(t)\,dt = \dfrac{(AA' + BB')AB}{2} = \dfrac{(ma+p+mb+p)(b-a)}{2}$

Soit :

$$A(D) = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2) + p(b-a)cm^2.$$

Cette formule n'est pas à retenir.

- Calculer l'aire en cm^2 de l'ensemble D des points $M(x,y)$ tels que : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq \cos x$.
  la fonction cosinus est continue et positive sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. On a :

$$A(D) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Exemple fondamental : quadrature de l'hyperbole

Énoncé :

Notons pour tout $x \in [1; +\infty[$, $S(x)$ l'intégrale :

$$S(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

1. Soit t_o un réel fixé de l'intervalle $[1; +\infty[$.
   (a) Justifier que :
   $\forall t \in]t_o; +\infty[$, $\frac{1}{t} \leq \frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o} \leq \frac{1}{t_o}$.
   (b) En déduire que la fonction S est dérivable à droite en t_o et que son nombre dérivé à droite est $\frac{1}{t_o}$.
2. Soit t_o un élément de $[1; +\infty[$.
   (a) Justifier que :
   $\forall t \in [1; t_o[$, $\frac{1}{t_o} \leq \frac{S(t_o)-S(t)}{t_o-t} \leq \frac{1}{t}$.

(b) En déduire que la fonction S est dérivable à gauche en t_o et que son nombre dérivé à gauche est $\frac{1}{t_o}$.

3. En déduire que : $\forall x \in [1; +\infty[$, $s'(x) = \frac{1}{x}$.
4. Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

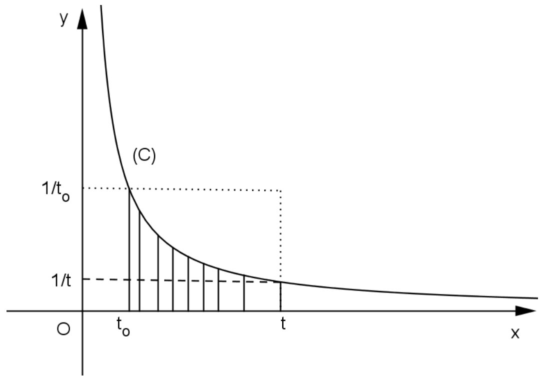
$$f(x) = S(x) - \ln x.$$

(a) Montrer que f est constante sur $[1; +\infty[$ et déterminer cette constante.

(b) En déduire que : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Solution :

On a : $S(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.



domaine : $D = \{M(t, y) \in P$ tels que $1 \leq t \leq x$ et $0 \leq y \leq f(t)\}$ Avec $f(t) = \frac{1}{t}$.

D'après la définition 5.1 $S(x)$ est l'aire du

1. Soit t_o un réel fixé de l'intervalle $[1; +\infty[$.
   (a) Soit $t \in [t_o; +\infty[$, alors $S(t) - S(t_o)$ est l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction inverse, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = t_o$ et $x = t$; or , par décroissance de la fonction inverse sur $[1; +\infty[$, on a : $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{t_o}$.
   $S(t) - S(t_o)$ est encadrée par l'aire de deux rectangles, de largeur $(t - t_o)$ et de hauteurs respectives $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t_o}$:
   D'où $\quad \frac{t-t_o}{t} \leq S(t) - S(t_o) \leq \frac{t-t_o}{t_o}$.
   On a le résultat en multipliant cette inégalité par $\frac{1}{t-t_o}$.

   (b) En passant à la limite lorsque t tend vers t_o ; le théorème des gendarmes permet d'affirmer que l'accroissement moyen $\frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o}$ admet une limite en t_o égal à $\frac{1}{t_o}$, il en résulte que la fonction S est dérivable à droite en t_o.
2. De même on montre que S est dérivable à gauche en t_o
3. On a donc d'après 1) et 2) :

$$S'(t_o) = \frac{1}{t_o}.$$

Ce raisonnement étant valable pour tout réel t_o de $[1; +\infty[$,

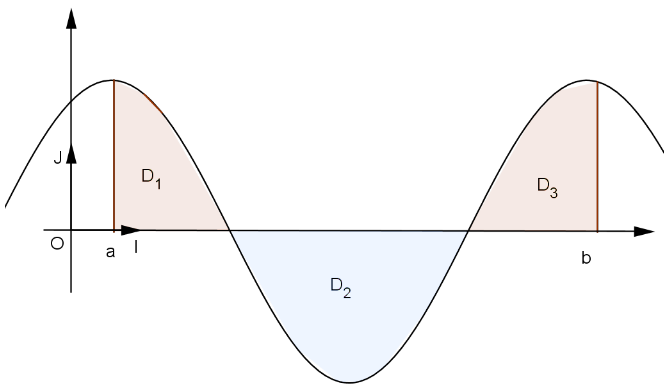
$$S'(x) = \frac{1}{x}.$$

4. La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ (car la fonction S et le logarithme népérien le sont) et on a :
   $f'(x) = S'(x) - (\ln(x))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.
   En conséquent, f est constante sur $[1;+\infty[$, c'est-à-dire $f(x) = k$ pour tout $x \in [1;+\infty[$.
   Or $f(1) = S(1) - \ln(1) = 0$, d'où $k = 0$ et f est nulle sur $[1;+\infty[$.
   On conclut que : $S = \ln$.
   on a montrer que pour tout réel x de $[1;+\infty[$,
   $$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

2.4 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 6.1

Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors, on définit $\int_a^b f(t)\,dt$ de la manière suivante :



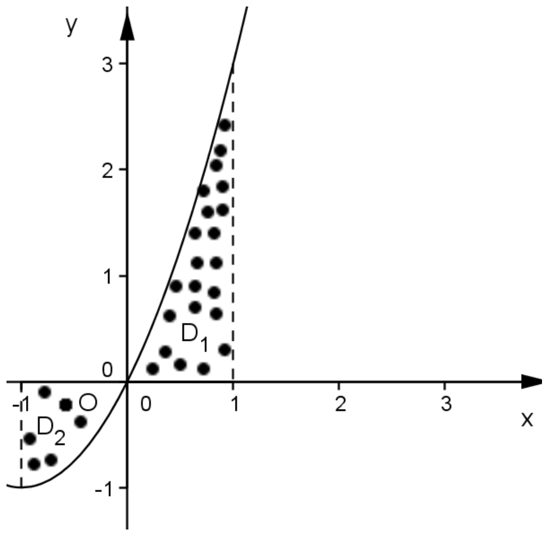
$$\int_a^b f(t)\,dt = A(D_1) - A(D_2) + A(D_3).$$

Exemple 6.1

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = x^2 + 2x$.
Calculer l'intégrale $A = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

solution :

Traçons la courbe représentative de f sur $[-1;1]$ voir figure ci-dessous.



La fonction f est :

- négative sur $[-1; 0]$;
- positive sur $[0\,;1]$.

elle est donc de signe quelconque sur $[-1; 1]$, on a donc :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = A(D_1) - A(D_2).$$

avec

$$\begin{aligned} A(D_1) = \int_0^1 f(t)\,dt &= \int_0^1 (x^2 + 2x)\,dx \\ &= [\frac{1}{3}x^3 + x^2]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A(D_2) = \int_{-1}^0 -f(t)\,dt &= \int_{-1}^0 (-x^2 - 2x)\,dx \\ &= [\frac{-1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^0 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Donc $A = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

$$A = \frac{2}{3}.$$

2.5 Interprétation cinématique de l'intégrale

Un mobile se déplace sur un axe à la vitesse $v(t)$, t étant la variable temps.
Si l'on suppose que v est positive entre les instants t_1 et t_2, alors la distance parcourue par le mobile entre ces deux instants est :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Exemple 7.1
un corps est lâché avec une vitesse initiale nulle à l'instant $t_o = 0$, d'une hauteur de $1000m$ et est soumis à l'accélération de la pesanteur $g = 9,8m.s^{-2}$.

1. Quelle distance d a-t-il parcouru après 5 secondes de chute ?
2. À quel instant T(en secondes) touche t-il le sol ?

Solution

1. on a : $v(t) = gt$; donc la distance (en mètres) parcourue après 5 secondes de chute est :
$$d = \int_0^5 gt\,dt = g[\frac{1}{2}t^2]_0^5 \simeq 122,5m.$$
2. on a : $\int_0^T gt\,dt = 1000 \Leftrightarrow \frac{1}{2}gT^2 = 1000$
Donc $\boxed{\text{T}\simeq 14{,}3 \text{ s}}$

2.6 Propriétés de l'intégrale

Activité :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, F une primitive de f sur I ; a, b et c trois éléments de I. Soient a, b et c trois éléments de I.
On pose : $A = \int_a^b f(x)\,dx$ et $B = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

1. Exprimer A et B en fonction de $F(a)$ et $F(b)$.
2. Comparer A et B. On en déduit la propriété suivante :

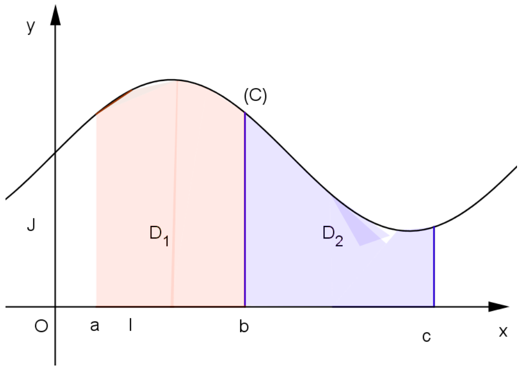
Propriété 3.2(Relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a,b et c trois éléments de I.
On a :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
.

Interprétation graphique.

Supposons que f soit positive sur $[a;c]$ et $a \leq b \leq c$.
Désignons par D le domaine délimité par (C),(OI) et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$.
On a : $D = D_1 \bigcup D_2$ avec $D_1 \bigcap D_2 = \oslash$; en passant aux aires, on obtient :

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2).$$



Remarques 5.1

Cette relation de Chasles sera utilisée dans les deux sens (comme sa cousine pour les vecteurs) :

- soit pour décomposer une intégrale en deux (ou plus) ;
- soit pour regrouper plusieurs intégrales en une seule.

La relation de Chasles admet une généralisation par récurrence :
Pour tout a_o, a_1,...,a_n dans un intervalle I,

$$\int_{a_o}^{a_n} f(t)\,dt = \sum_{i=o}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Exemple d'utilisation de la relation de Chasles.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. soit $n \geq 2$, justifier que : $\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et que la suite (U_n) diverge.

Solution

1. soit $n \geq 2$. L'application $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on a pour tout $k \geq 1$ et $\forall t \in [k;k+1]$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}.$$

2. En sommant pour k allant de 1 à n , la relation de Chasles donne :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k};$$
Soit
$$\ln(1+n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
D'où $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc par comparaison,la suite (U_n) diverge.

2.6.1 Linéarité de l'intégrale

Les propriétés suivantes sont déduites des propriétés des primitives.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, α un réel, a et b deux éléments de I.
On a :
- $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$;
- $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

Remarque

En particulier, on a : $\int_a^b [-f(t)]\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$.

Exemple

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_0^1 e^{ax}\,dx, a \in \mathbb{R}^*$.
2. $B = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

<u>Solution :</u>

1. Il suffit d'écrire, par linéarité :
$$A = \frac{1}{a}\int_0^1 ae^{ax}\,dx.$$
Comme une primitive de $x \longmapsto ae^{ax}$ sur $[0;1]$ est $x \longmapsto e^{ax}$, nous avons :
$$A = \frac{1}{a}[e^{ax}]_0^1 = \frac{e^a - 1}{a}.$$
d'où $\boxed{\text{A}=\frac{e^a-1}{a}}$

2. On ne sait pas calculer les intégrales séparément. On a :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x^2}{x^2+1} \\ &= \int_0^1 \,dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\text{B=1}}$

2.6.2 Intégrales et Inégalités

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ($a \leq b$).
Si f est positive sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. on a donc $F' = f$.
Comme f est positive sur $[a;b]$, alors la fonction F est croissante sur $[a;b]$.
Comme $a \leq b$ on obtient $F(a) \leq F(b)$ d'où $F(b) - F(a) \geq 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Remarque

La réciproque de la propriété est fausse, c'est-à-dire que l'intégrale peut être positive sur $[a;b]$ sans que f ne soit positive sur $[a;b]$.

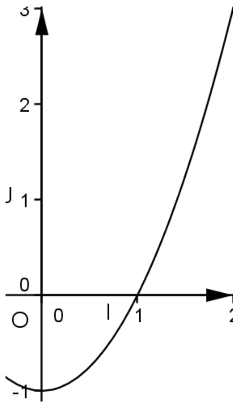
Exemple

Soit la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x) = x^2 - 1$.
Calculer l'intégrale $A = \int_0^2 f(x)\,dx$, déterminer le signe de f sur $[0;2]$ et conclure.
Solution

$A = \int_0^2 (x^2-1)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x]_0^2 = \frac{2}{3}$.
d'où $\boxed{\text{A}=\frac{2}{3}}$
Traçons la courbe représentative de f sur $[0;2]$.

La fonction f est :

- négative sur $[0; 1]$
- positive sur $[1; 2]$.



Conclusion : elle n'est pas positive sur $[0; 2]$ et pourtant l'intégrale A est positive.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ($a \leq b$). Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

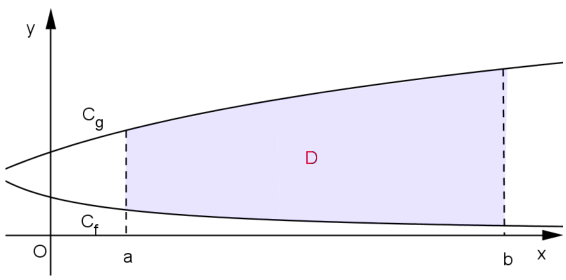
.

Démonstration

Si pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors la fonction $(g - f)$ est positive sur $[a; b]$ et d'après la propriété précédente on a :
$\int_a^b (g - f)(t)\,dt \geq 0$; d'où le résultat.

Interprétation graphique

Sur $[a; b]$ la courbe C_f est en dessous de la courbe C_g ainsi l'aire de la partie coloriée est plus petite que l'aire de la partie non coloriée.



Exemple

1. Démontrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x.$$

Solution

1. Comme $t \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire :

$$1 - t^2 \leq 1 \leq 1 + t \Leftrightarrow (1-t)(1+t) \leq 1 \leq 1 + t$$

et en divisant par $1 + t$ on obtient :

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En intégrant entre 0 et x, l'encadrement ci-dessus, on obtient :

$$\int_0^x (1-t)\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \leq \int_0^x \, dt$$

Or $\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(t+1)]_0^x = \ln(x+1)$, $\quad \int_0^x (1+t)\, dt = x - \frac{1}{2}x^2$ et $\int_0^x \, dt = x$.
D'où :

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ $(a \leq b)$ alors

$$|\int_a^b f(t)\, dt| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

.

Démonstration

On a toujours $-|f| \leq f \leq |f|$ sur $[a; b]$ en intégrant ces inégalités entre a et b $(a \leq b)$, on obtient :

$$-\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

D'où $|\int_a^b f(t)\, dt| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$.

2.6.3 Inégalité de la moyenne

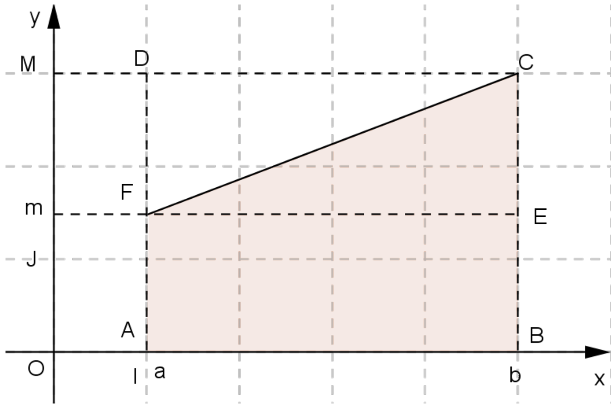
Activité

Soit f une fonction bornée sur $[a; b]$ c'est-à-dire $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$.
Sur la figure ci-dessous, est représentée une fonction f satisfaisant aux conditions précédentes.

Calculer :

- L'aire du domaine colorié D.
- L'aire du rectangle ABEF.
- L'aire du rectangle ABCD.

En utilisant le graphique ranger dans l'ordre aire(ABCD), aire(ABEF) et l'aire du domaine que l'on notera $A(D)$



On en déduit la propriété suivante.

Propriété(Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ($a \leq b$). Si m et M sont deux nombres réels tels que pour tout t élément de $[a;b]$, $m \leq f(t) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Démonstration

On a : $\forall t \in [a;b]$, $m \leq f(t) \leq M$; donc $\int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq_a^b M\,dt$.

On en déduit que :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Remarques

- Si l'on suppose $a < b$, la propriété précédente peut s'écrire :

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M.$$

- l'inégalité de la moyenne appliquée à f sur l'intervalle $[a;b]$ n'est autre que l'inégalité des accroissements finis appliquée à une primitive F de f sur le même intervalle.
- f étant continue sur $[a;b]$, f est borné sur $[a;b]$. Donc les nombres réels m et M existent toujours.

Exemple

Démontrer que :

$$\frac{1}{32} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^3}\,dt \leq \frac{1}{8}.$$

Solution
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ est décroissante sur $[2;4]$; on a donc :

$$\frac{1}{64} \leq \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{16}.$$

On en déduit que :

$$\frac{4-2}{64} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^3}\,dt \leq \frac{4-2}{16}.$$

c'est-à-dire $\quad \frac{1}{32} \leq \int_2^4 \frac{1}{t^3}\,dt \leq \frac{1}{8}.$

- Remarquons que pour $m = -M$ on obtient :

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leq M(b-a).$$

2.6.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b](a \neq b)$.
On appelle **Valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ le nombre réel μ tel que :

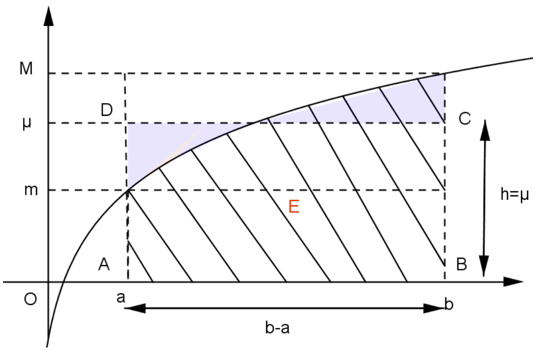
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Remarques 4.1

f étant continue sur $[a;b]$, l'image par f de $[a;b]$ est un intervalle $[m;M]$. On a :
$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$; donc $\quad m \leq \mu \leq M.$
Le nombre μ admet donc au moins un antécédent c par f sur $[a;b]$.

Interprétation graphique : pour une fonction positive.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ et E le domaine limité par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Calculer la **valeur moyenne** μ de f sur $[a;b]$ c'est chercher la hauteur h d'un rectangle ABCD ayant la même aire que E et tel que $AB = b-a$ et $h = \mu$. Cela implique que les deux parties coloriées aient la même aire.



En effet : $\quad aire(ABCD) = \mu(b-a)$ et $aire(E) = \int_a^b f(t)\,dt;$
d'où $\quad \mu(b-a) = \int_a^b f(t)\,dt$ et $\mu = \frac{1}{b-a}\int_f(t)\,dt.$

Exemple
Calculer la valeur moyenne de la fonction$f : x \longmapsto e^x$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.
<u>Solution :</u>
On a :

$\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x\,dx = \frac{1}{2}[e^x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e})$.

donc $\boxed{\mu = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}).}$

Interprétation Cinématique(vitesse moyenne d'un mobile).

La **vitesse moyenne** d'un mobile est la **valeur moyenne de la vitesse**, d'où :

$$\boxed{\text{vitesse moyenne}(v_m) = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du trajet}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.}$$

En effet : si un mobile se déplace sur un axe à la vitesse $v(t)$, sa vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2 est $v_m = \frac{d}{t_2 - t_1}$, d étant la distance parcourue entre ces deux instants lorsque v est positive entre t_1 et t_2, on a : $d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$; donc $\boxed{v_m = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.}$

2.7 Techniques de calcul intégral

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue f entre a et b se réduit généralement à la recherche d'une primitive F de f sur $[a; b]$ et au calcul de $F(b) - F(a)$. Dans certains cas, ce calcul utilise des transformations d'écritures.

2.7.1 Techniques de base

Utilisation des primitives usuelles

Exemples
Calculer :

1. $I_1 = \int_{-1}^{1}(2t^3 - 3t + 1)\,dt$
2. $I_2 = \int_0^2 \frac{2t}{t^2+1}\,dt$
3. $I_3 = \int_1^2 2xe^{x^2-2}\,dx$
4. $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t + \frac{\pi}{4})\,dt$.

<u>Solution :</u>

1. $I_1 = [\frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + t]_{-1}^{1} = 2$
2. $I_2 = [\ln(t^2+1]_0^2 = \ln 5$
3. $I_3 = [e^{x^2-2}]_1^2 = e^2 - \frac{1}{e}$
4. $I_4 = [-\frac{1}{2}\cos(2t+\frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Intégration par parties

Activité

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

1. Calculer $(uv)'$.
2. On suppose u' et v' continues sur I. Les fonctions uv' et $u'v$ sont-elles continues ? Pourquoi ?
3. En supposant uv' et $u'v$ continues, on pose : $A = [u(t)v(t)]_a^b$, $B = \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$ et $C = \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$.
   Exprimer B en fonction de A et C (ind : utiliser le résultat de 1.)

On en déduit la propriété suivante :

Propriété

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle I, telles que les dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b deux éléments de I.
On a :
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt.$$

Exemples

Calculer :

- $I = \int_0^1 te^{2t}\,dt$
- $J(x) = \int_1^x \ln t\,dt (x > 0)$
- $K = \int_0^\pi \cos te^t\,dt$.

Solutions :

- posons : $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{2t}$.
  On a : $u'(t) = 1$; choisissons $v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$. u' et v' sont continues sur $[0;1]$.
  Donc $I = [\frac{1}{2}te^{2t}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2t}\,dt = \frac{1}{4}(e^2+1)$.
  $\boxed{I = \frac{1}{4}(e^2+1)}$
- Posons : $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$.
  On a : $u'(t) = \frac{1}{t}$; choisissons $v(t) = t$. u' et v' sont continues sur $[1;x]$.
  Donc $J(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x\,dt = x\ln x - x + 1$.
  $\boxed{J(x) = x\ln x - x + 1}$
- Posons : $u(t) = \cos t$ et $v'(t) = e^t$.
  On a : $u'(t) = -\sin t$; choisissons $v(t) = e^t$.. u' et v' sont continues sur $[1;x]$.

Donc $K = [\cos te^t]_0^\pi + \int_0^\pi \sin te^t\,dt = -(e^\pi + 1) + \int_0^\pi \sin te^t\,dt$.
Posons : $A = \int_0^\pi \sin te^t\,dt$.
posons $w(t) = \sin t$ et $v'(t) = e^t$.
On a : $w'(t) = \cos t$; choisissons $v'(t) = e^t$. w' et v' sont continues sur $[0;\pi]$.
On en déduit que : $A = [\sin te^t]_0^\pi - \int_0^\pi \cos te^t\,dt = -\int_0^\pi \cos te^t\,dt = -K$
Il en résulte que : $K = -(e^\pi + 1) - K$ c'est-à-dire $\boxed{K = -\frac{1}{2}(e^\pi+1)}$

Changement de variable affine

Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $t \longmapsto \alpha t + \beta$ une fonction affine non constante, a et b deux nombres réels tels que, pour tout x compris entre a et b, le nombre $\alpha x + \beta$ appartient à I.

On suppose que F est une primitive de f sur I.

Montrer que la fonction G : $x \longmapsto \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta)$ est une primitive de la fonction g : $x \longmapsto f(\alpha x + \beta)$.

En déduire que :

$\int_a^b f(\alpha x + \beta)\,dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du$.

On en déduit la méthode d'intégration suivante :

Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt$ $(\alpha \neq 0)$, on peut utiliser le procédé suivant :

1. faire le changement de variable suivant : $u = \alpha t + \beta$; on obtient $du = \alpha dt$;
2. utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\,dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)\,du$.

Exemple :

Calculer : $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

Solution :

Posons : $u = 1 + x$; on obtient $du = dx$. De plus, $x = 0 \Leftrightarrow u = 1$; $x = 3 \Leftrightarrow u = 4$.
On en déduit que :
$I = \int_1^4 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^4 (\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}})\,du = [\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 2\sqrt{u}]_1^4$
$= \frac{8}{3}$
$\boxed{I = \frac{8}{3}}$

Intégration de fonctions paires, impaires et périodiques

Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0. Soit a un

élément de I.
On a la relation de Chasles suivante :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

1. En utilisant le changement de variable $u = -t$, établir que :

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-u)du.$$

2. En déduire que :
   - si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$
   - si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, on a :
- Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$
- si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$

Exemple :

- La fonction $x \longmapsto x^2 + 5$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$; donc :

$$\int_{-1}^{1} (x^2+5)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^2+5)\,dx = 2[\frac{1}{3}x^3 + 5x]_0^1 = \frac{32}{3}$$

.

- La fonction $x \longmapsto \sin 3x$ est impaire et continue sur $\mathbb{R}$;donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin 3t\,dt = 0.$$

Activité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1. En utilisant le changement de variable $x = t - T$, établir que :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

2. En déduire que :
   - $\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{b}^{b+T} f(t)\,dt.$
   - $\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$

On en déduit la propriété suivante :

Propriété

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.
Pour tous nombres réels a et b, on a :
- $\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

Exemple :

La fonction $x \longmapsto \cos 2t$ est continue sur $\mathbb{R}$ de période π ; donc :
$I = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \int_{\pi-\frac{\pi}{4}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \cos 2t\,dt = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$
$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} \cos 2t\,dt = \int_0^{\pi} \cos 2t\,dt = 0.$

2.7.2 Intégration de fonctions particulières

Intégration des polynômes trigonométriques

On a vu dans la ressource 7 deux méthodes pour déterminer une primitive d'un polynôme trigonométrique. On utilisera ces résultats pour calculer les intégrales suivantes :
<u>Calculer :</u>

1. $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \sin^3 t + \frac{3}{4}\cos^3 t)\,dt$.
2. $B = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin^2 t - 2\cos^4 t)\,dt$.

<u>Solution</u>

1. on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cos t \sin^3 t + \frac{3}{4}\cos^3 t = \cos t(\sin^3 t - \frac{3}{4}\sin^2 t + \frac{3}{4})$.
   Donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\sin^3 t - \frac{3}{4}\sin^2 t + \frac{3}{4})\,dt \\ &= [\frac{1}{4}\sin^4 t - \frac{1}{4}\sin^3 t + \frac{3}{4}\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. On a : $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2} \qquad$ et $\qquad \cos^4 t = (\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2})^4 = \frac{1}{8}(\cos 4t + 4\cos 2t + 3)$.
   Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \sin^2 t - 2\cos^4 t = -\frac{1}{4}\cos 4t - \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}$.
   On obtient :
   $B = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (-\frac{1}{4}\cos 4t - \frac{3}{2}\cos 2t - \frac{1}{4})\,dt = [-\frac{\sin 4t}{16} - \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}t]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = -(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\pi}{24})$.

Intégration des fonctions rationnelles

Travaux dirigés[2]

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ privé de -3 et 2 par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}$$

   (a) Déterminer les nombres réels a et b pour que :
   $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$.

   (b) Calculer en utilisant ce qui précède l'intégrale :

$$A = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

2. (a) Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que :
   $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2}{t(t^2+2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+2}$

   (b) Calculer $B = \int_1^2 \frac{2}{t(t^2+2)}\, dt$

Solution

1. a) On a : pour $x \neq -3$ et $x \neq 2$, $\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ 3a - 2b = 1. \end{cases}$

   on trouve $a = \frac{1}{5}$ et $b = -\frac{1}{5}$

   b)La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x-6}$ est continue sur $[0; 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (\frac{1}{2}\frac{1}{t+2} - \frac{1}{5}\frac{1}{t+3})\, dt \\ &= [\frac{1}{5} \ln |t - 2| - \frac{1}{5} \ln |t + 3|]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

2. a) on a : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2}{t(t^2+2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+2}$, donc $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$.

   b) La fonction $t \longmapsto \frac{2}{t(t^2+2)}$ est continue sur $[1; 2]$.

   On obtient :

   $B = \int_1^2 \frac{2}{t(t^2+2)}\, dt = \int_1^2 (\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+2})\, dt = [\ln t - \frac{1}{2\ln(t^2+2)}]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2.$

2.7.3 Calcul approché d'une intégrale

Soit f une fonction positive sur un intervalle $[a; b]$. Appelons $\mathcal{D}$ le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On sait que $A = aire(\mathcal{D}) = \int_a^b f(t)\, dt$ en u.a . Si on sais trouver une primitive F de f sur l'intervalle $[a; b]$, on peut calculer l'aire de $\mathcal{D}$. Cela se complique quant on ne sait pas trouver une primitive F, on calcul alors une valeur approchée A' de A. L'erreur commise en remplaçant A par A' est $|A - A'|$.

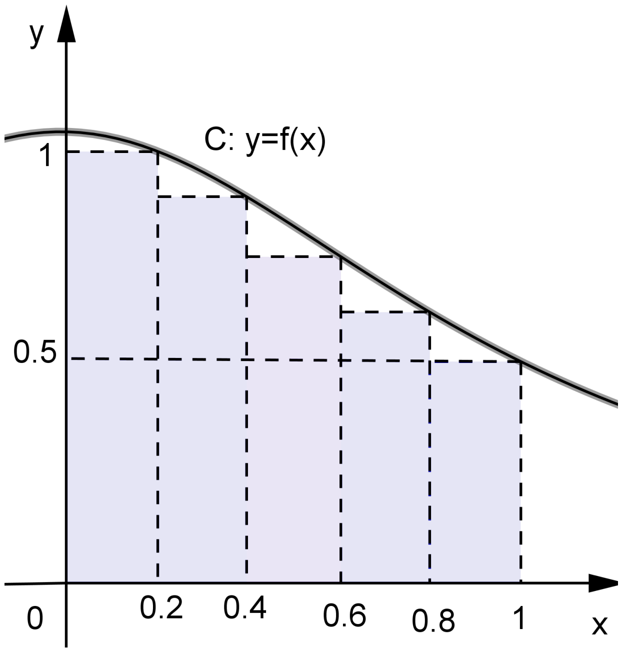
Il existe plusieurs méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une intégrale A. Nous retiendrons les 3 méthodes suivantes :

- Méthode des rectangles ;
- Méthode du point médian ;
- Méthode des trapèzes.

Dans chacun des cas :

- on partage l'intervalle $[a; b]$ en intervalles de même amplitude ;
- On prend pour valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$ l'aire du domaine colorié.

Nous ne présenterons ici que la méthode des rectangles.



Méthode des rectangles

On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $a = x_o, x_1, ..., x_n = b$.
Pour tout entier naturel i $(0 \leq i \leq n-1)$ on prend pour valeur approchée de $\int_{x_i}^{x_i+1} f(t)\,dt$ le nombre réel : $\frac{b-a}{n} f(x_i)$.
On pose : $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$; s_n est une valeur approchée de $A = \int_a^b f(t)\,dt$.

Précisons l'incertitude de la valeur approchée et démontrons que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite A.
On suppose que la fonction f est dérivable sur $[a; b]$ et que $|f'|$ est majorée par un nombre réel M sur cet intervalle.

Pour tout entier naturel i $(0 \leq i \leq n-1)$, on a :

$$\forall t \in [x_i; x_i+1], |f(t)-f(x_i)| \leq M(t-x_i) \Rightarrow \int_{x_i}^{x_i+1} |f(t)-f(x_i)|\, dt \leq \frac{M}{2}[(t-x_i)^2]_{x_i}^{x_i+1}$$
$$\Rightarrow |\int_{x_i}^{x_i+1} (f(t)-f(x_i))\, dt| \leq \frac{M}{2}(\frac{b-a}{n})^2.$$

On en déduit, par sommation sur les n intervalles, que :

$$|A - s_n| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2.$$

Donc : $\lim_{n \to +\infty} s_n = A.$
cette étude conduit à énoncer la propriété :

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$ telle que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.
Lorsque l'on partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémité $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$.
On a :

- La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, converge vers $A = \int_a^b f(t)\, dt$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|A - s_n| \leq \frac{M}{2n}(b-a)^2$.

Remarques

- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})$, converge également vers A.
- Lorsque la fonction f est croissante on obtient,

$$s_n \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq S_n;$$

  lorsque la fonction f est décroissante, on obtient :

$$S_n \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq s_n.$$

Exemples

1. Déterminer une valeur approchée de $A = \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$, en partageant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalle de même amplitude. Majorer l'erreur commise.

2. Déterminer un encadrement de $B = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ en partageant l'intervalle $[0;1]$ en 5 intervalles de même amplitude.
   Sachant que $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$, en déduire une valeur approchée de π au centième près.
3. Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}.$$

Solution

1. • Soit la fonction $f : x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
   On a : $s_{10} = \frac{1}{10}[f(0) + f(\frac{1}{10}) + ... + f(\frac{9}{10})]; donc : A \approx 0,875$.

   • f est dérivable sur $[0;1]$ et sa dérivée est la fonction : $x \longmapsto -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
   La fonction $|f'|$ est majorée par 1 sur $[0;1]$;donc : $|s_{10} - A| \leq 10^{-2}$.
2. Soit la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$.
   g est décroissante sur $[0;1]$; donc : $S_5 \leq B \leq s_5$.
   On a : $s_5 = \frac{1}{5}[g(0) + g(\frac{1}{5}) + ... + g(\frac{4}{5})]$ et $S_5 = \frac{1}{5}[g(\frac{1}{5}) + ... + g(\frac{4}{5}) + g(1)]$.
   On obtient $s_5 \approx 0,83$ et $S_5 \approx 0,73$.
   Remarquons que $4B = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}$ donc $4S_5 \leq \pi \leq 4s_5$; or $4S_5 \approx 2,94$ et $4s_5 \approx 3,34$.
   Donc $2,94 \leq \pi \leq 3,34$ soit $\pi \approx \dfrac{2,94+3,34}{2} = 3,14$.
3. Soit la fonction $h : x \longmapsto \sin \pi x$.
   Partageons l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles de même amplitude($n \in \mathbb{N}^*$).
   On a : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h(\frac{\pi k}{n})$; U_n est une valeur approchée, par la méthode des rectangles, de $\int_0^1 h(t)\,dt$.
   Or, h est dérivable sur $[0;1]$ et $|h'|$ est majorée par π sur cet intervalle.
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 \sin \pi t\,dt = -\frac{1}{\pi}[\cos \pi t]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

2.8 Calculs de volumes

Dans cette étude, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$; l'unité de volume est le volume du cube de dimension OI, OJ et OK. Avec $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}, \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}\ et$ $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{k}$

Nous admettons la propriété suivante :

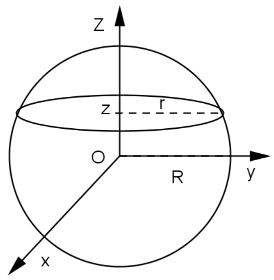
Propriété

Soit Σ un solide délimité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b(a < b)$ et S la fonction qui à tout élément z de $[a; b]$ associe l'aire de la section du solide S par le plan de cote z.
Si la fonction $z \longmapsto S(z)$ est continue sur $[a; b]$, alors le volume de Σ (en unité de volume) est : $\int_a^b S(z)\, dz$.

Exemples

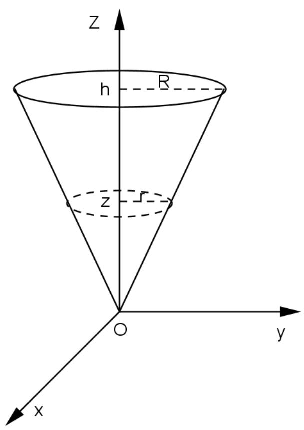
- Volume d'une sphère de rayon R :

  Choisissons comme origine du repère le centre de la sphère. La section de la sphère par le plan de cote z $(-R \leq z \leq R)$ est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$.



  L'aire de ce disque est : $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$.
  Le volume de sphère est donc :
  $V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\, dz = 2\int_0^R (R^2 - z^2)\, dz = 2\pi[R^2 z - \frac{1}{3}z^3]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$.
  On retrouve ainsi un résultat admis au collège et démontré par Archimède (287-212 av. J.-C.).
- Volume du cône et de la pyramide.
  Soit h la hauteur$(h \neq 0)$ et $\mathcal{B}$ l'aire de la base du cône.

  Choisissons comme origine du repère le sommet O de ce cône et pour axe (OK) la perpendiculaire au plan $(\mathcal{P})$ de la base. La section du cône par le plan de cote $z(0 \leq z \leq h)$ est l'image de la base par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{h}$.



Son aire est : $S(z) = \mathcal{B} \times (\frac{z}{h})^2$.
Le volume est donc :

$$V = \int_0^h \frac{\mathcal{B}}{h^2} z^2 \, dz = [\frac{\mathcal{B}}{h^2}\frac{z^3}{3}]_0^h = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}.$$

La démonstration et la formule sont identiques pour une pyramide ; on retrouve encore ainsi deux résultats admis au collège.

♣ Exercices résolus ♣

2.9 Énoncé

Exercices (Fonctions définies par une intégrale)

1. **Fonction** $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

   Soit F la fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F.
   b) Étudier les variations de F sur $\mathcal{D}_F$.
   c) Étudier le signe de la fonction f définie par : $f(x) = F(x) - \ln x$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$.
   d) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_F$ et tracer cette courbe.

2. **Fonction** $x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$

   Soit G la fonction définie par $G(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$ et $\mathcal{C}_G$ sa courbe représentative.
   1. Démontrer que la fonction G est impaire.
   2. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.
   En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} G(x)$.
   3.Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
   4.a) Dresser le tableau de variation de G.
   b) Calculer une valeur approchée de $G(\frac{\sqrt{2}}{2})$ en utilisant la méthode des rectangles.*(On partagera l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}]$ en 10 intervalles de même amplitude.)*
   c) Tracer $\mathcal{C}_G$.

2.9.1 Solutions

1. [1]**Fonction** $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

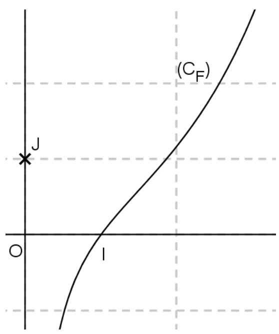
a) La fonction $x \longmapsto \frac{e^x}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$; donc : $\mathcal{D}_F =]0;+\infty[$.
b) La fonction F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et sa dérivée est la fonction F' :$x \longmapsto \frac{e^x}{x}$,qui est une fonction positive sur $\mathcal{D}_F$;donc,F est une fonction croissante.
c) On a : $\forall x \in]0;+\infty[, f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$.
La fonction $t \longmapsto \frac{e^t-1}{t}$ est positive sur $]0;+\infty[$;donc, f est négative sur $]0;1[$ et positive sur $]1;+\infty[$.

- On a : $\forall x \in]0;1[, F(x) \leq \ln x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$.
- On a :$\forall x \in]1;+\infty[, F(x) \geq \ln x$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$; donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variation de F suivant :

x	0		1		+∞
F'(x)	‖		+		
F(x)	‖	-∞	↗ 0 ↗		+∞

d) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$; donc (OJ) est asymptote à $\mathcal{C}_F$.
Soit x un élément de $]1;+\infty[$.
On a : $\forall t \in [1;x], \frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}$; donc :$F(x) \geq \frac{1}{x}\int_1^x e^t\,dt$.
On en déduit que :$\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^t-e}{x^2}$.
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-e}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} [\frac{e^x}{x^2}(1-e^{1-x})] = +\infty$. On en déduit que $\mathcal{C}_F$ a en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).
Représentation graphique :



[1]**Fonction** $x \longmapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc $D_G = \mathbb{R}$.

Soit x élément de $\mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, on obtient :

$$G(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = \int_x^{2x} \frac{-1}{\sqrt{1+u^4}}\,du = -G(x)$$

Donc la fonction G est impaire.

2. On a : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{\frac{-3}{2}}$, la fonction f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$.
Soit x un élément de $]0;+\infty[$. En appliquant l'inégalité de la moyenne à f sur $[x;2x]$,on obtient :

$$xf(2x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt \leq xf(x).$$

Donc :$\forall x \in]0;+\infty[, \frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq G(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = 0$; donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

3. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(2x) - F(x)$.
G est la différence de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a :$\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \dfrac{\sqrt{4+4x^4} - \sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}}$

$$= \frac{3(1-4x)}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}(\sqrt{4+4x^4}+\sqrt{1+16x^4})}$$
$$= \frac{3(1+2x^2)(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1+16x^4}\sqrt{1+x^4}(\sqrt{4+4x^4}+\sqrt{1+16x^4})}.$$

4.a) G est une fonction impaire, on peut restreindre son étude à $]0;+\infty[$. On obtient le tableau de variation suivant :

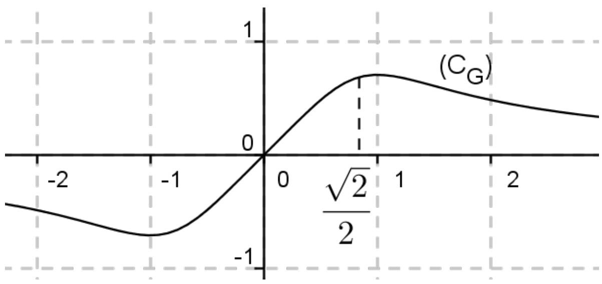
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
G'(x)		-	0	+	
G(x)	0	$\nearrow$	$G(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\searrow$	0

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction
$f' : x \mapsto -2x^3(1+x^4)^{-\frac{3}{2}}$. L'amplitude de l'intervalle $[\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}]$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que :

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} f(t)\,dt \approx \frac{\sqrt{2}}{20}\sum_{k=0}^{9} f(\frac{\sqrt{2}}{2} + k\frac{\sqrt{2}}{20}).$$

Avec une calculatrice, on obtient : $G(\frac{\sqrt{2}}{2}) \approx 0,47$



⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

Exercices d'entraînement

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes. On admettra que toutes les intégrales existent bien.
a)$\int_1^e (x+\frac{1}{x})\,dx$; b)$\int_0^2 \frac{2t}{(t^2+2)^2}\,dt$; c)$\int_{-1}^1 (e^{-x})^2\,dx$; d)$\int_0^2 |x^2-1|\,dx$,
e)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^5 t\,dt$; f)$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$; g)$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\sin 2x\,dx$; h)$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$.

Exercice 2

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :
  a)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$; b)$\int_1^e x\ln x\,dx$; c)$\int_1^2 t\sqrt{-t+3}\,dt$; d)$\int_3^{-1} x^2e^{3x}\,dx$;
  e)$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos 3x\,dx$.
- En utilisant un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes :
  i) $\int_1^2 t\sqrt{-t+3}\,dt$; ii)$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; iii)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}\,dx$; iv) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$;
- Soit $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, Montrer que : $\int_1^a \frac{1}{t}\,dt=\int_a^{ab}\frac{1}{t}\,dt$ et en déduire que $\ln ab=\ln a+\ln b$.

Exercice 3

Sans calculer les intégrales, justifier les égalités suivantes :
a)$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x)\,dx=0$; b)$\int_1^{-1} \frac{x^3}{x^4-x^2+3}\,dx=0$; c)$\int_{-1}^2 \frac{x}{|x|+1}\,dx=\int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$;
d)$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (\sin 2x-\cos 2x)\,dx=-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2x\,dx$; e)$\int_{-1}^1 \ln(\frac{2-x}{2+x})\,dx=0$.

Exercice 4

a)Après avoir linéarisé $\cos^4 x$,calculer l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$.
b)On pose $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\,dx$.

- Montrer que : $\cos^5 x=\cos x(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)$.
- En déduire J.

c)Calculer $K=\int_0^{\pi}\cos 3x\cos 5x\,dx$.

Exercice 5

1. Soit la fonction f définie pour $x\geq 0$ par $f(x)=\frac{4x^2+2}{2x+1}$.
   Montrer que, pour $x\geq 0$, $f(x)=2x-1+\frac{3}{2x+1}$.

2. En déduire l'intégrale $A = \int_0^2 f(x)\, dx$.

Exercice 6

1. Déterminer les réels a,b et c tels que :
   $\frac{2x+3x^2}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$, pour tout réel $x \neq -2$.
2. En déduire $\int_0^2 \frac{2x+3x^2}{x+2}\, dx$.

Exercice 7

Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$ pour $f(x) = e^{-2x}$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^x$.

1. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer l'intégrale $B = \int_{-1}^1 x^2e^x\, dx$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \frac{x}{x^2+3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(o; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : $2cm$).
La droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ à l'infini. Soit (D) le domaine limité par $\mathcal{C}$,Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Sans tracer $\mathcal{C}$, situer $\mathcal{C}$ par rapport à Δ sur, $[0; 2]$.
2. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine (D).

Exercice 10

Soit la f la fonction définie sur $[0; 2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
Soit $\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unités graphiques : $5cm$ en abscisses et $10cm$ en ordonnées).

1. Construire $\mathcal{C}$.
2. Soit A l'intégrale définie par : $A = \int_0^2 e^{-x^2}\, dx$.
   Soit $(\mathcal{E})$ le domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
   (a) Partager l'intervalle $[0, 2]$ en dix intervalles de même amplitudes et donner un encadrement de aire$(\mathcal{E})$ par la méthode des rectangles.
   (b) Donner alors une valeur approchée de aire$(\mathcal{E})$.
3. Sachant que $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en déduire une valeur approchée du nombre π.

Exercice 11

Une maladie contagieuse s'est développée dans une ville. On a constaté que le nombre de personnes atteintes par cette maladie t jours après l'apparition de celle-ci est égal à : $f(t) = 30t^2 - t^3$ pour $0 \leq t \leq 30$.

1. Calculer le nombre moyen de personnes malades durant les dix premiers jours.
2. Calculer le nombre moyen de personnes malades durant les dix jours où la maladie a fait le plus de malades.

Exercice 12

Le but de cet exercice est d'étudier l'intégrale : $I = \int_{-3}^{0} x^2 e^x \, dx$.

1. En étudiant l'application f :$x \longmapsto x^2 e^x$, démontrer que f est bornée sur $[-3; 0]$.
   En déduire que : $0 \leq I \leq \frac{12}{e^2}$.
2. A l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que : $I = 2 - \frac{17}{e^3}$.

Exercice 13

L'unité graphique est égale à 2 cm sur chaque axe du repère.
Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 4x$ et $g(x) = (x - 4)^2$.

1. Montrer que $\forall x \in [2; 4]$, $g(x) \leq f(x)$
2. En déduire l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

Exercice 14

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = (\ln(x))^2$.

1. Calculer la dérivée h' de la fonction h.
2. Calculer l'intégrale :
$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$$

Exercice 15

1. Montre que : $\int_0^1 \sqrt{1-u} \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$ (poser $u = \sin t$).
   On appellera J cette intégrale.
2. Par IPP, montrer que : $J = \frac{\pi}{2} - J$ et en déduire la valeur de J.

Exercice 16

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^{\pi}(at^2 + bt)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

Exercice 17

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
On appelle $\mathfrak{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ d'unité 10 cm.

1. Quel est le sens de variation de f ? Tracer $\mathfrak{C}$.
2. Soit (E) le domaine limité par la courbe $\mathfrak{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine (E) par la méthode des rectangles (on divisera $[0;1]$ en cinq intervalles).

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.
Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$.
Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - f(x)$.

1. Calculer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$

Exercice 19

1. Résoudre le système :
   $\begin{cases} x-3y=2\ln 2 \\ x+y=4\ln 2 \end{cases}$
2. On pose $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4}\,dx$.
   Calculer $I + J$ et $I - 3J$. Déduire de la question 1) les valeurs exactes de I et J.

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$(unité graphiques :2cm par axes).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser les éventuelles asymptotes.
2. Calculer la fonction dérivée f' de f et préciser son signe.
3. dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ en 0.

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et ses éventuelles asymptotes ainsi que la droite T.
6. Calculer l'aire du domaine suivant en cm^2 :
   $D = \{M(x; y) \text{ tels que } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$

Exercice 21

Soit α et β deux entiers naturels. On pose :

$$I(\alpha; \beta) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta \, dt$$

1. Calculer $I(\alpha; 0)$.
2. On suppose que $\beta \geq 1$. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$I(\alpha; \beta) = \frac{\beta}{\alpha+1} I(\alpha+1; \beta-1)$$

3. En déduire que :
   $I(\alpha; \beta) = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta)!} I(\alpha+\beta; 0)$ puis que $I(\alpha; \beta) = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$

Exercice 22

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$.

1. Calculer $I + J$ et $I - J$ (on pourra utiliser la méthode d'intégration par parties).
2. En déduire I et J.

Exercice 23

Pour tout entier natunrel n, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$.

1. Calculer I_o et J_o.
2. On suppose maintenant que n est non nul.
   (a) En intégrant par parties I_n, montrer que :

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

   (b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Exercice 24

On pose pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$.

1. calculer $I_o = \int_1^e x^2 \, dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.
3. A l'aide d'une intégration par parties démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
4. En déduire I_2.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, I_n est positive.
6. Déduire de la question 3 que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$$

7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 25

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$I_n = (-1)^n e^{-n\pi} \frac{e^{-\pi}+1}{2}.$$

2. Démontrer que la suite $(I_n)_n$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

Exercice 26

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

1. Calculer I_o, I_1 et I_2.
2. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(on pourra remarquer que $\cos^n x = \cos x \cos^{n-1} x$).

3. En déduire I_3 et I_4.

Exercice 27

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx$.

1. Démontrer que (I_n) est une suite décroissante et minorée par 0.
   (I_n) est-elle convergente ? Justifier.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}.$$

3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $I_{n-1} \leq \frac{e^2}{n}$.

4. Quelle est la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 28

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - e^{-\frac{x}{3}}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.(unité graphiques :2 cm).

1. (a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Montrer que la droite D d'équation $y = 1+x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   (c) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à D.
2. (a) Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer dans le repère $(o; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite D.

PARTIE B

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par A_n l'aire, en unité d'aire de la partie du plan délimité par la droite par la droite D, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine défini ci-dessus pour $n = 2$.
2. Exprimer A_n en fonction de n.
3. En déduire que la suite $(A_n)_n$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme A_1.
4. Exprimer la somme $S_n = A_1 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?
5. Calculer la limite de la suite $(S_n)_n$.

♣ Bibliographie ♣

[1] SALIOU TOURE et les autres, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale(CIAM) SM, EDICEF, 11/2004.

[2] CHARLES MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA ÉDUCATION, Mars 2012.

[3] M. MONGE, M.-C.Audoum-Egouoff et Lemoine-Body, Mathématiques terminales C et E. Tome 1 librairie Classique Eugène Belin, 1974.