EQUATIONS DIFFERENTIELLES EN Tle D

Présenté par:

DESSAP SOCPA Kevin

Sous l'encadrement de :

Mr NNANG Hubert (Maitre des Conférences)

Mr ADJABA BIWOLI Jean Pierre (IPN)

Mme SIMO née MELELE (PLEG)

19 août 2013

♣ Table des matières ♣

♣ INTRODUCTION ♣

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du $XVII^{eme}$ siècle. Les équations différentielles se sont introduites en mathématiques par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique, comme par exemple :
- Le mouvement du pendule circulaire
- Le mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonienne.
- L'étude du mouvement de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes).
- Le problème de l'équation de la courbe (appelée chainette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids. cf.[5]

Les mathématiciens tels que Cauchy, Lipschitz, Riccati et bien d'autres ont élaboré la théorie des équations différentielles et donné des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de telles équations satisfaisant à des conditions initiales.
Les équations différentielles sont d'une importance capitale :

✓ Elles permettent de modéliser les phénomènes naturels dans le but d'étudier leur évolution dans le temps. Nous pouvons citer les domaines tels que l'économie, la démographie, l'épidémiologie, la physique, la mécanique, l'électricité et bien d'autres.

✓ Elles permettent après leur résolution de donner des informations sur un phénomène donné, de prévoir d'autres phénomènes et de faire des pronostics.

Il devient donc très important pour l'homme de découvrir la notion, l'étudier, l'assimiler et l'utiliser. C'est dans ce sens que nous avons travaillé sur les équations différentielles en terminale D ayant pour objectifs :

✓ Présenter cette notion nouvelle à l'élève d'une manière détaillée afin qu'il soit capable de l'assimiler aisément.

✓ Montrer à celui-ci par quelques exemples d'application, l'utilité de cet objet mathématique.

✓ Donner aux enseignants un moyen de mieux transmettre cette notion.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Objectifs pédagogiques généraux

Au terme de cette ressource l'apprenant doit être capable de :

1. Résoudre les équations différentielles de premier ordre à coefficients constants.
2. Résoudre les équations différentielles de second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre quelques problèmes dans les domaines des sciences physiques, de la biologie et autres en utilisant les équations différentielles.

Liens avec d'autres parties du programme

Cette notion a un lien avec :

1. Le calcul des primitives et des intégrales
En effet on utilise le calcul des primitives pour résoudre les équations différentielles du type $f' = g$, $f'' = g$, f et g étant deux fonctions de la variable numérique x.
2. L'étude des fonctions :
En effet la solution d'une équation différentielle est une fonction dont l'étude et le tracé peuvent apporter des informations importantes à la compréhension des phénomènes naturels et autres.

Objectifs pédagogiques spécifiques

Objectif spécifique n°1

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène $y' + ay = 0$, a étant un réel.
2. Montrer qu'une fonction donnée est solution particulière de l'équation
$y' + ay = b$ (avec a et b des réels).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ (avec a et b des réels).
4. Déterminer la solution obéissant à des conditions initiales.

Objectif spécifique n°2

1. Déterminer et résoudre l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ (avec a et b des réels).
2. Déterminer la solution générale de cette équation différentielle.
3. Montrer qu'une fonction donnée est solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ (avec a, b, c des réels).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ (avec a, b et c des réels).
5. Déterminer la solution obéissant à des conditions initiales.

Objectif spécifique n°3

Utiliser les équations différentielles pour résoudre quelques problèmes de sciences physiques, biologie et d'autres domaines.

Pré-requis

Pour aborder cette notion l'apprenant doit au préalable être capable de :

1. Déterminer les primitives d'une fonction donnée.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.
4. Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.
5. Calculer les dérivées successives d'une fonction dérivable.

1.1 Notion d'équation différentielle

Activité 1.1

Soient f et g deux fonctions de la variable numérique x définies par : $f(x) = e^{3x}$ et $g(x) = e^{2x}$

1. Calculer $f'(x)$ et établir une relation entre f et f' qu'on notera (E_1).
2. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ et établir une relation entre g, g' et g'' qu'on notera (E_2).
3. Pour chacune des relations ci-dessus quel est le plus grand ordre des dérivées ?
4. Chacune des relations ci-dessus est une équation différentielle, son ordre étant le plus grand ordre des dérivées.
   (a) Citer trois autres équations différentielles du premier ordre et trois du second ordre.
   (b) Donner alors la définition d'une "équation différentielle".

Solution

1. f est dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = e^{3x}$ et $f'(x) = 3e^{3x}$
   On remarque que $f'(x) = 3f(x)$ c'est-à-dire que $f'(x) - 3f(x) = 0$.
   On a donc la relation (E_1) : $f' - 3f = 0$.
   (E_1) est une relation entre la fonction f et sa dérivée première : On dit que (E_1) est **une équation différentielle** faisant intervenir la fonction f et sa dérivée première.
2. g est dérivable et définie sur $\mathbb{R}$.
   $g(x) = e^{2x}$, $g'(x) = 2e^{2x}$ et $g''(x) = 4e^{2x}$
   On remarque que $g''(x) + g'(x) - 6g(x) = 0$ ou encore $g''(x) - g'(x) - 2g(x) = 0$
   On a donc la relation (E_2) : $g'' + g' - 6g = 0$ ou encore (E_2) : $g'' - g' - 2g = 0$
   (E_2) est une relation entre la fonction g, sa dérivée première et sa dérivée seconde : On dit que (E_2) est **une équation différentielle** faisant intervenir la fonction g, sa dérivée première et sa dérivée seconde.
3. - Le plus grand ordre des dérivées dans (E_1) est **un** : On dit que (E_1) est **une équation différentielle de premier ordre.**
   -Le plus grand ordre des dérivées dans (E_2) est **deux** : On dit que (E_2) est **une équation différentielle de second ordre.**
4. (a) Equations différentielles du premier ordre :
   $f' - 5f = 0 \qquad f' + 4f = 0 \qquad 2f' + 7f = 0$
   Equations différentielles du second ordre :
   $f'' + f' + f = 0 \qquad f'' + 5f' - 2f = 4 \qquad 3f'' - f' + 8f = 0$

(b) Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives.

Définitions 1.1 cf.[6]

1. On appelle "**équation différentielle**", toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.
   Cette fonction est souvent notée y et ses dérivées successives y', y'', y''' ...
2. Une équation différentielle est dite d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant dans cette équation est n.

Remarques 1.1

1. La fonction inconnue peut aussi être notée f, g, h...
2. L'égalité $ay'' + by' + cy = d$ (où $a \neq 0$, $b \neq 0$, c, et d sont des réels et y une fonction inconnue et deux fois dérivable) est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants(a, b, c). Le réel d est son **second membre**.
3. Lorsque $d = 0$ on dit que cette équation différentielle est sans second membre.
4. Si $a = b = 0$ alors cette égalité n'est pas une équation différentielle car aucune des dérivées successives n'intervient ici.
5. Lorsque l'un au moins des nombres réels a, b, c est variable, on parle d'équation différentielle à coefficients non constants ou variables.

Exemple d'application 1.1

Pour chacune des égalités ci-dessus, y est une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$, y' et y'' ses dérivées première et seconde respectivement. Dans chaque cas dire s'il s'agit d'une équation différentielle et si c'est le cas donner son ordre, ses coefficients et son second membre.

1. $-y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $2xy + 3 = 0$
3. $y' + 4y = 2$
4. $(1 + x^2)y = 2x$
5. $xy'' + \frac{2}{3-x}y' + 3y = 0$
6. $y' - 3 = 0$

Solution

1. C'est une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre et de coefficients -1, 2 et -3.
2. Ce n'est pas une équation différentielle car absence de dérivées.
3. C'est une équation différentielle d'ordre 1 de second membre 2 et de coefficients 1 et 4.
4. Ce n'est pas une équation différentielle car absence de dérivées.
5. C'est une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre et de coefficients x, $\frac{2}{3-x}$ et 3. On remarque ici que les coefficients ne sont pas tous constants.
6. On peut encore écrire $y' = 3$: C'est une équation différentielle de premier ordre de second membre 3 et de coefficient 1.

Activité 1.2

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.
On donne $f(x) = A\cos 2x,\ A \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que pour tout nombre réel A la fonction f vérifie l'équation (E).
   (b) Sachant que A est un nombre réel quelconque, que peut-on dire du nombre de solutions de (E) ?
2. (a) Déterminer la fonction g solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
   (b) Existe t-il une autre fonction h solution de (E) vérifiant la même condition ?

Solution

$(E) : y'' + 4y = 0$

1. (a) $f(x) = A\cos 2x$, $f'(x) = -2A\sin 2x$ et $f''(x) = -4A\cos 2x$.
   $f''(x) + 4f(x) = -4A\cos 2x + 4A\cos 2x = 0$
   Donc la fonction f vérifie l'équation différentielle (E) pour tout nombre réel A : On dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).
   (b) A parcours $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qu'il existe une infinité de fonctions f solutions de (E).
2. (a) Déterminons la fonction g solution de (E) vérifiant $g(0) = 1$.
   $g(0) = 1 \Longrightarrow A = 1$.
   C'est-à-dire que $g(x) = \cos 2x$: On dit que la fonction g est une solution de (E) vérifiant une condition initiale.
   (b) Si h est une solution de (E) tel que $h(0) = 1$, avec les mêmes calculs que précédemment on obtient $h(x) = \cos 2x = g(x)$. Il existe donc une unique solution g de (E) vérifiant $g(0) = 1$.

Définitions 1.2 cf.[6] [7]

1. Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est appelée **solution sur I** de cette équation différentielle.
2. Résoudre ou intégrer une équation différentielle sur un intervalle ouvert I c'est déterminer l'ensemble des solutions sur I de cette équation différentielle.
3. La courbe représentative d'une fonction solution d'une équation différentielle est appelée **courbe intégrale** de cette équation différentielle.
4. Pour tout couple $(x_0; y_0)$, étant donnée l'équation différentielle $(E) : y' + ay = b$ (où a et b sont des réels), on appelle condition initiale sur (E) l'égalité $y(x_0) = y_0$.
5. Pour tout triplet $(x_0; y_0; z_0)$, étant donnée l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c$ (où a, b et c sont des réels), on appelle conditions initiales sur (E) les égalités $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.
6. On appelle **solution particulière** d'une équation différentielle toute fonction f vérifiant cette équation.

Propriété 1.1

1. ✓ Si une équation différentielle admet une solution alors elle admet une infinité de solutions.
2. ✓ Etant donné une équation différentielle, il existe une et une seule solution vérifiant une condition initiale.

1.2 Résolution des équations différentielles de premier ordre à coefficients constants

1.2.1 Résolution de l'équation différentielle linéaire de premier ordre à coefficients constants sans second membre $y' + ay = 0$

Activité 2.1

On donne l'équation différentielle $(E) : f' + af = 0, a \in \mathbb{R}$
f étant une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction nulle est-elle solution de (E) ?
2. Déterminer pour $a = 0$ toutes les solutions de (E).

3. On suppose maintenant que $a \neq 0$ et que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $(E) \Longleftrightarrow \frac{f'}{f} = -a$.
   (b) En intégration chaque membre déterminer l'expression de la fonction f.
   (c) combien (E) a t-elle de solutions ?
4. Quelles sont les étapes à suivre dans la résolution des équations différentielles du type $y' + ay = 0$?

Solution

1. $f(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) + af(x) = 0$.
   C'est-à-dire que la fonction nulle est solution de (E).
2. Pour $a = 0$ on a $f' = 0$ et les solutions de (E) sont les fonctions f définies par $f(x) = A, A \in \mathbb{R}$.
3. (a) $f' + af = 0 \Longleftrightarrow f' = -af \Longleftrightarrow \frac{f'}{f} = -a$.
   (b) Déterminons l'expression de la fonction f.

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} = -a \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = -\int adx \\
&\Longleftrightarrow \quad ln|f(x)| = -ax + c, c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad |f(x)| = e^c e^{-ax} \\
&\Longleftrightarrow \quad f(x) = ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

   Donc (E) a pour solutions les fonctions $x \longmapsto ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}$.
   (c) (E) a une infinité de solutions car k parcourt $\mathbb{R}$.
4. Pour résoudre une équation différentielle du type $y' + ay = 0$ on procède de la manière suivante :
   -Mettre l'équation sous la forme $\frac{y'}{y} = -a$.
   -Intégrer membre à membre pour déterminer la fonction y.

Propriété 2.1

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \in \mathbb{R}$) et f une fonction de la variable réelle x définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. f est une solution de (E) si et seulement si pour tout nombre réel x on a : $f(x) = ke^{-ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Remarques 2.1

1. $y' - ay = 0 \Longleftrightarrow y' + (-a)y = 0$ et les solutions sont les fonctions $x \longmapsto ke^{ax}, k \in \mathbb{R}$.

2. $ay' + by = 0 (a \neq 0) \Longleftrightarrow y' + \frac{b}{a}y = 0$ et les solutions sont les fonctions $x \longmapsto ke^{-\frac{b}{a}x}, k \in \mathbb{R}$.

Exemple d'application 2.1

Dans chacun des cas suivants déterminer la famille des solutions de l'équation différentielle.
$(E_1) : y' + 2y = 0$; $(E_2) : y' - 3y = 0$; $(E_3) : 4y' + 3y = 0$
En déduire dans chacun de ces cas la solution vérifiant la condition initiale $y(1) = -1$.

Solution

1. Pour l'équation (E_1) on a : $a = 2$ donc les solutions de (E_1) sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-2x} (k \in \mathbb{R})$.
   $f(1) = -1 \Longrightarrow ke^{-2} = -1 \Longrightarrow k = -e^2$ et $f(x) = -e^2 e^{-2x} = -e^{-2(x-1)}$.
2. L'équation (E_2) peut encore s'écrire $y' + (-3)y = 0$ c'est-à-dire que $a = -3$.
   Donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $f(x) = ke^{3x} (k \in \mathbb{R})$.
   $f(1) = -1 \Longrightarrow ke^3 = -1 \Longrightarrow k = -e^{-3}$ et $f(x) = -e^{-3}e^{3x} = -e^{3(x-1)}$.
3. L'équation (E_3) peut encore s'écrire $y' + \frac{3}{4}y = 0$ c'est-à-dire que $a = \frac{3}{4}$.
   Donc les solutions de (E_3) sont les fonctions $f(x) = ke^{-\frac{3}{4}x} (k \in \mathbb{R})$.
   $f(1) = -1 \Longrightarrow ke^{-\frac{3}{4}} = -1 \Longrightarrow k = -e^{\frac{3}{4}}$ et $f(x) = -e^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{3}{4}x} = -e^{-\frac{3}{4}(x-1)}$.

1.2.2 Résolution des équations différentielles du type $y' + ay = b$ (avec a et b des réels)

Activité 2.2

On donne les équations différentielles $(E) : y' + ay = b$ et $(E') : y' + ay = 0$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \frac{b}{a}$ est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction quelconque.
   (a) Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - f_0$ est solution de (E').
   (b) Exprimer alors une solution de (E) en fonction d'une solution de (E') et de f_0.
3. Résoudre l'équation (E') et déduire des questions précédentes la solution de l'équation (E).
4. Donner alors la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$.

Solution

1. Montrons que f_0 est une solution particulière de (E).
   $f_0(x) = \frac{b}{a}$, $f_0'(x) = 0$ et $f_0'(x) + af_0(x) = 0 + a\text{x}\frac{b}{a} = b$
   Donc f_0 est une solution particulière de (E).
2. (a) Montrons que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $h = f - f_0$ est solution de (E').

$$\begin{aligned} f \;\; solution \;\; de \;\; (E) &\iff f' + af = b \\ &\iff f' + af = f_0' + af_0 \qquad d'apres \;\; 1) \\ &\iff f' - f_0' + af - af_0 = 0 \\ &\iff (f - f_0)' + a(f - f_0) = 0 \\ &\iff h' + ah = 0 \\ &\iff h = f - f_0 \;\; est \;\; solution \;\; de \;\; (E') \end{aligned}$$

   (b) $h = f - f_0 \Longrightarrow f = h + f_0$ c'est-à-dire qu'une solution de (E) est donnée comme la somme d'une solution de l'équation (E') et la solution particulière f_0 de (E).
3. Résolution de (E').
   D'après la **propriété 2.1** (E') a pour solutions les fonctions h définies par $h(x) = ke^{-2x}, k \in \mathbb{R}$.

4. D'après les questions précédentes on remarque que l'équation $y' + ay = b$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$.

Propriété 2.2 cf.[9]

Soient a et b deux réels avec a non nul. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + ay = b$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions f définies par $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle quelconque.

Preuve

Soit f une solution quelconque de (E). La fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = \frac{b}{a}$ est solution particulière de (E).

On a donc sur $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} f' + af = b \\ f_0' + af_0 = b \end{cases}$

En retranchant membre à membre on obtient
$f' - f_0' + af - af_0 = 0$ c'est-à-dire $(f - f_0)' + a(f - f_0) = 0$

Donc $f - f_0$ est solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - f_0(x) = ke^{-ax}$; $k \in \mathbb{R}$
Finalement pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$.

Exemple d'application 2.2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes .
$(E_1) : y' + 5y = 4$; $(E_2) : \sqrt{2}y' + 2y = 1$; $(E_3) : 2y' - 3y = 1$

Solution

1. $(E_1) : y' + 5y = 4$
   On a : $a = 5 \;\; et \;\; b = 4$
   Donc les solution de (E_1) sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = ke^{-5x} + \frac{4}{5}$; $k \in \mathbb{R}$.
2. $(E_2) : \sqrt{2}y' + 2y = 1$
   $(E_2) \Longleftrightarrow y' + \frac{2}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longleftrightarrow y' + \sqrt{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   On a alors $a = \sqrt{2}; b = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; et \;\; \frac{b}{a} = \frac{1}{2}$
   Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont les fonctions y définies par :
   $y(x) = ke^{-\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}$; $k \in \mathbb{R}$.
3. $(E_3) : 2y' - 3y = 1 \Longleftrightarrow y' - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$
   On a alors $a = -\frac{3}{2}; b = \frac{1}{2} \;\; et \;\; \frac{b}{a} = -\frac{1}{3}$
   Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_3) sont les fonctions y définies par : $y(x) = ke^{\frac{3}{2}x} - \frac{1}{3}$; $k \in \mathbb{R}$.

Propriété 2.3 cf.[2]

- Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = 0$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y_0 = y(x_0)$. Il s'agit de la fonction : $x \longmapsto y_0 e^{-a(x-x_0)}$.
- Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation $y' + ay = b$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y_0 = y(x_0)$. Il s'agit de la fonction : $x \longmapsto (y_0 - \frac{b}{a})e^{-a(x-x_0)} + \frac{b}{a}$.

1.3 Résolution des équations différentielles de second ordre à coefficients constants

1.3.1 Résolution de l'équation différentielle de second ordre à coefficients constants sans second membre $y'' + ay' + by = 0 (a, b \in \mathbb{R})$

Équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

Activité 3.1

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$, a, $b \in \mathbb{R}$
Soit h la fonction de la variable réelle x définie par : $h(x) = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$

1. calculer $h''(x) + ah'(x) + bh(x)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a , b et r pour que h soit solution de (E).

Solution

1. $h(x) = e^{rx}$, $h'(x) = re^{rx}$, $h''(x) = r^2e^{rx}$

$$\begin{aligned} h''(x) + ah'(x) + bh(x) &= r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} \\ &= (r^2 + ar + b)e^{rx} \end{aligned}$$

2. Condition nécessaire et suffisante sur a, b et r.
   h est solution de (E) si et seulement si : $h'' + ah' + bh = 0$.
   C'est-à-dire si et seulement si : $(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$ or $e^{rx} \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
   Donc pour que h soit solution de (E) il est nécessaire et suffisant que $r^2 + ar + b = 0$:
   C'est **l'équation caractéristique** de l'équation différentielle (E).

Définition 3.1 cf.[9]

On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle $y''+ay'+by = 0 \ (a, b \in \mathbb{R})$ l'équation du second degré $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue r.

Exemples

équation différentielle	équation caractéristique
$y'' + 3y' + 2y = 0$	$r^2 + 3r + 2 = 0$
$5y'' - 3y' - y = 0$	$5r^2 - 3r - 1 = 0$
$y'' - 4y' = 0$	$r^2 - 4r = 0$
$y'' + 9y = 0$	$r^2 + 9 = 0$

Résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

1. Si $a = b = 0$ on a l'équation $y'' = 0$.
   $y'' = 0 \Longrightarrow y' = A \Longrightarrow y(x) = Ax + B$ où A et B sont des réels.
2. Si $a \neq 0$ et $b = 0$ on a l'équation $y'' + ay' = 0$. En intégrant chaque membre de cette équation on obtient l'équation $y' + ay = k(k \in \mathbb{R})$ qu'on sait déjà résoudre.
3. Si $b \neq 0$, pour tout nombre réel a la solution de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ dépend des solutions de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Cas où l'équation caractéristique a deux solutions réelles

Activité 3.2

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 5y' + 6y = 0$.

1. Déterminer et résoudre l'équation caractéristique de (E).
   On notera par r_1 et r_2 ses solutions.
2. Montrer que les fonctions f et g de la variable réelle x définies par $f(x) = e^{r_1 x}$ et $g(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions de (E).
3. Montrer que toute combinaison linéaire de deux solutions de (E) est une solution de (E).
4. En déduire que la fonction h définie par $h(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$, A, B $\in \mathbb{R}$ est solution de (E).

Solution

$(E) : y'' - 5y' + 6y = 0$

1. L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 5r + 6 = 0$
   $\Delta = (-5)^2 - 4(6) = 25 - 24 = 1$
   $r_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$
   Donc $S = \{2; 3\}$.

2. Montrons que f et g sont solutions de (E).

   (a) $f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$

   $$\begin{aligned} f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) &= 4e^{2x} - 5(2e^{2x}) + 6e^{2x} \\ &= 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc f est solution de (E).

   (b) $g(x) = e^{3x}$, $g'(x) = 3e^{3x}$, $g''(x) = 9e^{3x}$

   $$\begin{aligned} g''(x) - 5g'(x) + 6g(x) &= 9e^{3x} - 5(3e^{3x}) + 6e^{3x} \\ &= 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc g est solution de (E).

3. Soient f et g deux solutions de (E), A et B deux nombres réels. Montrons que $Af + Bg$ est solution de (E).

   $$\begin{aligned} (Af + Bg)'' - 5(Af + Bg)' + 6(Af + Bg) &= Af'' + Bg'' - 5Af' - 5Bg' + 6Af + 6Bg \\ &= A(f'' - 5f' + 6f) + B(g'' - 5g' + 6g) \\ &= 0 \quad \textit{car } f \textit{ et } g \textit{ sont solutions de } (E) \end{aligned}$$

   Donc $Af + Bg$ est solution de (E).

4. h est une combinaison linéaire des fonctions f et g de la question 2) ; on peut donc déduire de la question 3) que h est une solution de (E). On constate ici que lorsque l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions $f : x \longmapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.

Propriété 3.1 cf.[6]

Soit (E) l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Si l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}(A, B \in \mathbb{R})$.

Preuve(guidée)

1. Ecrit (E') l'équation caractéristique de (E).

2. Suppose r_1 et r_2 les deux solutions réelles et distinctes de (E').
3. Traduit par deux égalités le fait que r_1 et r_2 sont les solutions de (E').
4. Pose h la fonction définie par $h(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
5. Calcule $h'(x)$ et $h''(x)$.
6. Calcule $h''(x) + ah'(x) + bh(x)$.
7. Déduit des questions 3) et 6) que $h'' + ah' + bh = 0$.
8. conclut.

Exemple d'application 3.1

Résoudre les équations différentielles suivantes .
$(E_1) : y'' - y' - 2y = 0 \qquad (E_2) : 2y'' + 9y' + 9y = 0$

Solution

1. $(E_1) : y'' - y' - 2y = 0$
   L'équation caractéristique de (E_1) est : $r^2 - r - 2 = 0$
   $\Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9$ et $\sqrt{\Delta} = 3$
   $r_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $r_2 = \frac{1+3}{2} = 2$
   L'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2 distinctes donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ $(A, B \in \mathbb{R})$.
2. $(E_2) : 2y'' + 9y' + 9y = 0$
   L'équation caractéristique de (E_2) est : $2r^2 + 9r + 9 = 0$
   $\Delta = 9^2 - 4(2)(9) = 81 - 72 = 9$ et $\sqrt{\Delta} = 3$
   $r_1 = \frac{-9-3}{2(2)} = \frac{-12}{4} = -3$ et $r_2 = \frac{-9+3}{2(2)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$
   L'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2 distinctes donc les solutions de (E_2) sont les fonctions : $x \longmapsto Ae^{-3x} + Be^{-\frac{3}{2}x}$ $(A, B \in \mathbb{R})$.

Cas où l'équation caractéristique a une solution réelle unique

Activité 3.3 cf.[1]

Considérons l'équation différentielle $(E) : y''+ay'+by = 0$ où a et b sont des réels quelconques. On suppose que l'équation caractéristique $(E') : r^2 + ar + b = 0$ a une unique solution réelle r_0. Soit y une fonction au moins deux fois dérivable vérifiant (E). On pose $y(x) = z(x)e^{r_0 x}$.

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = Ae^{r_0 x}$est une solution de (E).

2. (a) Justifier que la fonction z est au moins deux fois dérivable.
   (b) Montrer que $y'' + ay' + by = [z'' + (2r_0 + a)z']e^{r_0 x}$.
   (c) En utilisant le fait que y est une solution de (E) et que $r_0 = -\frac{a}{2}$ montrer que $z'' = 0$.
3. Déterminer z et en déduire l'expression de y.

Solution

1. Montrons que f est solution de (E).
   $f(x) = Ae^{r_0 x}$, $f'(x) = Ar_0 e^{r_0 x}$ et $f''(x) = Ar_0^2 e^{r_0 x}$

$$\begin{aligned} f''(x) + af'(x) + bf(x) &= Ar_0^2 e^{r_0 x} + Ar_0 a e^{r_0 x} + Abe^{r_0 x} \\ &= (r_0^2 + ar_0 + b)Ae^{r_0 x} \\ &= 0 \;\; car \;\; r_0 \;\; est \;\; solution \;\; de \;\; (E') \end{aligned}$$

   Donc f est solution de (E).

2. (a) Justifions que z est au moins deux fois dérivable.
   $y(x) = z(x)e^{r_0 x} \Longrightarrow z(x) = y(x)e^{-r_0 x}$
   La fonction z est le produit de deux fonctions au moins deux fois dérivable et donc l'est aussi.
   (b) Montrons que $y'' + ay' + by = [z'' + (2r_0 + a)z']e^{r_0 x}$.
   $y(x) = z(x)e^{r_0 x}$
   $y'(x) = z'(x)e^{r_0 x} + r_0 z(x)e^{r_0 x}$
   $y''(x) = z''(x)e^{r_0 x} + r_0 z'(x)e^{r_0 x} + r_0 z'(x)e^{r_0 x} + r_0^2 z(x)e^{r_0 x}$
   $y''(x) = z''(x)e^{r_0 x} + 2r_0 z'(x)e^{r_0 x} + r_0^2 z(x)e^{r_0 x}$

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= z''(x)e^{r_0 x} + 2r_0 z'(x)e^{r_0 x} + r_0^2 z(x)e^{r_0 x} + az'(x)e^{r_0 x} + ar_0 z(x)e^{r_0 x} + \\ &\quad bz(x)e^{r_0 x} \\ &= [z'' + (2r_0 + a)z']e^{r_0 x} + (r_0^2 + ar_0 + b)z(x)e^{r_0 x} \\ &= [z'' + (2r_0 + a)z']e^{r_0 x} \;\; car \;\; r_0^2 + ar_0 + b = 0 \end{aligned}$$

   (c) Montrons que $z'' = 0$

$$\begin{aligned} y \;\; solution \;\; de \;\; (E) &\Longleftrightarrow y'' + ay' + by = 0 \\ &\Longleftrightarrow [z'' + (2r_0 + a)z']e^{r_0 x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow z'' + (2r_0 + a)z' = 0 \;\; car \;\; e^{r_0 x} \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow z'' + (2\frac{-a}{2} + a)z' = 0 \;\; car \;\; r_0 = -\frac{a}{2} \\ &\Longleftrightarrow z'' = 0 \end{aligned}$$

3. -Déterminons z
   $z''(x) = 0 \Longleftrightarrow z'(x) = A \Longleftrightarrow z(x) = Ax + B$ avec A et B des réels quelconques.
   - Déterminons l'expression de y.
   $y(x) = z(x)e^{r_0 x} \Longleftrightarrow y(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$
   C'est-à-dire que les solutions de (E) lorsque l'équation caractéristique a une unique solution réelle r_0 sont les fonctions : $x \longmapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$ où A et B sont des réels.

Propriété 3.2 cf.[6]

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Si l'équation caractéristique de (E) admet une solution réelle unique r_0, alors les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto (Ax + B)e^{r_0 x}$ $(A, B, r_0 \in \mathbb{R})$.

Exemple d'application 3.2

Résoudre les équations différentielles suivantes :
$(E_1) : f'' - 4f' + 4f = 0$ $\qquad$ $(E_2) : 9f'' + 6f' + 1 = 0$

solution

1. $(E_1) : f'' - 4f' + 4f = 0$
   L'équation caractéristique de (E_1) est : $(E_1') : r^2 - 4r + 4 = 0$
   $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$
   $r_0 = \frac{4}{2} = 2$
   (E_1') a une solution réelle unique donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \longmapsto (Ax + B)e^{2x}$ avec A et B deux réels quelconques.
2. $(E_2) : 9f'' + 6f' + 1 = 0$
   L'équation caractéristique de (E_2) est : $(E_2') : 9r^2 + 6r + 1 = 0$
   $\Delta = 6^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 = 0$
   $r_0 = \frac{-6}{2(9)} = \frac{-1}{3}$
   (E_2') a une solution réelle unique donc les solutions de (E_2) sont les fonctions : $x \longmapsto (Ax + B)e^{\frac{-1}{3}x}$ avec A et B deux réels quelconques .

Cas où l'équation caractéristique admet deux solutions complexes

Activité 3.4

On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' - 4y' + 13y = 0$
On note $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les solutions de l'équation caractéristique.

1. Déterminer α et β.
2. Ecrire $z(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ sous la forme $z(x) = a(x) + ib(x)$
3. Soient f et g des fonctions de la variable réelle x définies par :
   $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $g(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$
   Montrer que f et g sont des solutions de (E).
4. Montrer que toute combinaison linéaire h de f et g est une solution de (E).
5. A partir des questions précédentes donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y''+ay'+by = 0$ lorsque l'équation caractéristique a deux solutions complexes.

Solution

1. L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 4r + 13 = 0$
   $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$
   $r_1 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$ et $r_2 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$
   On a donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$
2. $z(x) = e^{(2+3i)x} = e^{2x}e^{i3x} = e^{2x} \cos 3x + ie^{2x} \sin 3x$
3. Montrons que f et g sont solutions de (E).
   (a) $f(x) = e^{2x} \cos 3x$
   $f'(x) = 2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x$
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 4e^{2x} \cos 3x - 6e^{2x} \sin 3x - 6e^{2x} \sin 3x - 9e^{2x} \cos 3x \\ &= -5e^{2x} \cos 3x - 12e^{2x} \sin 3x \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) &= -5e^{2x} \cos 3x - 12e^{2x} \sin 3x - 4(2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x) + \\ &\quad 13e^{2x} \cos 3x \\ &= -5e^{2x} \cos 3x - 12e^{2x} \sin 3x - 8e^{2x} \cos 3x + 12e^{2x} \sin 3x + \\ &\quad 13e^{2x} \cos 3x \\ &= (-5 - 8 + 13)e^{2x} \cos 3x + (-12 + 12)e^{2x} \sin 3x \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Donc f est une solution de (E).
   (b) $g(x) = e^{2x} \sin 3x$
   $g'(x) = 2e^{2x} \sin 3x + 3e^{2x} \cos 3x$
   $$\begin{aligned} g''(x) &= 4e^{2x} \sin 3x + 6e^{2x} \cos 3x + 6e^{2x} \cos 3x - 9e^{2x} \sin 3x \\ &= 12e^{2x} \cos 3x - 5e^{2x} \sin 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g''(x) - 4g'(x) + 13g(x) &= 12e^{2x}\cos 3x - 5e^{2x}\sin 3x - 4(2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x) + \\
&\quad 13e^{2x}\sin 3x \\
&= 12e^{2x}\cos 3x - 5e^{2x}\sin 3x - 8e^{2x}\sin 3x - 12e^{2x}\cos 3x + \\
&\quad 13e^{2x}\sin 3x \\
&= (12-12)e^{2x}\cos 3x + (-5-8+13)e^{2x}\sin 3x \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc g est une solution de (E).

4. Posons $h = Af + Bg$ (avec A et B des réels) et montrons que h est une solution de (E)

$$\begin{aligned}
h'' - 4h' + 13h &= (Af + Bg)'' - 4(Af + Bg)' + 13(Af + Bg) \\
&= Af'' + Bg'' - 4Af' - 4Bg' + 13Af + 13Bg \\
&= (Af'' - 4Af' + 13Af) + (Bg'' - 4Bg' + 13Bg) \\
&= A(f'' - 4f' + 13f) + B(g'' - 4g' + 13g) \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Donc toute combinaison linéaire de f et g est une solution de (E).

5. Si $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont les solutions de l'équation caractéristique, on aura $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $g(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ et $h(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.
   Ainsi les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions
   $f : x \longmapsto e^{\alpha x}(Acos\beta x + B\sin\beta x), A, B \in \mathbb{R}$

Propriété 3.3 cf.[6]

Soit (E) l'équation différentielle $f'' + af' + bf = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$.
Si l'équation caractéristique de (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ alors les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto e^{\alpha x}(Acos\beta x + B\sin\beta x)$ $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple d'application 3.3

Résoudre les équations différentielles suivantes :
$E_1 : y'' - 4y' + 5y = 0$ $\qquad$ $E_2 : y'' + 3y' + 3y = 0$

Solution

1. $E_1 : y'' - 4y' + 5y = 0$
   L'équation caractéristique de (E_1) est :
   $(E_1') : r^2 - 4r + 5 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4(5) = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$
$r_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$ et $r_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$
(E_1') admet deux solutions complexes conjuguées c'est-à-dire que les solutions de (E_1) sont les fonctions $f : x \longmapsto e^{\alpha x}(Acos\beta x + Bsin\beta x)$.
On a $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ donc les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \longmapsto e^{2x}(Acosx + Bsinx)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

2. $E_2 : y'' + 3y' + 3y = 0$
   L'équation caractéristique de (E_2) est :
   $(E_2') : r^2 + 3r + 3 = 0$
   $\Delta = (3)^2 - 4(3) = 9 - 12 = -3 = (i\sqrt{3})^2$
   $r_1 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $r_2 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (E_2') admet deux solutions complexes conjuguées c'est-à-dire que les solutions de (E_2) sont les fonctions : f de la forme $f(x) = e^{\alpha x}(Acos\beta x + Bsin\beta x)$.
   On a $\alpha = \frac{-3}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc les solutions de (E_2) sont les fonctions $x \longmapsto e^{\frac{-3}{2}x}(Acos\frac{\sqrt{3}}{2}x + Bsin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Résolution de l'équation différentielle de second ordre à coefficients constants avec second membre $y'' + ay' + by = c (a, b, c \in \mathbb{R})$

Activité 3.5

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = c$ avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$

1. Montrer que la fonction f_0 définie par $f_0(x) = \frac{c}{b}$ est une solution particulière de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de l'équation $(E') : y'' + ay' + by = 0$.
3. D'après ce qui précède exprimer une solution f de (E) en fonction d'une solution g de (E') et de f_0.

Solution

1. Montrons que f_0 est une solution particulière de (E).
   $f_0(x) = \frac{c}{b}$, $f_0'(x) = 0$, $f_0''(x) = 0$
   $f_0''(x) + af_0'(x) + bf_0(x) = b(\frac{c}{b}) = c$
   Donc f_0 est une solution particulière de (E).

2. Soit f une solution de (E).
   Montrons que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de l'équation (E')

$$\begin{aligned} f \ \ solution \ \ de \ \ (E) &\iff f'' + af' + bf = c \\ &\iff f'' + af' + bf = f_0'' + af_0' + bf_0 \qquad d'apres \ \ 1) \\ &\iff f'' + af' + bf - f_0'' - af_0' - bf_0 = 0 \\ &\iff (f - f_0)'' + a(f - f_0)' + b(f - f_0) = 0 \\ &\iff f - f_0 \ \ est \ \ solution \ \ de \ \ (E') \end{aligned}$$

3. Exprimons f en fonction de g et f_0.
   D'après la question 2) $g = f - f_0$ c'est-à-dire que $f = g + f_0$

Propriété 3.4

Soient a, b et c trois nombres réels avec b et c non nuls, (E) et (E') les équations différentielles respectives $y'' + ay' + by = c$ et $y'' + ay' + by = 0$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f définies par $f(x) = g(x) + \frac{c}{b}$ où les fonctions g sont les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$.

Exemple d'application 3.4

Résoudre les équations différentielles suivantes :
(a) $y'' + y' - 12y = 5$, (b) $9y'' - 6y' + y = 25$, (c) $y'' + y' + 2y = 3$

Solution

1. (a) $y'' + y' - 12y = 5$
$\Delta = 1^2 - 4(-12) = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$
$r_1 = \frac{-1-7}{2} = -4$ et $r_2 = \frac{-1+7}{2} = 3$
Donc les solutions de (a) sont les fonctions f définies par $f(x) = Ae^{-4x} + Be^{3x} - \frac{5}{12}$.
2. (b) $9y'' - 6y' + y = 25$
$\Delta = (-6)^2 - 4(9) = 0$ et $r_0 = \frac{6}{2(9)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
Donc les solutions de (b) sont les fonctions f définies par $f(x) = (Ax + B)e^{\frac{1}{3}x} + 25$.
3. (c) $y'' + y' + 2y = 3$
$\Delta = 1^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$
$r_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$
$r_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$

Donc les solutions de (c) sont les fonctions f définies par
$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)) + \frac{3}{2}$.

1.3.3 Solutions vérifiant des conditions initiales

Exercice

Dans chacun des cas suivants résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données .

1. $(E) : y'' + y' + y = 0$ $\qquad y(0) = 0$ et $y'(0) = \sqrt{3}$
2. $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$ $\qquad y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$

Solution

1. $(E) : y'' + y' + y = 0$
   L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + r + 1 = 0$
   $\Delta = 1^2 - 4(1) = -3 = (i\sqrt{3})^2$
   $r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
   $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$
   • **Cherchons la solution qui vérifie les conditions initiales** $y(0) = 0$ **et** $y'(0) = \sqrt{3}$
   $y(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$
   $y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x}(-A\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
   $y'(x) = (-\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{3}B)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}xe^{-\frac{1}{2}x} + (-\frac{1}{2}B + \frac{\sqrt{3}}{3}A)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$

$$\begin{aligned} y'(0) = \sqrt{3} &\Longrightarrow -\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{3}B = \sqrt{3} \\ &\Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}B = \sqrt{3} \ \ car \ \ A = 0 \\ &\Longrightarrow B = \sqrt{3}(\frac{2}{\sqrt{3}}) \\ &\Longrightarrow B = 2 \end{aligned}$$

   Donc $A = 0$ et $B = 2$
   Ainsi la solution de (E) qui vérifier les conditions initiales est la fonction
   $y(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$
2. $(E) : y'' + 2y' - 3y = 0$
   L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + 2r - 3 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4(-3) = 4 + 12 = 16$ et $\sqrt{\Delta} = 4$
$r_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$
$r_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$
Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme
$y(x) = Ae^x + Be^{-3x}$ où $(A, B \in \mathbb{R})$
• **Cherchons la solution qui vérifie les conditions initiales** $y(0) = 3$ et $y'(0) = -1$
$y(0) = A + B \Longrightarrow A + B = 3$ (1)
$y(x) = Ae^x - 3Be^{-3x}$
$y'(0) = -1 \Longrightarrow A - 3B = -1$ (2)
On obtient alors le système : $\begin{cases} A + B = 3(1) \\ A - 3B = -1(2) \end{cases}$
De (1) on a : $A = 3 - B(3)$
(3) dans (2) donne $3 - B - 3B = -1$
C'est-à -dire $-4B = -4$ d'où $B = 1$
En remplaçant B par sa valeur dans (3) on a : $A = 3 - 1 = 2$
Donc la solution de (E) vérifiant les conditions initiales est la fonction $y(x) = 2e^x + e^{-3x}$

1.4 Quelques exemples d'application des équations différentielles

De nombreux problèmes, en démographie, en électricité...relevant de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évaluation et à une condition initiale sont décrits par une fonction solution d'une équation différentielle. cf.[6]
Pour résoudre de tels problèmes, on procède par les trois étapes suivantes :
(a) **La modélisation du problème**
Elle consiste en la mise en équation du problème posé. Il s'agit en effet d'établir une équation différentielle permettant de décrire la situation.
(b) **La résolution mathématique du problème**
C'est la résolution de l'équation différentielle avec la condition initiale.
(c) **L'interprétation du résultat obtenu**
C'est la donnée de la solution du problème posé.

1.4.1 Rappel de quelques notions de physiques cf.[8]

Point matériel

C'est un point de l'espace auquel on affecte une masse m. En général tout objet dont les dimensions sont négligeables par rapport aux autres dimensions dans le référentiel choisi est appelé point matériel.

système matériel

Encore appelé système mécanique c'est un ensemble de points matériels.

Forces extérieures

Les forces extérieures à un système sont les forces qui agissent sur les points du système et qui proviennent des points étrangers au système donné.

Centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel est un point particulier du système qui a le même mouvement qu'un point matériel dont la masse serait égale à la masse totale du système et auquel seraient appliquées toutes les forces extérieures qui agissent sur le système.

Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse du solide par le vecteur accélération de son centre d'inertie G : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$

Relation fondamentale de la dynamique d'un solide en rotation

La somme algébrique des moments par rapport à l'axe de rotation, des forces extérieures appliquées à un solide en rotation, est égale au produit du moment d'inertie du solide par l'accélération angulaire du solide : $\sum \mathcal{M}(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

1.4.2 Exemple d'application n°1 : La chute d'un objet

On abandonne à une altitude h et sans vitesse initiale un objet de masse m à un instant $t = 0$. On veut déterminer l'altitude de son centre d'inertie en fonction du temps dans les deux cas suivants : Il y absence de frottements, il y a frottements (résistance de l'air).

✓ **Mise en équation du problème**

Le principe fondamentale de la dynamique de NEWTON dit que le centre d'inertie d'un corps de masse m subit une accélération $\overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_e}$ où $\overrightarrow{F_e}$ est la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.

On choisit un axe vertical repéré par le vecteur $\overrightarrow{j}$ orienté vers le haut et d'origine O d'altitude 0. Ainsi le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{j}$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = v(t)\overrightarrow{j}$ et le vecteur accélération $\overrightarrow{a} = a(t)\overrightarrow{j}$.

1. Si $z(t)$ désigne l'altitude du centre d'inertie du corps à l'instant t, exprimer $a(t)$ et $v(t)$ en fonction de $z(t)$.
2. En l'absence de frottements, la seule force extérieure est la force de pesanteur $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$(poids de l'objet).
   A l'aide du principe ci-dessus établir la relation vectorielle entre $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{a}$ et en déduire que la fonction z satisfait l'équation différentielle $z'' = -g$
3. Avec frottements, on suppose que le corps est soumis à une force de frottements $\overrightarrow{f}$ proportionnelle à la vitesse (hypothèse valable seulement pour une vitesse pas trop élevée).
   $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$ où k réel positif est la constante de freinage.
   De la même manière que précédemment montrer que la fonction z satisfait l'équation différentielle : $z'' + \frac{k}{m}z' = -g$.

✓ **Résolution mathématique du problème**

Résoudre les équations différentielles : (1) : $z'' = -g$; (2) : $z'' + \frac{k}{m}z' = -g$

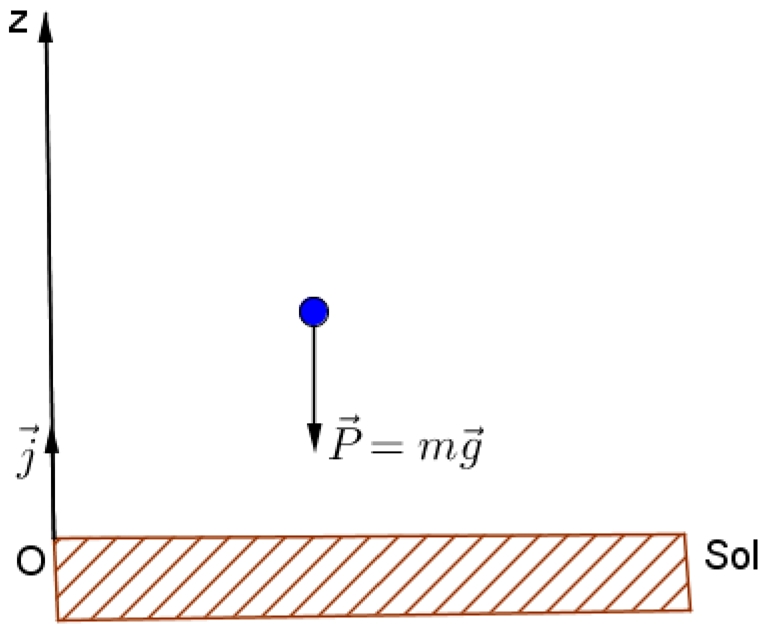
✓ **Solution du problème**

1. Interpréter le fait que l'objet est abandonné sans vitesse initiale à une altitude h à la date $t = 0$.
2. Déterminer alors dans chaque cas la solution du problème posé.

1.4.3 Solution de l'exemple d'application n°1

✓ **Mise en équation du problème**

1. $a(t) = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = z''(t)$ et $v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = z'(t)$.
2. Montrons que la fonction z satisfait l'équation différentielle $z'' = -g$

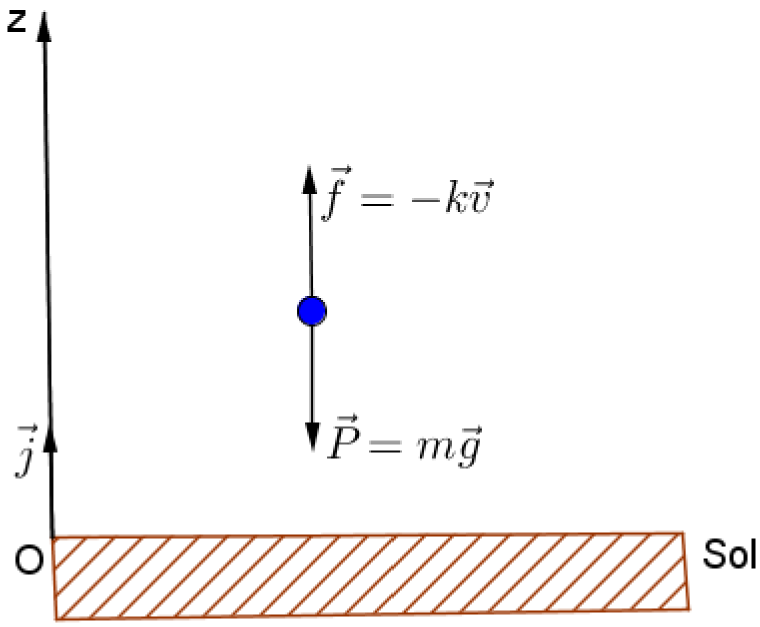


D'après le principe fondamental de la dynamique nous avons : $\overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_e}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_e} &\implies \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{P} \\ &\implies \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}(m\overrightarrow{g}) \\ &\implies a(t)\overrightarrow{j} = -g\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ nous avons :
$a(t) = -g$ c'est-à-dire $z''(t) = -g$. Ainsi la fonction z satisfait l'équation différentielle $z'' = -g$

3. Montrons que la fonction z satisfait l'équation différentielle $z'' + \frac{k}{m}z' = -g$



D'après le principe fondamental de la dynamique nous avons : $\overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_e}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F_e} &\implies \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{P}) \\
&\implies \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}(-k\overrightarrow{v} + m\overrightarrow{g}) \\
&\implies \overrightarrow{a} = \frac{1}{m}(-kv(t)\overrightarrow{j} - mg\overrightarrow{j}) \\
&\implies a(t)\overrightarrow{j} = -\frac{k}{m}v(t)\overrightarrow{j} - g\overrightarrow{j} \\
&\implies a(t)\overrightarrow{j} + \frac{k}{m}v(t)\overrightarrow{j} = -g\overrightarrow{j}
\end{aligned}$$

En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $(O, \overrightarrow{j})$ nous avons :
$a(t) + \frac{k}{m}v(t) = -g$ c'est-à-dire $z''(t) + \frac{k}{m}z'(t) = -g$. Ainsi la fonction z satisfait l'équation différentielle $z'' + \frac{k}{m}z' = -g$.

✓ **Résolution mathématique du problème**

(a) $z'' = -g \implies z'(t) = -gt + A \implies z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$ avec A et B des réels.
Ainsi les solutions de (1) sont les fonctions z définies par
$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$, A, B $\in \mathbb{R}$
(b) résolution de l'équation (2) : $z'' + \frac{k}{m}z' = -g$
$z_0(t) = -\frac{m}{k}gt$ est une solution particulière de (2).
En effet $z''(t) + \frac{k}{m}z'(t) = 0 + \frac{k}{m}(-\frac{m}{k}g) = -g$
L'équation homogène $z'' + \frac{k}{m}z' = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$
$r^2 + \frac{k}{m}r = 0 \implies r = 0$ ou $r = -\frac{k}{m}$

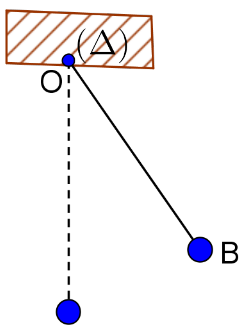
Les solutions de (2) sont donc les fonctions z définies par $z(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}gt$, A, B $\in \mathbb{R}$.

✓ **Solution du problème posé**

1. Interprétation : $z(0) = h$ et $v(0) = z'(0) = 0$
2. (a) 1^{er} cas : absence des frottements
   $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$ et $z'(t) = -gt + A$
   $z(0) = h \Longrightarrow B = h$
   $z'(0) = 0 \Longrightarrow A = 0$
   Ainsi lorsque les frottements sont négligés, la solution du problème est donnée par la fonction z définie par $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$
   (b) 2^{eme} cas : présence des frottements
   $z(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}gt$ et $z'(t) = -\frac{k}{m}Be^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}g$
   $z'(0) = 0 \Longrightarrow -\frac{k}{m}B - \frac{m}{k}g = 0 \Longrightarrow -\frac{k}{m}B = \frac{m}{k}g \Longrightarrow B = -\frac{m^2}{k^2}g.$
   $z(0) = h \Longrightarrow A + B = h \Longrightarrow A = h - B \Longrightarrow A = h + \frac{m^2}{k^2}g$
   ainsi $z(t) = -\frac{m^2}{k^2}ge^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}gt + h + \frac{m^2}{k^2}g = \frac{m^2}{k^2}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{m}{k}gt + h.$
   Donc lorsqu'il y a frottements, la solution du problème est donnée par la fonction z définie par $z(t) = \frac{m^2}{k^2}g(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{m}{k}gt + h.$

1.4.4 Exemple d'application n°2 : Le mouvement d'un pendule cf.[4]

A une tige rigide de masse négligeable, on fixe en B tel que $d(O, B) = l$, une masse m, qu'on considère comme ponctuelle. Lorsque l'ensemble est à l'équilibre, la tige est verticale, B étant sous O. On écarte le pendule ainsi constitué d'un angle θ_0 de sa position d'équilibre en le faisant tourner par rapport à un axe horizontale (Δ) passant par O et on l'abandonne à lui même. On néglige tous les frottements. On veut déterminer l'équation horaire du mouvement de ce pendule.



✓ **Mise en équation du problème**

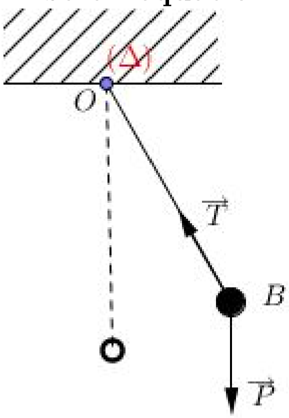
La masse ponctuelle est soumise à deux forces : La force $\overrightarrow{T}$ exercée par la tige et le poids $\overrightarrow{P}$ de la masse. Les moments d'inerties par rapport à l'axe (Δ) des forces $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{P}$ son donnés respectivement par $\mathcal{M}\overrightarrow{T} = 0$ (car $\overrightarrow{T}$rencontre l'axe) et $\mathcal{M}\overrightarrow{P} = -mgl\sin\theta$. On donne $J_\Delta = ml^2$ et on suppose que $\theta < 10^\circ$ (dans ce cas $\sin\theta \approx \theta$). En appliquant au pendule la relation fondamentale d'un solide en rotation, établir l'équation différentielle qui régit son mouvement ultérieur.

✓ **Résolutoin mathématique du problème**
Résoudre l'équation différentielle : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

✓ **Solution du problème**
Déterminer alors l'équation horaire du mouvement de ce pendule.

Solution de l'exemple d'application n°2

✓ **Mise en équation du problème**



D'après la relation fondamentale d'un solide en rotation : $\sum \mathcal{M}(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$\begin{aligned}
\sum \mathcal{M}(\overrightarrow{F_{ext}}) = J_\Delta \ddot{\theta} \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{M}\overrightarrow{T} + \mathcal{M}\overrightarrow{P} = J_\Delta \ddot{\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 - mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \\
&\Longleftrightarrow \quad l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad car \quad \sin\theta \approx \theta
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation différentielle qui régit son mouvement ultérieur est : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$.

✓ **Résolutoin mathématique du problème**
Résolution de l'équation $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$.
Son équation caractéristique est donnée par $r^2 + \frac{g}{l} = 0$
$r_1 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}$ et $r_2 = i\sqrt{\frac{g}{l}}$
Ainsi les solutions sont données par les fonctions θ définies par :
$\theta(t) = A\cos wt + B\sin wt$ où $A, B \in \mathbb{R}$ et $w = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

✓ **Solution du problème**
A la date $t = 0$ on a $\theta = \theta_0$ c'est-à-dire que $\theta(0) = \theta_0$.

A cette date on abandonne la masse sans vitesse initiale ; c'est-à-dire que $\theta'(0) = 0$.
$\theta(t) = A\cos wt + B\sin wt$ et $\theta'(t) = -Aw\sin wt + Bw\cos wt$
$\theta(0) = \theta_0 \Longrightarrow A = \theta_0$
$\theta'(0) = 0 \Longrightarrow Bw = 0 \Longrightarrow B = 0$

Ainsi l'équation horaire du mouvement du pendule est $\theta(t) = \theta_0 \cos wt$. Ce pendule effectue donc un mouvement sinusoïdal.

1.4.5 Exemple d'application n°3 : Evolution du taux de glucose sanguin cf.[6]

Après une injection intraveineuse de glucose, on a constaté que la glycémie (taux de glucose sanguin) décroit avec le temps. En admettant que la vitesse de décroissance est proportionnelle à la glycémie, on désire connaitre à chaque instant t la valeur de cette glycémie sachant qu'à l'instant $t = 0$ elle vaut 2.
Etablir une équation différentielle qui permet de décrire cette situation.

1.4.6 Solution de l'exemple d'application n°3

✓ **Mise en équation du problème**
Désignons par g la fonction glycémique dépendant du temps t($t \geq 0$). La vitesse de décroissance $g'(t)$ étant proportionnelle à la glycémie $g(t)$ on a : $g'(t) = -kg(t)$ où k est une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique. cf.[15]
Ainsi l'équation différentielle qui décrit cette situation est : $g' + kg = 0$

✓ **Résolutoin mathématique du problème**

$$\begin{aligned} g' + kg = 0 &\Longrightarrow \frac{g'}{g} = -k \quad avec \quad g \neq 0 \\ &\Longrightarrow \int \frac{g'(t)}{g(t)}dt = \int -kdt \\ &\Longrightarrow ln|g(t)| = -kt + c, c \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow g(t) = Ae^{-kt}, A \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les fonctions g définies par $g(t) = Ae^{-kt}, A \in \mathbb{R}$.

✓ **Solution du problème**
A l'instant $t = 0$ la glycémie vaut 2 donc $g(0) = 2$.
$g(0) = 2 \Longrightarrow A = 2$.
La fonction glycémique est donc définie par $g(t) = 2e^{-kt}$.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

EXERCICES

2.1 Notion d'équations différentielles

Exercice 1.1

Soit y une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable. Dans chacun des cas suivants dire en justifiant s'il s'agit d'une équation différentielle.
(1) $2y' + y = 0$
(2) $xy - 2x + 5 = 0$
(3) $5y'' - 3y' + y = x + 1$
(4) $(4x - 5)y = 2x$
(5) $xy'' + 5y = 2$

Exercice 1.2

Pour chacune des équations différentielles suivantes donner son degré et ses coefficients.
(1) $y' - y = 0$
(2) $3y'' + 6y' - 5y = 5$
(3) $2xy' + y = 3x + 2$
(4) $y'' = (2x + 3)e^x$

Exercice 1.3

Dans chacun des cas suivants calculer $f'(x)$ et établir une relation entre f' et f. Qu'obtiens-tu ?
(1) $f(x) = e^x$
(2) $f(x) = e^{-3x}$
(3) $f(x) = 5^x$

Exercice 1.4

Dans chacun des cas suivants calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis déterminer les nombres réels a, b et c vérifiant $af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$. Comment appelle t-on la relation obtenue ?
(1) $f(x) = e^x$
(2) $f(x) = e^{-3x}$
(3) $f(x) = \cos 3x$
(4) $f(x) = e^x \sin 2x$

2.2 Equations différentielles du premier ordre

Exercice 2.1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(1) $y' + 2y = 0$
(2) $y' - y \ln 5 = 0$
(3) $2y' + \sqrt{2}y = 0$
(4) $y\sqrt{3} = 3y'$

Exercice 2.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(1) $3y' + y = 4$
(2) $y' - 2y = e$
(3) $\frac{3}{2}y' + y = 10$
(4) $y\sqrt{3} = -5y' + 2\sqrt{3}$

Exercice 2.3

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.
1) $(E) : y' - 7y = 0$ et $y(2) = 4$
2) $(E) : y' + 3y = 0$ et $y(0) = 1$
3) $(E) : 5y' = y$ et $y(-1) = 0$
4) $(E) : 4y' + 3y = 0$ et $y(1) = 2$
5) $(E) : y' + 2y \ln 2 = 0$ et $y(0) = \frac{2}{3}$

Exercice 2.4

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.
1) $(E) : y' + y = 2$ et $y(0) = 4$
2) $(E) : y' - \frac{4}{3}y = \frac{1}{3}$ et $y(1) = 1$
3) $(E) : 5y' + 6y = 5$ et $y(2) = -e$
4) $(E) : -2y' + y = e^2$ et $y(\frac{1}{2}) = -2$
5) $(E) : y' + 2y = 14$ et $y(0) = -\frac{3}{4}$

Exercice 2.5 cf.[2]

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynome.

1. (a) Justifier la dérivabilité de P sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, calculer $2P(x) + P'(x)$.
   (b) Déterminer P de telle façon que : $P'(x) + 2P(x) = x^2 + x + 1$, pour tout réel x.
2. Considérons l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = x^2 + x + 1$.
   (a) Si g est une solution de (E), montrer que toute autre solution f vérifie :
   $(f - g)' + 2(f - g) = 0$.
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$
3. Déduire des questions précédentes le forme générale des solutions de (E).
4. Déterminer la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.6

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - 3y = (x + 1)e^{-\frac{x}{3}}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' - 3y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}}$.
   Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E).
3. (a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E').
   (b) En déduire les solutions de (E).
   (c) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercices de recherche

Exercice 2.7

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(1) $y' = x^2 y$
(2) $y' - \frac{3}{x} y = 0$
(3) $y' = \cos(2x + \frac{\pi}{4}) y^2$
(4) $xy' + (-5x + 6)^2 y = 0$
(5) $(x^2 + x + 3)y' + (2x + 1)y = 0$
(6) $y' - \frac{\ln x}{x} y = 0$

Exercice 2.8 cf.[10]

Considérons l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 3y^2$
On cherche une solution u de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que : $u(o) = \frac{1}{4}$.

1. Soit u une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $\mathbb{R}$ par $v = \frac{1}{u}$.
   Calculer u' en fonction de v'.
2. En remplaçant u' par l'expression obtenue ci-dessus, montrer que v vérifie l'équation $(E') : y' = -2y + 3$ avec $v(0) = 4$.
3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

2.3 Equations différentielles du second ordre

Exercice 3.1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(1) : $y'' - 4y' + 3y = 0$
(2) : $-y'' + 6y' - 10y = 0$
(3) : $y'' - 2y' + y = 0$
(4) : $y'' + 2\sqrt{2}y' - 2y = 0$
(5) : $y'' - 2^{m+1}y' + 2^{2m}y = 0$ (m étant un réel fixé)
(6) : $2y'' + \sqrt{2}y' + y = 0$

Exercice 3.2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
(1) : $9y'' - 6y' + y = 5$
(2) : $3y'' - 2y' + y = 12$
(3) : $y'' + y' + y = 4$
(4) : $y'' + y' - 12y = 48$
(5) : $25y'' + 30y' + 9y = 15$

Exercice 3.3

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales proposées.
(1) : $y'' + y' - y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = \sqrt{5}$
(2) : $y'' + 4y' + y = 0; \quad y(2) = e; \quad y'(2) = 2e$
(3) : $y'' + \pi^2 y = 0; \quad y(\frac{1}{3}) = \sqrt{3}; \quad y'(\frac{1}{3}) = -\pi$
(4) : $y'' - 2y = 0; \quad y(0) = \sqrt{3}; \quad y'(0) = 2$
(5) : $2y'' + 3y' - 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -12$

Exercice 3.4 cf.[5]

On considère les équations différentielles (E) et (E') suivantes :
(E) : $3y'' + 2y' - y = -8e^x - 1$; (E') : $3y'' + 2y' - y = 0$

1. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$ est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E').
3. Résoudre alors (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 3.5

On se propose de chercher les fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : pour tout nombre réel x on ait (E) : $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 6x^2 + 5x$.

1. On désigne par g un polynome défini par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels.
   Déterminer a, b, c pour que pour tout nombre réel x, g soit solution de (E).
2. On pose : $F = f - g$.
   Démontrer que si f est solution de l'équation (E) alors F est solution de l'équation :

$(E') : F'' - 4F' + 3F = 0$.
Réciproquement établissez que si F est solution de (E') alors f est définie par $f = F + g$.

3. Déterminer alors toutes les fonctions f vérifiant (E).

Exercice 3.6

On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' + 2y' + 5y = 0$

1. Vérifier que les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $f_1(x) = e^{-x}\cos 2x$ et $f_2(x) = e^{-x}\sin 2x$ sont des solutions de l'équation (E).
   On admettra que toute solution de (E) est de la forme $k_1 f_1 + k_2 f_2$ où k_1 et k_2 sont des nombres réels quelconques.
   Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
2. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0;1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -3.

Exercice 3.7

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $9f'' + f = 0$ sachant que :
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{dx} = 0$ et $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{dx} = 3$
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $f'' - f = 0$ sachant que f est une fonction paire et $f(0) = 1$.

2.4 Applications des équations différentielles

Exercice 4.1

Un solide S de centre d'inertie G, de masse $m = 0,1kg$, fixé à un ressort de raideur $k = 10N/m$ coulisse sur une tige horizontale suivant un repère (O, I), O étant la position de G à l'équilibre. On désigne par $x(t)$ la position de G dans le repère (O, I) à l'instant t.
On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche en lui donnant une vitesse initiale. L'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps la seconde ; on donne : $x(0) = 0,05$ et $x'(0) = -0,5$. On néglige les forces de frottement.

1. Faire un schéma et représenter les forces appliquées au solide S lors de son mouvement.
2. A l'aide du théorème du centre d'inertie déterminer l'équation différentielle qui caractérise le mouvement de ce solide.

3. Résoudre cette équation et déterminer l'équation horaire (l'expression de $x(t)$ en fonction du temps) du mouvement de G.
4. Déterminer la position et la vitesse de S à l'instant $t = 5$.

Exercice 4.2

Une population de bactéries croît régulièrement, la variation relative instantanée à tout instant t étant $1,5\%$. On veut connaitre l'évolution $p(t)$ de cette population en fonction du temps.

1. Déterminer une équation différentielle qui caractérise cette situation.
2. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la population est de 2000 bactéries, déterminer $p(t)$.

NB : La variation relative instantanée à tout instant t est la limite de $\frac{p(t+h)-p(t)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

♣ Références ♣

Bibliographie

[1] CHARLES MVOMO OTAM et al, MAJORS en Mathématiques terminales D, ASVA EDUCATION, Mars 2012.

[2] Geneviève et al, collection "Fractale" terminale C et E, Bordas,1989

[3] Monge et al, Mathématiques terminale D, BERLIN, 1973.

[4] OBC, Epreuve de Physique, Baccalauréat D, 2010.

[5] Sandrine CHARLES et Christelle LOPES, Biologie mathématique et Modélisation, 2008.

[6] Saliou Touré et al, Mathématiques terminale SE, EDICEF, 1999.

[7] Saliou Touré et al, Mathématiques terminale SM, EDICEF, 1999.

[8] Samuel ENGAMBA et al, Physique terminales C, D, E, les Classiques africains, 2007.

Webographie

[9] G.COSTANTINI.http ://bacamaths.net/

[10] Gérard Lavau-http ://lavau.pagesperso-orange.fr/index.htm