

GENERALITES SUR LES SIMILITUDES PLANES .

DEH NKENGNI RIGOBERT

Le 3 mai 2013

Table des matières

1	Objectifs pédagogiques opérationnels	4
2	Place dans le programme	4
2.1	Introduction	4
2.2	Pré-requis	4
3	Définition Géométrique des similitudes planes	6
3.1	Activité 1	6
3.2	Définition 1	7
3.3	Exemples 1	7
3.3.1	Une homothétie du plan est une similitude du plan	7
3.3.2	Toute isometrie du plan est une similitude du plan	8
3.4	Activité 2	8
3.5	Définition 2	8
3.6	Remarque 1 :	8
3.7	Exemples 2	8
3.8	Exercices 1	9
4	Caractéristiques des similitudes planes	10
4.1	Caractéristique par la composée des transformations	10
4.1.1	Activité 3	10
4.1.2	Propriété 1	10
4.1.3	Remarque 2	11
4.1.4	Exemples 3	11
4.1.5	Exercice 2	11
4.2	Caractéristique dans le plan complexe	12
4.2.1	Activité 3	12
4.2.2	Propriété 2	13
4.2.3	Exemples 4	13
4.2.4	Exercice 3	13
4.2.5	Solution 3	14
4.3	Caractéristique par l'expression analytique	14
4.3.1	<u>Activité 5</u>	14
4.3.2	Propriété 3	15

4.4	Exercice 5	16
5	AUTRES PROPRIETES DES SIMILITUDES PLANES	17
5.1	Composée des similitudes du plan	17
5.1.1	Activité 6	17
5.1.2	Propriété 5	18
5.1.3	Exercice 6	18
5.2	Similitudes planes et Angles géométriques	19
5.2.1	Activité 7	19
5.2.2	Propriété 6	19
5.2.3	Exercice 7	19
5.3	Similitudes plane et Points invariants	19
5.3.1	Activité 8	19
5.3.2	Propriété 7 : Similitudes plane et Points invariants	20
5.3.3	Activité 9	20
5.3.4	Exercice 8	20
5.4	Similitudes plane et triangles semblables	21
5.4.1	Activité 10	21
5.4.2	Propriété 7	21
5.4.3	Exercice 7	21
6	EXERCICES	22
6.1	Similitudes directes	22
6.2	Similitudes indirectes	23
6.3	Exercices de recherche	24

1 Objectifs pédagogiques opérationnels

A l'issue de ce cours l'élève doit être capable de :

1. Reconnaître et caractériser une similitude plane ;
2. Découvrir les propriétés des similitudes planes ;
3. Utiliser les similitudes planes .

2 Place dans le programme

Ce cours doit être fait après les cours suivants les Nombres Complexes, les Isométries du plan.

2.1 Introduction

Au cours des années antérieures, les élèves ont étudié les triangles semblables (définis par égalité des angles ou par l'existence d'un coefficient de grandissement réduction). Ils ont étudié des exemples de transformations (translations, homothéties, rotations) en classe de première. L'objectif ici est une étude des similitudes du plan, définies par une condition de conservation : on appelle similitude du plan toute transformation du plan qui conserve les rapports de distances. Sur la définition, certaines propriétés sont immédiates : la composée de deux similitudes, la réciproque d'une similitude sont encore des similitudes. On dispose d'autre part des exemples que les élèves ont rencontrés antérieurement. Les questions suivantes sont alors naturelles : quelle est la forme générale d'une similitude plane ? que peut-on dire de la composée de deux similitudes simples (par exemple la composée d'une homothétie et d'une rotation de centres différents) ; quelles sont les similitudes envoyant une configuration donnée en une autre configuration ? On précise ci-dessous les contenus et une progression possible. Le contexte est celui du plan orienté ; la donnée d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ permet d'utiliser le plan complexe $\mathbb{C}$. Mais la plus grande question est de savoir **Comment définir mathématiquement que deux dessins sont semblables ?**

2.2 Pré-requis

- La composée des applications bijectives du plan ;
- L'écriture complexe des transformations usuelles ;

- La forme trigonométrique d'un nombre complexe (module, argument,...) ;
- La Géométrie du  n ;

3 Définition Géométrique des similitudes planes

3.1 Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons les applications du plan $\mathbb{P}$ dans le plan $\mathbb{P}$ définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ M(x, y) &\longmapsto M'(x', y') \\ \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ M(x, y) &\longmapsto M'(x', y') \\ \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{-1}{2}y + 1 \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \\ M(x, y) &\longmapsto M'(x', y') \\ \begin{cases} x' = -4xy + 1 \\ y' = 2(x^2 - y^2) - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Soient $A(1, 2); B(0, 1); C(1, -2); D(2, 1)$



1. Comparer les rapports suivants $\frac{f(A)f(B)}{AB}$ et $\frac{f(C)f(D)}{CD}$; $\frac{g(A)g(B)}{AB}$ et $\frac{g(C)g(D)}{CD}$; $\frac{h(A)h(B)}{AB}$ et $\frac{h(C)h(D)}{CD}$

Considérons les **pions** suivant  $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2); M_3(x_3; y_3); M_4(x_4; y_4)$ de $\mathbb{P}$

2. Comparer les rapports suivants $\frac{f(M_1)f(M_2)}{M_1M_2}$ et $\frac{f(M_3)f(M_4)}{M_3M_4}$; $\frac{g(M_1)g(M_2)}{M_1M_2}$ et $\frac{g(M_3)g(M_4)}{M_3M_4}$; $\frac{h(M_1)h(M_2)}{M_1M_2}$ et $\frac{h(M_3)h(M_4)}{M_3M_4}$.
3. Que contactez-vous ?
4. f et g sont des exemples de similitude plane. Conjecturez donc une définition d'une similitude plane.

3.2 Définition 1

On appelle **similitude du plan ou similitude plane** toute transformation f du plan qui conserve le **rapport des distances**, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle, pour tous points $M; N; P$ et Q tous distincts dont leurs images par f sont $M'; N'; P'$ et Q'

on a : $\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$

3.3 Exemples 1

Au regard de cette définition nous pouvons affirmer que les homothéties et les isométries sont des similitudes planes

3.3.1 Une homothétie du plan est une similitude du plan

En effet, considérons une homothétie h de centre Ω et de rapport k

Soient les points suivants $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2); M_3(x_3; y_3); M_4(x_4; y_4)$ de $\mathbb{P}$. Comparons les rapports suivants $\frac{h(M_1)h(M_2)}{M_1M_2}$ et $\frac{h(M_3)h(M_4)}{M_3M_4}$

On a $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ et $\overrightarrow{h(M_1)h(M_2)} = (k(x_2 - x_1); k(y_2 - y_1))$ et $\overrightarrow{M_3M_4} = (x_4 - x_3; y_4 - y_3)$ et $\overrightarrow{h(M_3)h(M_4)} = (k(x_4 - x_3); k(y_4 - y_3))$

Ainsi $\frac{h(M_1)h(M_2)}{M_1M_2} = |k|$ et $\frac{h(M_3)h(M_4)}{M_3M_4} = |k|$

h conserve le rapport des distances c'est donc une similitude du plan. Il en résulte que toute homothétie du plan est une similitude.

3.3.2 Toute isometrie du plan est une similitude du plan

En effet toute isometrie conserve les distances et par conséquent conservent les rapports des distances. Une question reste à poser quant à la composée des homothéties et des isometries.

3.4 Activité 2

Soit f une transformation du plan.

1. Supposons que f est une similitude du plan.

Soient P et Q deux points du plan d'images $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$

Poser $k = \frac{P'Q'}{PQ}$

- Montrer que k est non nul
- Montrer que pour tout points M et N d'images respectives par f M' et N' .

On a : $M'N' = kMN$

2. On suppose maintenant qu'il existe $k \geq 1$ tel que $\forall M, N, M' \text{ et } N'$

$M'N' = kMN$ avec $M' = f(M)$ et $N' = f(N)$

Montrer que f est une similitude du plan

3.5 Définition 2

Soit f une transformation du plan.

f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k .

C'est-à-dire $\forall M \text{ et } N \begin{cases} f(M)=M' \\ f(N)=N' \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \text{ tel que } f(M')f(N') = kMN$



3.6 Remarque 1 :

Le quotient $\frac{M'N'}{MN}$ est appelé **Rapport de la similitude** f :

Ainsi toute transformation f du plan qui vérifie $\forall M, N \quad f(M)f(N) = kMN$ est une similitude plane de rapport k .

3.7 Exemples 2

1. Si f est une **isométrie** le rapport de la similitude est 1.
2. Si f est une **homothétie** de rapport μ le rapport de la similitude est $|\mu|$.

3.8 Exercices 1

Exercice Resolu 1

Les isométries et les homothéties sont des similitudes.

Solution 1

Les isométries sont des similitudes

En effet soit f une isométrie du plan tel que pour tout points M et N ,

on a $N' = f(N)$ et $M' = f(M)$. En utilisant le fait que les isométries conservent les distances,

on a : $f(M)f(N) = MN \Rightarrow \frac{f(M)f(N)}{MN} = 1$. Ainsi toute isométrie est une similitude de rapport 1.

Exercice d'application 1

1. En utilisant la définition géométrique des homothéties montrer que toute homothétie est une similitude de rapport la valeur absolue du rapport de l'homothétie.
2. On considère le triangle ABC de centre de gravité G .
 - (a) Représenter les points P et Q tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AP}$
 - (b) Déterminer la nature de la transformation f qui transforme Q en B et P en C .
 - (c) Prouver que f est une similitude du plan.
 - (d) Construire l'image de G par f .
3. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) , on considère  similitude du plan f , et les points $A(-3, -2)$ et $B(-1, 2)$ d'image par f $A'(2, 3)$ et $B'(0, -3)$.
 - (a) Quel est le rapport de f ?
 - (b) Construire le point K tel que $I = f(K)$ 
4. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité G . I est milieu de $[AB]$. Pour chacune des similitudes ~~directes~~  suivantes préciser le rapport.
 - (a) s_1 telle que $s_1(B) = B$ et $s_1(I) = C$
 - (b) s_2 telle que $s_2(A) = C$ et $s_2(B) = C'$ avec C' la symétrie de C par rapport à I .

4 Caractéristiques des similitudes planes

~~HYPOTHESE~~ : Le plan $\mathbb{P}$ est orienté par le repère $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}; \vec{v})$

4.1 Caractéristique par la composée des transformations

4.1.1 Activité 3

1. Considérons une similitude f de rapport μ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport μ noté $h(\Omega; \mu) = h$.

On pose $g_1 = h^{-1} \circ f$ et $g_2 = f \circ h^{-1}$

- (a) Montrer que $\forall i \in \{1; 2\}$ g_i est une isométrie du plan.
 - (b) Que peut-on déduire quant à la décomposition d'une similitude ?
2. Réciproquement considérons l'isométrie i de centre Ω et l'homothétie h de centre Ω et de rapport k et f une transformation du plan. Soient M et N deux points du plan, on suppose que $f = i \circ h$ ou $f = h \circ i$.
 - (a) On suppose que i est un déplacement montrer que f est une similitude du plan.
 - (b) On suppose que i est un antidéplacement montrer que f est une similitude du plan. 
 - (c) Etablir la relation d'équivalence entre une similitude et la composée homothétie isométrie.

4.1.2 Propriété 1

Soit f une similitude de rapport μ . Si P est un point du plan et si $h(P, \mu)$ désigne l'homothétie de centre P et de rapport μ , il existe une et une seule isométrie g (resp g') du plan telle que $f = h(P, \mu) \circ g$ (resp $g' \circ h(P, \mu)$). En outre, toute similitude se décompose comme composée homothétie et d'isométrie. C'est-à-dire f est similitude ssi $f = i \circ h$ ou $f = h \circ i$.

Ou **Toute similitude est une composée d'homothétie et d'isométrie**

4.1.3 Remarque 2



1. Si l'isométrie est un déplacement la similitude obtenu est appelée **similitude directe**.
2. Si l'isométrie est un antidéplacement la similitude obtenu est appelée **similitude indirecte ou inverse**.
3. ~~Toute similitude directe f admet un unique point invariant qui est des deux trans-~~
~~formation.~~
4. Si l'antidéplacement de la composée est une réflexion alors la similitude résultant son composée avec homothétie admet un unique point invariant. Sinon nous n'avons pas de point invariant.



Ainsi la similitude inverse est une composée de symétrie d'axe et d'homothétie, l'axe de la symétrie est appelée **Axe de la similitude inverse** et ~~le rapport~~ l'homothétie le rapport de la similitude inverse .



Que peut-on dire d'une composée de similitudes



4.1.4 Exemples 3

1. La composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport ν est une similitude de rapport $|\nu|$.
2. Toute composée de réflexion et d'homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$



4.1.5 Exercice 2

Exercice Resolu 2

Soit ABCD un carrée de sens direct et de centre O.

On note $S_{(BD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BD) et $h_B = H(B, \frac{3}{2}), h_D = H(D, \frac{1}{2})$ Respectivement l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$ et l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$.

1. Construire les points $I = h_B(A), J = h_D(A)$ et déterminer $S_{(BD)}(C)$.
2. En déduire l'image de C par $f_1 = h_B \circ S_{(BD)}$ et $f_2 = h_D \circ S_{(BD)}$.
3. Montrer que $\frac{BI}{BC} = \frac{3}{2}$ et $\frac{DJ}{DC} = \frac{3}{2}$.

4. Que peut-on ~~supposer~~  quant à la nature de f_1 et f_2

solution

1. Voir figure. $S_{(BD)}(C) = A$
2. $f_1 = h_B \circ S_{(BD)}(A) = I$ et $f_2 = h_D \circ S_{(BD)}(A) = J$
3. $f_1 = h_B(B) = B$ et $f_1 = h_B(A) = I$, donc $BI = \frac{3}{2}BC$
 $f_1 = h_D(B) = B$ et $f_1 = h_D(A) = I$, donc $DJ = \frac{3}{2}DC$
4. f_1 et f_2 sont deux  ansformations du plan qui conserve le rapport des distances.

Exercice d'application 2

1. Montrer que si f et g sont des similitudes du plan alors $f \circ g = g \circ f$. 
2. Montrer que la réciproque d'une similitude est une similitude de rapport à préciser.
3. A l'aide de la définition 2 montrer que la composée de deux similitudes non triviale (isométries ou homothéties) est une similitude.  

4.2 Caractéristique dans le plan complexe

4.2.1 Activité 3

1. Soient deux applications du plan f et g définies par :

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

Tel que $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$;

$$g : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

Tel que $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$;

- (a) Montrer que f et g sont des applications bijectives. On considère les points suivants $M_1(z_1); M_2(z_2); (M_3(z_3)); M_4(z_4)$ de $\mathbb{C}$
- (b) Montrer que $\frac{f(M_1)f(M_2)}{M_1M_2} = \frac{f(M_3)f(M_4)}{M_3M_4}$.
- (c) Montrer que $\frac{g(M_1)g(M_2)}{M_1M_2}; \frac{g(M_3)g(M_4)}{M_3M_4}$.
- (d) Que peut-on en déduire quant à la nature de f et g .

2. On considère l'isométrie I et l'homothétie H de rapport k 

- (a) Déterminer les formes complexes de I et celle de H .
- (b) On suppose que I est un déplacement montrer que $I \circ H$ ou $H \circ I$ a pour forme complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- (c) On suppose que I est un antidéplacement montrer que $I \circ H$ ou $H \circ I$ a pour forme complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- (d) Que peut-on déduire quant à la forme complexe de toute similitude? 

4.2.2 Propriété 2

Soit f une transformation du plan
 f est une similitude si et seulement si dans le plan complexe pour tout point M d'affixe z d'image M' d'affixe z'
 on a

$$z' = az + b \text{ ou } z' = a\bar{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$
 

4.2.3 Exemples 4

$z' = 2z; z' = (1+i)z + 3; z' = -7iz + (3+i)$ sont des similitudes directes de rapport respectif 2, $|1+i| = \sqrt{2}, |-7i| = 7$. 

$z' = -2i\bar{z}$ est une similitude indirecte de rapport 2.

4.2.4 Exercice 3

Exercice d'application 3

Exercice 3.a

Soit f une transformation du plan telle que  pour tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si $a = 1$ alors f est une translation.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^* \setminus 1$ alors f est une homothétie.
3. Montrer que si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $|a| = 1$ alors f est une Rotation.
4. Montrer que si f est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ alors f est une composée de symétrie et d'homothétie.

Exercice 3.b

Déterminer la forme complexe des similitudes composée d'une rotation d'angle α et d'une homothétie de rapport $k \neq 0$.

4.2.5 Solution 3

Les formes complexes d'une rotation d'angle α sont $z' = e^{i\alpha}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$

Les formes complexes d'une homothéties de rapport k sont $z' = kz + b_1$ avec $b_1 \in \mathbb{C}$

Ainsi la forme complexe de cette composée est $z' = e^{i\alpha}(kz + b_1) + b = k(e^{i\alpha}z) + b + b_1 = ke^{i\alpha}z + b + b_1$

4.3 Caractéristique par l'expression analytique

4.3.1 Activité 5

On considère les applications du plan dans le plan définies par :

$$f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y + 1 \end{cases} ;$$

$$g : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'(x'', y'')$$

$$\begin{cases} x'' = x\sqrt{3} + y + 3 \\ y'' = -x + y\sqrt{3} + 2 \end{cases} ;$$

$$h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'''(x''', y''')$$

$$\begin{cases} x''' = x - y\sqrt{3} + 2 \\ y''' = x\sqrt{3} + y \end{cases} ;$$

1. Montrer que ces trois transformations sont des similitudes du plan.

On pose $M(z)$; $M'(z')$; $M''(z'')$; $M'''(z''')$ avec z, z', z'' et z''' les affixes des points M', M'' et M''' respectivement

2. Montrer que les expressions complexes de ces applications peuvent se mettre sous la forme

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ ou } z' = a\bar{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

3. Généralité

Considérons les égalités suivantes

$$z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ et } z' = a\bar{z} + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

On pose $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que } \begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases} ;$$

Ou

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + b_1 \\ y' = a_2x - a_1y + b_2 \end{cases} ;$$

4.3.2 Propriété 3

Soit f une transformation du plan

f s'écrit dans le plan complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ ou $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

et $b \in \mathbb{C}$ si et seulement si f a pour expression analytique $\begin{cases} x' = a_1x - a_2y + b_1 \\ y' = a_2x + a_1y + b_2 \end{cases} ;$

Ou

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + b_1 \\ y' = a_2x - a_1y + b_2 \end{cases} ;$$

Avec $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

4.4 Exercice 5

Exercice resolu 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe d'équation $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'écriture complexe de cette symétrie.
3. En utilisant l'écriture complexe de l'homothétie de rapport k , déterminer l'écriture complexe de la similitude inverse d'axe d'équation $ax + by + c = 0$.
4. ~~On suppose que toute similitude inverse a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.~~
 - (a) A l'aide de cette écriture déterminer la forme complexe du centre de cette similitude.
 - (b) Proposer une méthode de détermination de l'axe de cette similitude.

Solution

$$1. \begin{cases} x' = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}x - \frac{2ab}{a^2 + b^2}y - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \\ y' = -\frac{2ab}{a^2 + b^2}x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y - \frac{2ab}{a^2 + b^2} \end{cases};$$

$$2. z' = \frac{(b-ia)^2}{a^2+b^2}\bar{z} - \frac{2ab}{a^2+b^2}(1+i).$$

$$3. z' = k \frac{(b-ia)^2}{a^2+b^2}\bar{z} - k \frac{2ab}{a^2+b^2}(1+i) + d \text{ avec } d \in \mathbb{C}.$$

$$4. (a) \begin{cases} z = a\bar{z} + b \\ \bar{z} = \bar{a}z + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow \bar{z} = \bar{a}(a\bar{z} + b) + \bar{b} \Rightarrow \bar{z} = \frac{\bar{a}b + \bar{b}}{1 - a\bar{a}} \Rightarrow z = \frac{a\bar{b} + b}{1 - a\bar{a}}.$$

- (b) ~~Après avoir déterminé le centre, déterminer le milieu d'un point et son image. Ces deux points appartiennent à l'axe de notre similitude.~~

Exercice d'application 5

Exercice 5.a Déterminer les expressions analytiques des transformations suivantes

- Homothétie de rapport k ;
- Rotation ;
- Symétrie d'axe $y = ax + b, a \neq 0$;

Exercice 5.b

Montrer que toute similitude de rapport $k \neq 1$ se décompose de façon unique en un produit commutatif d'une homothétie et d'une isométrie.

5 AUTRES PROPRIÉTÉS DES SIMILITUDES PLANES

5.1 Composée des similitudes du plan

5.1.1 Activité 6

On considère les applications suivantes :

$$s_1 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$$

$$\text{ayant pour expression analytique } \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + y - 1 \end{cases} ; \text{ et}$$

$$s_2 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$$

$$\text{ayant pour expression analytique } \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y - 1 \end{cases} ;$$

$$s_3 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$M(x, y) \longmapsto M'(x', y')$$

ayant pour expression analytique $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2 \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases} ;$

1. A l'aide des points $M(x; y)$ et $N(x_1; y_1)$ montrer que s_1 , s_2 et s_3 sont des similitudes.
2. Donner l'expression analytique de s_1^{-1} et s_2^{-1} les réciproques respectives de s_1 et s_2
3. On se donne les points $A(1,2)$; $B(0,1)$; $C(1,-2)$; $D(2,1)$
 - Calculer $s_1^{-1}(A)$, $s_1^{-1}(B)$, $s_1^{-1}(C)$ et $s_1^{-1}(D)$.
 - Comparer les rapports $\frac{s_1^{-1}(A)s_1^{-1}(B)}{AB}$ et $\frac{s_1^{-1}(C)s_1^{-1}(D)}{CD}$.
4. Que peut-on soupçonner quant-à la nature de s_1^{-1} . Verifier ?
5. Determiner analytiquement $s_1 \circ s_3$ et $s_3 \circ s_1$.
Soient $P(x_2; y_2)$ et $Q(x_3; y_3)$ de points du plan

6. Comparer les rapports $\frac{(s_1 \circ s_3)(M)(s_1 \circ s_3)(N)}{MN}$ et $\frac{(s_3 \circ s_1)(P)(s_3 \circ s_1)(Q)}{PQ}$

5.1.2 Propriété 5

-Si f est une similitude de rapport k , alors sa réciproque f^{-1} est une similitude de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$.

-Soient f_1 et f_2 deux similitudes du plan.

Les composées $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$ sont aussi des similitudes de rapport $kk' = k'k$

5.1.3 Exercice 6

- (a) En utilisant la bijectivité des similitudes retrouver la réciproque d'une similitude.
- (b) Retrouver les resultats de la propriété 5 en utilisant la forme complexe d'une similitude.

5.2 Similitudes planes et Angles géométriques

5.2.1 Activité 7

Soient S_1 et S_2 deux similitudes du plan d'expression complexe respective

$$z' = (\sqrt{3} - i)z + 2i \text{ et } z' = (1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - 2i$$

Considérons les points $A(1; 2)$ $B(-1; 2)$ et $C(0; 1)$

(a) Soient A' , B' et C' les images de A , B et C par S_1 .

- Déterminer A' , B' et C' .
- Déterminer $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\beta = \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$
- comparer α et β

(b) Soient A'' , B'' et C'' les images respectives par S_2 de A , B et C .

- Déterminer A'' , B'' et C'' .
- Déterminer $\gamma = \widehat{(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''})}$.
- Comparer α et γ .

(c) conclure



5.2.2 Propriété 6

Toute similitude plane conserve ~~l'orientation~~ des angles



5.2.3 Exercice 7

5.3 Similitudes plane et Points invariants

5.3.1 Activité 8

Soit f une similitude du plan. A , B et C des points du plan non alignés tels que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$.

(a) Montrer que f est une isométrie du plan.

(b) Soit M un point du plan d'image $M' = f(M)$

Supposons que $M \neq M'$

- Montrer que A , B et C appartiennent à la médiatrice du segment $[MM']$.
- Que constatez-vous ?

(c) Que peut-on conclure de la nature de f .

5.3.2 Propriété 7 : Similitudes plane et Points invariants

Soit A , B et C trois points non alignés.

Si f est une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$,
alors f est l'application identique

5.3.3 Activité 9

Soit A et B deux points distincts du plan et f une similitude du plan telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$.

- (a) Montrer que f est une isométrie.

Soient $M, M' \in (AB)$ tel que $M' = f(M)$.

- (b) On suppose que $M = M'$. Que pouvez-vous conclure? 

On suppose que $M \neq M'$

- (c) Montrer que (AB) est la médiatrice du segment $[MM']$.

On considère  symétrie d'axe (AB) .

- Montrer que $S \circ f$ admet trois points invariants A , B et M
- Montrer que f est une similitude
- Que peut-on déduire de la nature de $S \circ f$?

Prouver que $f = S$

5.3.4 Exercice 8

- (a) Montrer que toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un unique point invariant.

- (b) Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que $A \neq B$, $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe exactement deux similitudes f du plan telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$ l'une est directe et l'autre indirecte. 

- (c) Soit O un point du plan.

Montrer que, si A et B sont deux points du plan distincts de O , il existe exactement deux similitudes de centre O transformant A en B , que l'une est directe et l'autre indirecte.

5.4 Similitudes plane et triangles semblables

5.4.1 Activité 10

Soit f une similitude. Considérer un triangle ABC et soit A', B' et C' image respectif de A, B et C par f .

(a) Montrer que les points A', B' et C' sont non alignés.

(b) Montrer que :

$$\begin{aligned} - \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} &= \widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})} \\ - \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} &= \widehat{(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'})} \\ - \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} &= \widehat{(\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{C'B'})} \end{aligned}$$

(c) Que peut-on conclure des deux triangles ABC et $A'B'C'$?

5.4.2 Propriété 7

Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.

5.4.3 Exercice 7

(a) Soient $ABC, A'B'C'$ deux triangles du plan tels que :

- i. les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles
- ii. les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles
- iii. les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

Montrer que ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables.

(b) Soient f une isométrie positive du plan, A, B, C , trois points non alignés du plan et A', B', C' leurs images par f . On note A'' le milieu de A et A' , B'' le milieu de B et B' , C'' le milieu de C et C' . Montrer que les triangles ABC et $A''B''C''$ sont directement semblables.

6 EXERCICES

6.1 Similitudes directes

1. Montrer que toute similitudes directes f de centre Ω d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ est la composée d'homothétie de centre Ω , de rapport $|a|$ et de la rotation de centre Ω , d'angle $\theta = \text{Arg}(a)$.

On dit donc que c'est une similitude de centre Ω , de rapport $|a|$ et d'angle $\theta = \text{Arg}(a)$ et on note $f = S(\Omega, |a|, \theta)$.

2. Déterminer la nature des transformations d'écriture complexe

- a) $z' = z + 2 + i$
- b) $z' = -z + 2i$
- c) $z' = 3z - 2$
- d) $z' = (3 + 4i)z - 4 - 8i$

3. Dans les exercices suivants donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω d'affixe ω , de rapport k et d'angle θ .

- a) $\omega = 1 + i$; $k = 2$; $\theta = \frac{\pi}{2}$
- b) $\omega = 0$; $k = \sqrt{3}$; $\theta = \frac{\pi}{3}$
- c) $\omega = 1 - 2i$; $k = 5\sqrt{2}$; $\theta = \frac{-\pi}{4}$

4. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s définie par : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

- a) $A(3+4i)$; $A'(3)$; $B(1)$; $B'(2+i)$
- b) $A(-9i)$; $A'(3+5i)$; $B(4+3i)$; $B'(i)$

5. Soit A,B et C les points d'affixes respectives :

$i, 1+i$ et $2+2i$.

- a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points A,B et C affectés respectivement des coefficients 2 -2 et 1.
- b) Démontrer que la similitude directe s , qui transforme A en B et B en C, a pour centre le point G.
- c) Déterminer l'angle et l'angle de s

6. P, Q et R sont trois points du plan d'images respectives P', Q' et R' par une similitude de rapport k.

Démontrer que : $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = k^2 \overrightarrow{P'Q'} \cdot \overrightarrow{P'R'}$

7. Soit f l'application du plan dans lui-même d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases};$$

- a) Déterminer l'écriture complexe de f.
- b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
8. Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la similitude directe f ayant pour centre A d'affixe $-3+5i$, d'angle $-\frac{\pi}{3}$, et de rapport $\frac{2}{3}$.
- (a) Si z est l'affixe d'un M du plan, déterminer en fonction de z l'affixe de $M' = f(M)$.
- (b) En déduire les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées (x, y) de M.
- (c) Quelle est l'image de la droite d'équation $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$?
9. Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives 3, 5, i, -2i.
- Quelle est la similitude directe f telle $f(A) = A'$, $f(B) = B'$? On détermine son centre, son rapport et son angle.
10. Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $1+i$, 5, $5-2i$.
- Déterminer l'unique similitude directe f telle $f(B) = A$, $f(C) = B$. On détermine son centre, son rapport et son angle.

6.2 Similitudes indirectes

1. Dans chacun des cas suivants déterminer le rapport et le centre de la similitude d'écriture complexe :
- a) $z' = (2 + i)\bar{z} + 3$
- b) $z' = (2 - i)\bar{z} + 3 + i$
- c) $z' = -2i\bar{z}$
- d) $z' = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} + a$ avec $a \in \mathbb{R}$

2. Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B, A' et B' d'affixes respectives 3, 5, i, -2i.
Quelle est la similitude indirecte f telle $f(A)=A', f(B)=B'$?
3. Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives 1+i, 5, 5-2i.
Déterminer l'unique similitude indirecte f telle $f(B)=A, f(C)=B$.

6.3 Exercices de recherche

1. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application de P vers P qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$
- (a) Déterminer la nature des éléments caractéristiques de f.
- (b) Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M. Ω est le point tel que $f(\Omega) = \Omega$ et M est un point quelconque distinct de Ω).
2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, déterminer la forme complexe de la similitude f de centre $\Omega(1; 1)$, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
Déterminer analytiquement, puis construire l'ensemble des points M tels que $f(M)$ est un point de l'axe $(O, \vec{v})$.
3. Soit f une application du plan dans lui-même et non constante.
- (a) On suppose que pour tout points M, N, M' et N' du plan tel que $MN \neq 0$ et $f(M)f(N) \neq 0$
on a : $\frac{f(M')f(N')}{f(M)f(N)} = \frac{M'N'}{MN}$
– Montrer que f est injective.
– Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall M, N, f(M)f(N) = kMN$.
– On suppose que pour tout points M, N il existe $k > 0$ tel que : $f(M)f(N) = kMN$. Montrer que $\frac{f(M')f(N')}{f(M)f(N)} = \frac{M'N'}{MN}$.
- (b) Que peut-on conclure de f? (Toute application du plan qui vérifie ces conditions sont appelées **Similitudes du plan**)
- (c) On définit les applications suivant :

$$f_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto az + b \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

et

$$f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto a\bar{z} + b \quad \text{avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f_1 et f_2 sont des similitudes du plan.



4. Soit ABCD un carré de sens direct et de centre O.

- (a) On note $S_{(BD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (BD) et $h_B = H(B, \frac{3}{2}), h_D = H(D, \frac{1}{2})$ Respectivement l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$ et l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$
- Construire les points $I = h_B(A), J = h_D(A)$ et déterminer $S_{(BD)}(C)$.
 - En déduire l'image de C par $f_1 = h_B \circ S_{(BD)}$ et $f_2 = h_D \circ S_{(BD)}$.
 - Montrer que $\frac{BI}{BC} = \frac{3}{2}$ et $\frac{DJ}{DC} = \frac{3}{2}$.
 - Que peut-on supçonner quant à la nature de f_1 et f_2

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On considère l'ensemble (E) des points M(x,y) du plan tels que

$$15x^2 + 13y^2 - 2xy\sqrt{3} = 768.$$



Et f_λ l'application qui à tout point M(x,y) du plan associe le point M'(x',y'), tel

$$\text{que : } \begin{cases} x' = \lambda x + \lambda y\sqrt{3} \\ y' = -\lambda x\sqrt{3} + \lambda y \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) ;$$

- (a) Ecrire la relation qui existe entre les affixes z et z' d'un point M et de son transformé M'.
- (b) En déduire la nature de f_λ suivant les valeurs de λ .
- (c) Suivant le signe de λ déterminer la réciproque de f_λ .
- (d) Pour $\lambda = \frac{1}{4}$ déterminer la nature de $f_\lambda(E)$ et en donner ces éléments caractéristiques.