RESSOURCE 16:
ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

Par:

FOTOMENA ROMUALD
Matricle: 06A0282

Sous la direction de :

Pr. MOUAHA Christophe (Maître de Conférences)

Dr. FOTSO Siméon (Chargé de Cours)

M. ADJABA BIWOLI Jean Pierre (IPN)

M. TCHOKONA Donatien (PLEG)

18 septembre 2013

Table des matières

1 COURS **2**
Objectifs généraux 2
Objectifs spécifiques 2
Liens avec les autres parties du programme 2
Introduction 2
Pré-requis 3
1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe 4
1.1.1 Définitions 4
1.1.2 Opération dans $\mathbb{C}$ 6
1.1.3 Autres Propriétés 8
1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe 9
1.2.1 Principe 9
1.2.2 Propriétés 11
1.3 Conjugué d'un nombre complexe 13
1.3.1 Définition 13
1.3.2 Propriétés 14
1.3.3 Utilisation 14
1.4 Module d'un nombre complexe 16
1.4.1 Définition 16
1.4.2 Propriétés des modules 17

2 EXERCICES **19**
2.1 Exercices résolus 19
2.2 Exercices d'entrainement 25

REFERENCES **31**
Bibliographie 31
Webographie 31

Chapitre 1

COURS

Objectifs généraux

- Définir la notion de nombre complexe ;
- Etudier l'ensemble des nombres complexes.

Objectifs pédagogiques spécifiques

- Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe et effectuer les opérations dans $\mathbb{C}$;
- Représenter géométriquement un nombre complexe ;
- Déterminer le conjugué d'un nombre complexe et utiliser le conjugué pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients des nombres complexes.
- Déterminer le module d'un nombre complexe.

Liens avec les autres parties du programme

La **géometrie** et l'**analyse** ont des liens avec cette ressource.

On se sert des nombres complexes pour déterminer la nature d'un triangle, pour démontrer l'alignement de trois points et la cocyclité de quatre points dans un plan.

Les similitudes directes du planont une écriture complexe.

Les complexes sont utilisés pour trouver les solutions de certaines équations différentielles de type $ay'' + by' + c = 0$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).

Introduction [3]

Les nombres complexes tels que nous les utilisons aujourd'hui, datent du XVI^{e}siècle. Ces nombres forment une extension de l'ensemble des nombres réels. Ils permettent notament de définir les solutions à toutes les équations polynômiales à cœfficients réels en utilisant des nombres de carrés négatifs. Par exemple : l'équation $x + 7 = 6$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$, (cette solution est $x = -1$). De même

l'équation $4x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand,$\mathbb{Q}$ par exemple , il y en a une : $x = \frac{1}{4}$. Et puis l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a aucune solution dans un ensemble donné, une démarche naturelle consiste à chercher dans un ensemble le contenant. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble des nombres le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ ...

On va donc dans ce chapitre « construire »ou plutôt introduire un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: l'ensemble des **nombres complexes**. Le principal élément de cet ensemble est i (i comme imaginaire). Le nombre i est définie par $i^2 = -1$. L'équation ci-dessus possède alors deux solutions :

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\iff x^2 - (-1) = 0 \\ &\iff x^2 - i^2 = 0 \\ &\iff (x - i)(x + i) = 0 \\ &\iff x = i \qquad ou \qquad x = -i \\ & \qquad S = \{i; -i\}. \end{aligned}$$

Dans un premier temps, cette ressource définira la forme algébrique des nombres complexes, et des règles de calcul dans l'ensemble $\mathbb{C}$. Ce qui permettra de bien utiliser cet ensemble. Dans la suite, elle montrera comment représenter géométriquement un nombre complexe ; puisqu'il existe une bijection entre les ensembles $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Elle définira aussi le conjugué et le module d'un nombre complexe et leurs propriétés. En effet le conjugué permettra de trouver la forme algébrique d'autres nombres complexes. Le module servira plus dans l'étude trigonométrique des nombres complexes qui fait l'objet d'une autre ressource. Il y aura enfin des exercices permettant aux lecteurs de s'entrainer.

Pré-requis

- Calcul dans $\mathbb{R}$.
- Géométrie du plan.
- Démonstration par récurrence.

Pour avoir une idée claire sur la géométrie du plan, l'élève prendra soin de réviser les vecteurs du plan et coordonnées d'un vecteur qui ont été faits depuis le premier cycle(plus précisément en trosième). Il doit s'outiller en regardant aussi les cours sur les équations cartésiennes de droites, de cercles qui sont au programme de la seconde C. Toujours concernant la géométrie, l'apprennant fera un flash back sur les barycentres de la classe de Première C pour s'armer.

La démonstration par récurrence est vue à l'avance dans le cours d'arithmétique. L'élève prendra bien soin de réviser toutes ces notions avant d'aborder les connaissanes développées dans cette ressource.

1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Objectif pédagogique spécifique : déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe et effectuer les opérations dans $\mathbb{C}$.

1.1.1 Définitions

Activité 1.1

1. Soit l'équation (E) : $x^2 + 2x + 1 = 0$
   (a) Vérifier que $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$.
   (b) L'équation (E) admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$? Pourquoi ?
   (c) En admettant qu'il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$ et en conservant les règles de calcul dans $\mathbb{R}$, démontrer que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i.
   Ces solutions sont des nombres complexes écrits sous la forme algébrique parce qu'ils peuvent se mettre chacun sous la forme : $a + ib$ avec a, b des nombres réels.
2. Donner 4 autres nombres complexes sous forme algébrique.
3. Justifier que tout nombre réel est un nombre complexe.

Définition 1.1

On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $a+ib$, où a et b sont des nombres réels et i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Exemple 1.1

$-i$; $1 + 2i$; $17 - 41i$ sont des nombres complexes.

Notation 1.1

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$

Définition 1.2

Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et z un nombre complexe tel que $z = a + ib$. L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique** (ou **forme cartésienne**) de z.

Définition 1.3

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique.

- Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et est noté $\mathbf{Re}(z)$;
- Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et est noté $\mathbf{Im}(z)$.

Exemple 1.2

-3 est la partie réelle du nombre complexe $z = -3 + 8i$ et 8 est sa partie imaginaire : $Re(z) = -3$ et $Im(z) = 8$.

Remarque 1.1

- Si $b = 0$, alors $z = a$; z est un nombre réel. Donc tout nombre réel est un nombre complexe.
- Si $a = 0$, alors $z = ib$; le nombre z est dit **imaginaire pur**.

Notation 1.2

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Exemple 1.3

i, $13i$, $-i$, $-5i$ sont des nombres imaginaires pures.

Exemple 1.4

Soient $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = -3i$. On a :
$Re(z_1) = 3$ et $Im(z_1) = 2$
$Re(z_2) = 0$ et $Im(z_2) = -3$; $z_2 \in i\mathbb{R}$.

Attention ! ! La partie imaginaire d'un nombre complexe ne contient pas i ; c'est un nombre réel.

Exercice 1

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 4 - 5i \quad ; \quad z_2 = -i \quad ; \quad z_3 = 9$$

Solution

$Re(z_1) = 4$ et $Im(z_1) = -5$
$Re(z_2) = 0$ et $Im(z_2) = -1$
$Re(z_3) = 9$ et $Im(z_3) = 0$

1.1.2 Opération dans $\mathbb{C}$

a) Addition

Activité 1.2

On donne $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques. En appliquant les règles de calul utilisées dans $\mathbb{R}$ calculer $z + z'$.

Propriété 1.1

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques. Alors $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

Exemple 1.5

(i) $1 - 5i + 3 + 7i = (1 + 3) + i(-5 + 7) = 4 + 2i$

(ii) $-3i + 21 + 20i = 21 + i(-3 + 20) = 21 + 17i$

Activité 1.3

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ trois nombres complexes sous leurs formes algébriques. Montrer que :

(a) $z + z'$ est un nombre complexe : on dit que l'opération "+" est une **loi de composition interne** (lci) dans $\mathbb{C}$.

(b) $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$: on dit que la loi "+" est **associative** dans $\mathbb{C}$.

(c) $z + 0 = 0 + z = z$: on dit que 0 est l'**élément neutre** de la loi "+" dans $\mathbb{C}$.

(d) $z + (-z) = 0$: l'**opposé** de z est $-z$

(e) $z + z' = z' + z$: on dit que la loi "+" est **commutative** dans $\mathbb{C}$.

Propriété 1.2

(1) Les propriétés (a), (b), (c) et (d) font de l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la loi "+" un **groupe**. On note $(\mathbb{C}, +)$.

(2) Les propriétés (a), (b), (c),(d) et (e) font l'ensemble $\mathbb{C}$ muni de la loi "+" un **groupe commutatif** ou **abélien**.

Exercice 2

Calculer $(1 - 5i) - (3 + 7i)$ et $-3i - (21 + 20i)$

Solution

$1 - 5i - 3 + 7i = -2i - 12i$ et $-3i - (21 + 20i) = -21 - 23i$

b) Multiplication

Acctivité 1.4

On donne $z = a + bi$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques. En utilisant les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et la convention $i^2 = -1$, calculer $z \times z'$.

Propriété 1.3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques. Alors $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Exemple 1.6

$(4 - 5i)(3 + 2i) = 22 - 7i$; $-2(4 + i) = -8 + 2i$; $2i(2 + 3i) = -6 + 4i$

Activité 1.5

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ trois nombres complexes sous leurs formes algébriques. Montrer que :

(f) L'opération "$\times$" est une loi de composition interne dans $\mathbb{C}$.

(g) La loi "$\times$" est associative dans $\mathbb{C}$.

(h) 1 est l'élément neutre de "$\times$" dans $\mathbb{C}$.

(i) Si $z \neq 0$ alors l'inverse de z est le nombre complexe $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$. (On verra dans la suite comment déterminer l'inverse d'un nombre complexe sous forme algébrique).

(j) La loi "$\times$" est commutative dans $\mathbb{C}$

Propriété 1.4

L'ensemble $\mathbb{C}^*$ muni de la loi "$\times$" est un **groupe commutatif**. On note $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Ativité 1.6

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ trois nombres complexes sous leurs formes algébriques. Montrer que $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$: on dit que la multiplication "$\times$" est **distributive** par rapport à l'addition "$+$" dans $\mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs et la multiplication est distributive par rapport à l'addition. Il en résulte que :

Propriété 1.5

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

1.1.3 Autres Propriétés

Ativité 1.7

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.

a) Que vaut z si $a = b = 0$?

b) On veut montrer que si le nombre complexe z est nul (c'est-à-dire $a + ib = 0$), alors $a = 0$ et $b = 0$.

i) Supposer par l'absurde que $b \neq 0$ et déterminer i en fonction de a et b. Ce qui sera une absurdité. Expliquer pourquoi et conclure que $b = 0$

ii) En déduire que $a = 0$.

Propriété 1.6

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.
Alors $a + ib = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. On parle de nombre complexe nul.

Activité 1.8

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques.
Il est clair que si $a = a'$ et $b = b'$ alors $a + ib = a' + ib'$.
Montrer en retour que si $a + ib = a' + ib'$ alors $a = a'$ et $b = b'$. (Utiliser la propriété 1.6).

Propriété 1.7

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques.
Alors $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les réels x et y pour que $z = z'$

(1) $z = x + 2i$ et $z' = -1 + iy$

(2) $z = 7$ et $z' = y + ix$

(3) $z = 6x + 2iy$ et $z' = (3x + 2) - 4i$.

Solution

(1) $x + 2i = -1 + iy \Longleftrightarrow x = -1$ et $y = 2$

(2) $7 = y + ix \Longleftrightarrow y = 7$ et $x = 0$

(3) $6x + 2iy = (3x + 2) - 4i \Longleftrightarrow 6x = 3x + 2$ et $2y = -4$

c'est à dire $x = \frac{2}{3}$ et $y = -2$.

1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Objectif pédagogique spécifique : représenter géométriquement un nombre complexe.

Dans toute la suite du cours le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

1.2.1 Principe

Ativité 1.10

Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f \ : \ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P} \\ & z = a + ib \longmapsto M(a; b) \end{aligned}$$

1) Montrer que f est bijective.
2) Placer dans le repère les images M et M' par f des nombres $z = 2 + 5i$ et $z' = 3 - 4i$

Définition 1.4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique . Alors on peut associer à z le point M$(a; b)$.
On dit que :
- le point M$(a; b)$ est l'**image** du nombre complexe $z = a + ib$ et,
- le nombre complexe $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M$(a; b)$.

On note $Affixe(M) = a + ib$ ou encore $z_M = a + ib$.

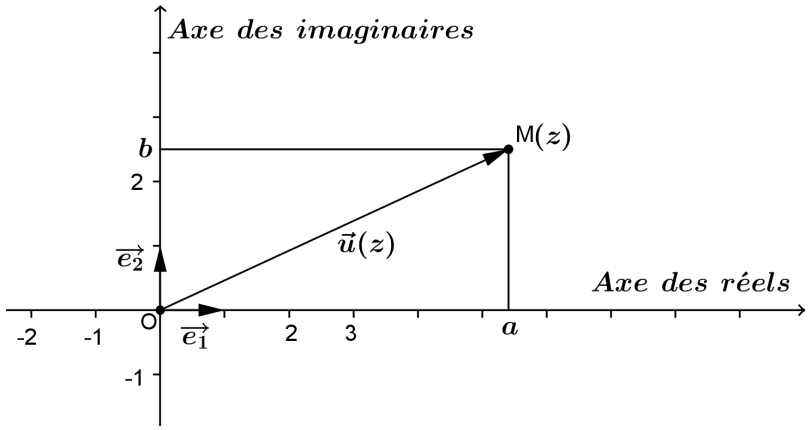
Exemple 1.7

L'image du nombre complexe $3 - 7i$ est le point M$(3; -7)$.
L'affixe du point N$(0; 2)$ est le nombre complexe $2i$; $z_N = 2i$

Définition 1.5

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Alors on peut associer à z le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On dit que :
- le vecteur $\overrightarrow{u}$ est le vecteur **image** du nombre complexe z et,
- le nombre complexe z est l'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

On note affixe$(\overrightarrow{u})$ ou encore $z_{\overrightarrow{u}}$.



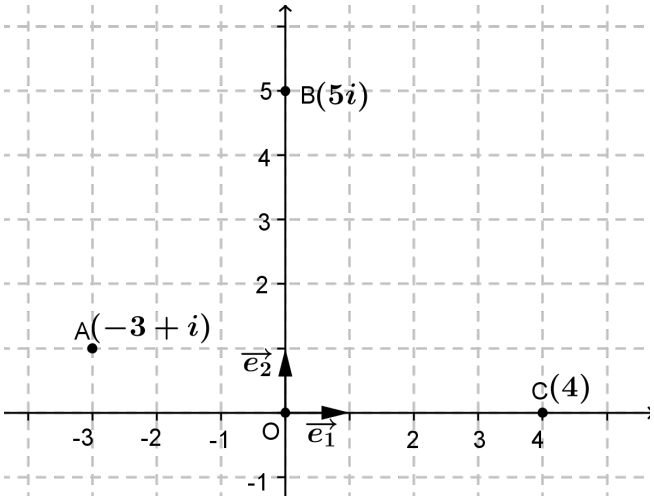
On note $M(z)$ (ou $\overrightarrow{u}(z)$) et on lit : «le point M d'affixe z (ou le vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe z)»

Vocabulaire :

- Le plan muni du repère diret $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est appelé **plan complexe.**
- L'axe (O, e_1) est l'**axe des réels** et l'axe (O, e_2) est l'axe des **imaginaires.**

Exemple 1.8
$z = 1 - 4i$. $M(1; -4)$ est l'image de z et le vecteur $\overrightarrow{OM}(1; -4)$ est son vecteur image.

Exercice 5
(i) Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; e_1, e_2)$ les images des nombres $-3 + i$; $5i$ et 4
(ii) Quelle est l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, -\overrightarrow{e_1} et - \overrightarrow{e_2}$.
Solution
(i) Repréentation des points A, B et C dans le repère.



(ii) Affixe$(\overrightarrow{e_1}) = 1$; affixe$(\overrightarrow{e_2}) = i$; affixe$(\overrightarrow{-e_1}) = -1$ et affixe$(\overrightarrow{-e_2}) = -i$.

1.2.2 Propriétés

Activité 1.11

Soient A et B deux points d'affixes respetives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
1) Déterminer $z_{\overrightarrow{AB}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction de x_A, x_B, y_A et y_B.
2) Calculer $z_B - z_A$. Que constatez-vous ?

Propriété 1.8

A et B sont deux points du plan complexe. Si z_A est l'affixe de A et z_B est l'affixe de B, alors affixe($\overrightarrow{AB}$)=$z_B - z_A$.

Exemple 1.9

Soit A(-3 ;2) et B(5 ;5).
Alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (5 + 5i) - (3 + 2i) = 2 + 3i$.

Activité 1.12

On donne les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respetives $z_{\overrightarrow{u}} = x + iy$ et $_{\overrightarrow{v}} = x' + iy'$.
1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
2) En déduire $z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
3) Calculer $z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$. Que constatez-vous ?
4) Soit $k \in \mathbb{R}$.
a) Déterminer $z_{k\overrightarrow{u}}$ l'affixe du vecteur $k\overrightarrow{u}$.
b) Calculer $kz_{\overrightarrow{u}}$. Quel constat faites-vous ?

Propriété 1.9

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{u}}$ et $z_{\overrightarrow{v}}$, et k un nombre réel. Alors :
(i) affixe($\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$) $= z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$.
(ii) affixe($k\overrightarrow{u}$) $= kz_{\overrightarrow{u}}$

Exemple 1.10

On donne $\overrightarrow{u}(1; -1)$ et $\overrightarrow{u'}$ d'affixe $3 + i$.
$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u'}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{u'}} = (1 - i) + (3 + i) = 4$.
$z_{(-\overrightarrow{u})} = -z_{\overrightarrow{u}} = -(1 - i) = -1 + i$.

Activité 1.13

Soit $G = bar\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ où les points A , B et C ont respectivement pour affixes

$z_A = x_A + iy_A$, $z_B = x_B + iy_B$ et $z_C = x_C + iy_C$.
1) Déterminer les coordonnées du points G.
2) En déduire z_G, l'affixe du point G.

Propriété 1.11

- L'affixe du milieu d'un segment [AB] est $\frac{z_A+z_B}{2}$ où z_A et z_B sont les affixes respetives des points A et B.
- L'affixe du centre de gravité d'un triangle ABC est $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$ où z_A, z_B et z_C sont les affixes respectives des points A , B et C.
- Plus généralement, si A_1, A_2, ..., A_n sont n points d'affixes respectives z_{A_1}, z_{A_2}, ..., z_{A_n} et α_1, α_2, ..., α_n sont n nombres réels dont la somme est différente de zéro, alors : l'affixe du barycentre G du système (A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) est $z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1}+\alpha_2 z_{A_2}+...+\alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}$.

Exemple 1.10

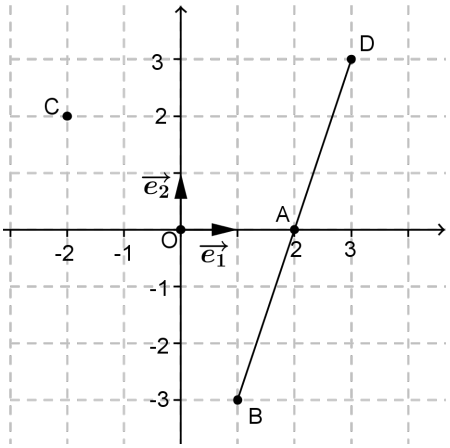
On donne A(-2 ;1) ; B(3 ;0) et C(0 ;-1).
Le point I milieu du segment [AB] a pour affixe $z_I = \frac{(-2+i)+3}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
Le point G centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $z_G = \frac{(-2+i)+3+(-i)}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercices 6

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_1 = 2$, $z_2 = 1 - 3i$ et $z_3 = -2 + 2i$
1) Placer ces points dans le repère.
2)Déterminer l'affixe du point D tel que A soit le milieu du segment [BD].
3) Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4) En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$

Solution

1) **Plaçons les points**.
Voir figure ci-contre.
2)**Affixe de D**.
On sait que $z_A = \frac{z_B+z_D}{2}$, ce qui équivaut à $z_D = 2z_A - z_B = 2 \times 2 - (1 - 3i) = 3 + 3i$.



3) **L'affixe des vecteurs** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
Affixe($\overrightarrow{AB}$)=$z_2 - z_1 = (1-3i) - 2 = -1-3i$.
Affixe($\overrightarrow{AC}$)=$z_3 - z_1 = (-2+2i) - 2 = -4+2i$.
Affixe($\overrightarrow{BC}$)=$z_3 - z_2 = (-2+2i) - (1+3i) = -3+5i$.

4) **Affixe des vecteurs** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
Affixe($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$)=affixe($\overrightarrow{AB}$)+affixe($\overrightarrow{AC}$) $= (-1-3i) + (-4+2i) = -3-i$.
Affixe($\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$)=affixe($\overrightarrow{AC}$)+affixe($\overrightarrow{BC}$) $= (-4+2i) + (-3+5i) = -7+7i$

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Objectif pédagogique spécifique : déterminer le conjugué d'un nombre complexe et utiliser le conjugué pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients des nombres complexes

Activité 1.14

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère le point M d'affixe $z = a + ib$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. Construire le point M', symétrique de M par rapport à l'axe des réels. Déduire l'affixe du point M'.
L'affixe de M' est noté $\overline{z}$ et est appelé **conjugué** de z.

1.3.1 Définition

Définition 1.6

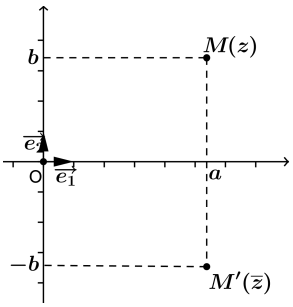
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que $\overline{z} = a - ib$.

Exemple 1.11

$3-5i$ à pour conjugué $3+5i$; $-4+i$ à pour conjugué $-4-i$; 2 à pour conjugué 2 ; $-6i$ à pour conjugué $6i$.

Remarque 1.2

Si M est le point d'affixe z et M' est le point d'affixe $\overline{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



1.3.2 Propriétés

Propriété 1.12 (Découle immédiatement de la définition)

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ (forme algébrique). On a :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
3. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
4. $z\overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+$
5. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
6. $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$

Activité 1.15

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes sous leurs formes algébriques.
1) Déterminer $\overline{z + z'}$ et $\overline{z} + \overline{z'}$. Quelle remarque faites-vous ?
2) Déterminer $\overline{-z}$ et $-\overline{z}$. Quelle remarque faites-vous ?
3) On sait que $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.Déterminer $\overline{zz'}$, puis $\overline{z}\overline{z'}$ sous forme algébrique. Quelle remarque faites-vous ?
4) On suppose que $z \neq 0$. Alors $z \times \frac{1}{z} = 1$. En déduire $\overline{z \times \frac{1}{z}}$.
Utiliser donc la question 3) pour montrer que $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$.
5) On suppose $z' \neq 0$. Utiliser la question précédente pour montrer que $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
6) On suppose encore $z \neq 0$.
a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
b) On suppose maintenant $n < 0$. Poser $m = -n$, alors $m > 0$. Montrer encore que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Propriété 1.13

Pour tout nombre complexe z et z' et pour tout nombre entier relatif n, on a :

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{-z} = -\overline{z}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. $\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\overline{z}}$, $(z \neq 0)$
5. $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, $(z' \neq 0)$
6. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Exemple 1.11

- Le conjugué de $z_1 = \frac{2-4i}{3+i}$ est $\overline{z_1} = \frac{2+4i}{3-i}$
- Le conjugué de $z_2 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+5i}$ est $\overline{z_2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-5i}$.

1.3.3 Utilisation

Ativité 1.16

Détermination pratique de l'inverse d'un nombre complexe.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.
(a) Montrer que $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ qui est un réel.
(b) Montrer ensuite en utilisant (a) que $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$
(c) Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{2+3i}$.

Propriété 1.14

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Alors l'inverse de z est le nombre complexe de forme algébrique $\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$.

Remarque 1.3

La propriété $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$ nous permet de trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients des nombres complexes.

Exemple 1.12

$\frac{4}{\sqrt{3}-i} = \frac{4(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{3+1} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{4} = \sqrt{3} + i$

Exercice 7

a) Ecris sous forme algébrique les nombres complexes

$$\frac{1}{\sqrt{2}(-2+i)} \quad ; \quad \frac{2-i}{5+3i} \quad ; \quad \frac{i}{1+3i} \quad ; \quad \frac{3+4i}{i}.$$

b) Ecris plus simplement le nombre complexe

$$\frac{\sqrt{2}+i}{2\sqrt{2}-2i} + \frac{2\sqrt{2}-2i}{\sqrt{2}+i}.$$

Solution

a)<u>Ecriture sous forme algébrique</u>

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}(-2+i)} = \dfrac{-2-i}{\sqrt{2}(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{-2-i}{\sqrt{2}(4+1)} = \dfrac{-2-i}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{2}{5\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{5\sqrt{3}}.$
- $\dfrac{2-i}{5+3i} = \dfrac{(2-i)(5-3i)}{25+9} = \dfrac{7-11i}{34} = \dfrac{7}{34} - \dfrac{11}{34}i.$
- $\dfrac{i}{1+3i} = \dfrac{i(1-3i)}{1+9} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10}i$
- $\dfrac{3+4i}{i} = \dfrac{(3+4i)(-i)}{i(-i)} = -3i + 4.$

b) Ecriture plus simple

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}+i}{2\sqrt{2}-2i}+\frac{2\sqrt{2}-2i}{\sqrt{2}+i} &= \frac{(\sqrt{2}+i)(2\sqrt{2}+2i}{8+4}+\frac{2\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}-i)}{2+1}\\
&= \frac{4+4i\sqrt{2}-2}{12}+\frac{4-4i\sqrt{2}-2}{3}\\
&= \frac{2+4i\sqrt{2}}{12}+\frac{2-4i\sqrt{2}}{3}\\
&= \frac{1+2i\sqrt{2}}{6}+\frac{2-4i\sqrt{2}}{3}\\
&= \frac{1+2i\sqrt{2}+4-8i\sqrt{2}}{6}\\
&= \frac{5-6i\sqrt{2}}{6}=\frac{5}{6}-\sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

1.4 Module d'un nombre complexe

Objectif pédagogique spécifique : déterminer le module d'un nombre complexe.

Activité 1.17

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$. Soit le point M d'affixe $z=a+ib$ où a et b sont des nombres réels. Déterminer l'expression de la distance OM. Cette distance OM et appelé **module** de z et notée $|z|$.

1.4.1 Définition

Définition 1.7

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe sous forme algébrique.
On appelle **module** de z le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple 1.13 $|5+3i|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$

Propriété 1.15 (Découle immédiatement de la définition)

- Si $z\in\mathbb{R}$ alors son module est sa valeur absolue.
- Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|\geq 0$
- $|z|=0\Longleftrightarrow z=0$
- $|-z|=|z|$
- $|\overline{z}|=|z|$
- Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$.

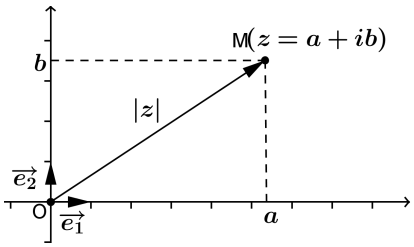
Exemple 1.13

Si $z = -3 + 4i$ alors $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

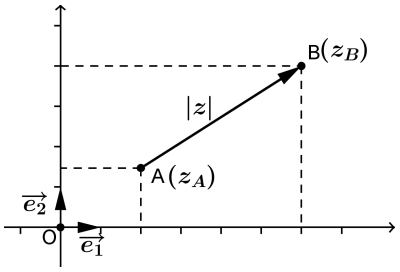
Si $z = 2i$ alors $|z| = \sqrt{2^2} = 2$; si $z = -3$ alors $|z| = |-3| = 3$

Remarque 1.4

(1) Si z est l'affixe d'un point $M(a; b)$, alors le module de z n'est autre que la distance OM ; OM $= |z|$ ou encore $||\overrightarrow{OM}|| = |z|$.



(2) Si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire $z = z_B - z_A$), alors le module de z représente la distance AB ; $AB = |z_B - z_A|$ ou encore $||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$.



Exercice 8

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; e_1, e_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + 3i$ et $z_B = -2 - i$. Calculer les distances OA, OB et AB.

Solution

(i) $OA = |z_A - z_O| = |1 + 3i - 0| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

(ii) $OB = |z_B - z_O| = |-2 - i - 0| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

(iii) $AB = |z_B - z_A| = |-2 - i - 1 - 3i| = |-3 - 4i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{25} = 5$.

1.4.2 Propriétés des modules

Activité 1.18

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) On sait que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Ecrire $|zz'|$ de la même façon et montrer que $|zz'| = |z| \times |z'|$.

En déduire que , si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|\lambda z| = |\lambda||z|$.

2) On suppose $z' \neq 0$. Vérifier que $\left|\frac{z}{z'}\right| = \sqrt{\frac{z}{z} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}}$ et monter que $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. (Inspirez-vous de la première question).

En déduire que pour tout $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

3) Placer dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ les points A , B et C d'affixes respectives z, z' et $z + z'$. Les points A et B sont arbitrairement choisis dans le plan et le point C est tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

a) En considérant le triangle OAC, Comparer OC et OA+AC.

b) En remarquant que AC=OB, comparer OC et OA+OB.

c) En déduire que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Propriétés 1.16 [3]

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

1. **module d'un produit** : $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; en particulier, si λ est un réel alors $|\lambda z| = |\lambda||z|$
2. **module d'un quotient** : $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}(z' \neq 0)$; en particulier, pour tout $z \neq 0$, $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
3. **inégalité triangulaire** : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Exemple 1.14

(a) $|(2-i)(1+i\sqrt{3})| = |2-i| \times |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4+1} \times \sqrt{1+3} = \sqrt{20}$

(b) $\left|\frac{2+i}{-1+i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

Activité 1.19

Soit z un nombre complexe.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

b) Supposons maintenant $n < 0$. Poser $m = -n > 0$, montrer qu'on a toujours $|z^n| = |z|^n$.

Propriété 1.17

Pour tout nombre complexe z et pour tout entier relatif n, on a $|z^n| = |z|^n$.

Exemple 1.15

$|(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^4| = |\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i|^4 = (\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}})^4 = (\sqrt{1})^4 = 1$

Chapitre 2

EXERCICES

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

2.1 Exercices résolus

Exercice 2.1

Soient les nombres complexes $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_4 = -\sqrt{3} + i$.

a) Ecrire sous forme algébrique les nombres $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; $2iz_3$; $\frac{z_4}{z_2}$; $\frac{1}{z_4}$ et $(z_3)^4$.

b) Calculer le conjugué des nombre complexes $2z_1 + z_2$; $(z_2)^2$ et $(z_2 + z_1)^2$.

Solution

a) Ecriture sous forme algébrique.

i) $z_1 - z_2 = (1 + 3i) - (2 + i) = -1 + 2i$

ii) $z_1 \times z_2 = (1 + 3i)(2 + i) = 2 + i + 6i - 3 = -1 + 7i$

iii) $2iz_3 = 2i(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = i + \sqrt{3}$

iv) $\frac{z_4}{z_2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+i} = \frac{(-\sqrt{3}+i)(2-i)}{4+1} = \frac{-2\sqrt{3}+i\sqrt{3}+2i+1}{5} = \frac{-2\sqrt{3}+1}{5} + \frac{2+\sqrt{3}}{5}i.$

v) $\frac{1}{z_4} = \frac{1}{-\sqrt{3}+i} = \frac{-\sqrt{3}-i}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i.$

vi) $(z_3)^4 = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^4 = \left((\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2\right)^2 = (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4})^2 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

b) Calcul des conjugués.

i) $\overline{2z_1 + z_2} = 2\overline{z_1} + \overline{z_2} = 2(1 - 3i) + (2 - i) = 2 - 6i + 2 - i = 4 - 7i$

ii) $\overline{(z_2)^2} = \overline{z_2}^2 = \overline{(2 + i)}^2 = (2 - i)^2 = 3 - 4i$

iii) $\overline{(z_2 - z_1)^2} = (\overline{z_2} - \overline{z_1})^2 = (2 - i - 1 + 3i)^2 = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i.$

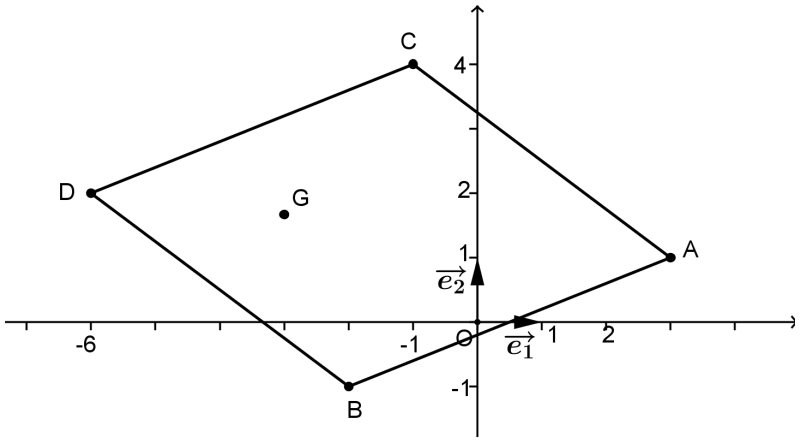
Exercice 2.2

1) Placer les points A , B et C d'affixes respectives $3 + i$, $-2 - i$ et $-1 + 4i$

2) Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.
3) Calculer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Placer D dans le repère.
4) Calculer l'afffixe du point G centre de gravité du triangle BDC.

Solution

1) Position des points dans le repère.



2) Laffixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

i) $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=-2-i-3-i=-5-2i$
ii) $z_{\overrightarrow{BC}}=z_C-z_B=-1+4i+2+i=1+5i$
iii) $z_{(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})}=-z_{\overrightarrow{AB}}+z_{\overrightarrow{BC}}=-(-5-2i)+1+5i=6+7i$
iv) $z_{(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})}=2z_{\overrightarrow{AB}}-z_{\overrightarrow{BC}}=2(-5-2i)-(1+5i)=-11-9i$

3) Affixe du point D tel que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD} &\iff z_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{BD}}\\ &\iff z_C-z_A=z_D-z_B\\ &\iff z_D=z_C-z_A+z_B\\ &\iff z_D=-1+4i-3-i-2-i=-6+2i\end{aligned}$$

$z_D=-6+2i.$

L'affixe du point G.

$$\begin{aligned}z_G=\frac{z_B+z_C+z_D}{3} &= \frac{-2-i-1+4i-6+2i}{3}\\ &= \frac{-9+5i}{3}\end{aligned}$$

$$z_G=-3+\frac{5}{3}i.$$

Exercice 2.3

a) Calculer le module des nombres complexe z_1 , $(z_2)^2$, z_3 , $(z_4)^4$ et $\frac{z_2}{z_4}$ de l'exercice 1.
b) Déterminer un nombre complexe z vérifiant $|z|=|z-1|$.

Solution

a) Calcul de modules.

i) $|z_1| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

ii) $|(z_2)^2| = |z_2|^2 = |2+i|^2 = (\sqrt{4+1})^2 = \sqrt{5}^2 = 5$

iii) $|z_3| = |\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

iv) $|(z_4)^4| = |z_4|^4 = |-\sqrt{3}+i|^4 = (\sqrt{3+1})^4 = \sqrt{4}^4 = 16$

v) $|\frac{z_2}{z_4}| = \frac{|z_2|}{|z_4|} = \frac{|2+i|}{|-\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) Détermination d'un nombre complexe z vérifiant $|z| = |z-1|$.

Posons $z = x+iy$ avec x et y des nombres réels ; alors :

$$\begin{aligned}
|z| = |z-1| &\iff |x+iy| = |x+iy-1| \\
&\iff |x+iy| = |x-1+iy| \\
&\iff \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\
&\iff x^2+y^2 = (x-1)^2+y^2 \\
&\iff x^2 = (x-1)^2 \\
&\iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $x = \frac{1}{2}$ et y peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$.

Pour $y = 1$, $z = \frac{1}{2} + i$.

Exercice 2.4

Soit le nombre $z = [10 - x + i(2+x)](x-i)$, $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs de x telles que z soit un nombre réel.

Solution

i) Ecrivons d'abord z sous forme algébrique.

$$\begin{aligned}
z &= [10 - x + i(2+x)](x-i) \\
&= x(10-x) - i(10-x) + ix(2+x) + (2+x) \\
&= -x^2 + 11x + 2 + i(x^2+3x-10)
\end{aligned}$$

ii) Valeurs de x telles que $z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z \in \mathbb{R} &\iff Im(z) = 0 \\
&\iff x^2+3x-10 = 0 \\
&\iff (x+5)(x-2) = 0 \\
&\iff x = -5 \quad ou \quad x = 2.
\end{aligned}$$

Donc $z \in \mathbb{R}$ ssi $x = -5$ ou $x = 2$.

Exercice 2.5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
(1) $5z + 2i = (1+i)z + 3$;
(2) $\frac{z-i}{z+1} = 3i$;
(3) $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

Solution

Résolution des équations

(1)

$$\begin{aligned} 5z + 2i = (1+i)z - 3 &\iff (4+i)z = 3 - 2i \\ &\iff z = \frac{3-2i}{4+i} = \frac{14-5i}{17} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\tfrac{14-5i}{17}\right\}$$

.

(2)

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+1} = 3i &\iff z - i = 3iz + 3i \\ &\iff (1-3i)z = 4i \\ &\iff z = \frac{4i}{1-3i} = \frac{-6+2i}{5} \end{aligned}$$

$$S = \left\{\tfrac{-6+2i}{5}\right\}$$

.

(3) Posons $z = x + iy$, avec x, y des réels. Alors

$$\begin{aligned} \overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 &\iff x - iy - 3i(x+iy) - 3 + 6i = 0 \\ &\iff (x + 3y - 3) - i(3x + y - 6) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x + 3y - 3 = 0, \\ 3x + y - 6 = 0, \end{cases} \\ &\iff x = \frac{15}{8} \quad et \quad x = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Donc $z = \frac{15}{8} + i\frac{3}{8}$;

$$S = \left\{\tfrac{15}{8} + i\tfrac{3}{8}\right\}$$

.

Exercice 2.6

Déterminer et représenter les ensembles de point M du plan dont l'affixe z vérifie la condition

indiquée.

a) $|z+\overline{z}-1|=4$

b) $|z+3-2i|=|\overline{z}-2+i|$

c) $z\overline{z}+i(z-\overline{z})-3=0$.

Solution

a) Détermination de l'ensemble des point M.

Posons $z=x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|z+\overline{z}-1|=4 &\iff |2x-1|=4 \qquad (z+\overline{z}=2Re(z))\\ &\iff 2x-1=4 \quad ou \quad 2x-1=-4\\ &\iff x=\frac{5}{2} \quad ou \quad x=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

l'ensemble cherché est donc la réunion des droites $(\mathcal{D})$: $x=\frac{5}{2}$ et $(\mathcal{D}')$: $x=-\frac{3}{2}$

b) Détermination de l'ensemble des points M.

Posnns toujour $z=x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}|z+3-2i|=|\overline{z}-2+i| &\iff |x+iy+3-2i|=|x-iy-2+i|\\ &\iff |x+3+i(y-2)|=|x-2-i(y-1)|\\ &\iff (x+3)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y+1)^2\\ &\iff 10x-6y+8=0 \qquad ou \qquad encore \qquad 5x-3y+4=0.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la droite $(\mathcal{D}'')$ d'équation $5x-3y+4=0$.

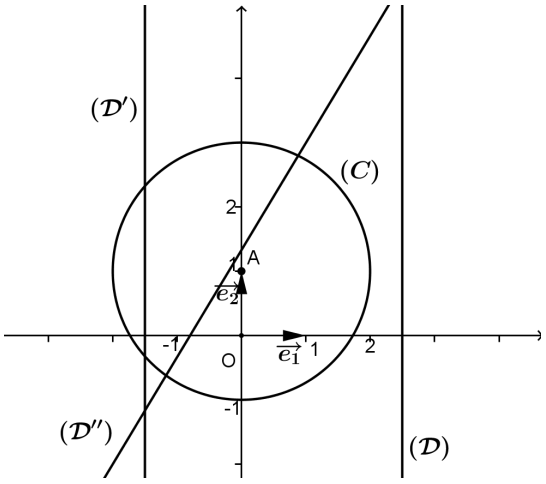
c) Détermination de l'ensemble des points M.

Posnns toujour $z=x+iy$, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}z\overline{z}+i(z-\overline{z}-3=0 &\iff x^2+y^2+i(2iy)-3=0\\ &\iff x^2+y^2-2y=3\\ &\iff x^2+(y-1)^2=4.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $A(0;1)$ et de rayon 2.

Construction de ces ensembles :



Exercice 2.7

A tout nombre z distinct de i, on associe le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{z+i}{z-i}$. Déterminer et construire l'ensemble de points M du plan tel que :

a) $|Z| = 1$

b) Z soit un nombre réel strictement positif.

c) Z soit un nombre imaginaire pur.

Solution

a) Détermination de l'ensemble des points M tel que $|Z| = 1$.

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = -i$ et $z_B = i$, alors $Z = \frac{z-z_A}{z-z_B}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} |Z| = 1 &\iff \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = 1 \\ &\iff \frac{AM}{BM} = 1 \\ &\iff AM = BM. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB] qui n'est autre que l'axe des réels.

On peut aussi poser $z = x + iy$ x, y des réels et on verra que $|Z| = 1$ ssi $y = 0$.

b) Détermination de l'ensemble des points M tel que $Z \in \mathbb{R}$.

Posons $z = x + iy$ x, y des réels. Ecrivons Z sous forme algébrique.

$$\begin{aligned} Z = \frac{x+iy+i}{x+iy-i} &= \frac{x+i(y+1)}{x+i(y-1)} = \frac{[x+i(y+1)][x-(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $Z \in \mathbb{R} \iff Im(Z) = 0 \iff 2x = 0$, ou encore $x = 0$.

Donc l'ensemble cherché est l'axe des imaginaires.

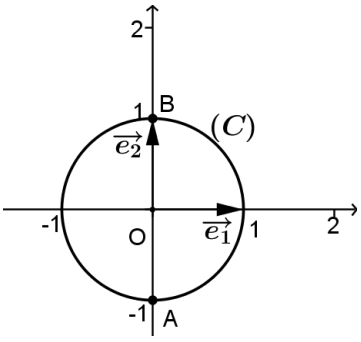
c) Détermination de l'ensemble de points M tel que $Z \in i\mathbb{R}$

On sait déjà que $Z = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}$ avec $z = x + iy$, x, y des réels.

Alors $Z \in i\mathbb{R} \iff Re(Z) = 0 \iff x^2 + y^2 = 1$.

Donc l'ensemble cherché est le cercle $(\mathcal{C})$ de entre O et de rayon 1.

Construction



2.2 Exercices d'entrainement

Exercice 2.8

Cet exercice comporte quatre affirmations a, b, c et d. Vous devez indiquer pour chacune de ces affirmations si elle est vraie(V) ou fausse(F).

On considère les points A, B, C et D d'afffixes respectives $z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2 + 4i$ et $z_4 = -2 + 2i$.

a) $z_1 - \overline{z}_4 = -4$.

b) ABCD est un parallélogramme.

c) L'écriture algébrique de $\frac{z_2}{z_3} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

d) Soit I le point d'affixe $z' = i$. I est le milieu du segment [AB].

Exercice 2.9 [4]

Cet exercie comprte trois questions indépendantes. Pour chacune d'elle, trois réponses sont proposées, une seule est exacte, laquelle ?

		A	B	C
1	$Z = \frac{2+4i}{2-i}$	$Z = \overline{Z}$	Z est un nombre imaginaire pur	$Z = \frac{2}{3}i$
2	$Z = \sqrt{3} - i$	le point M d'affixe Z est sur le cerle de centre O et de rayon 2	le point M d'affixe Z^2 est sur l'axe des réels	$Z^2 = 4$
3	Z vérifie $\overline{Z} + \frac{10}{3} = 6+2i$. L'écriture algébrique de Z est :	$\frac{8}{3} - 2i$	$-\frac{8}{3} - 2i$	$\frac{8}{3} + 2i$

Exercice 2.10

On donne $z = 3 + \sqrt{3}i$ et $z' = -1 + 2i$.

Eccrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = z - \overline{z}$
- $z_2 = z \times \overline{z}$
- $z_3 = z^2$
- $z_4 = z'^3$
- $z_5 = \frac{z}{z'}$.

Exercice 2.11

1) Calculer i^2 ; i^3 et i^4.

2) En déduire les valeurs de i^{204} ; i^{205} ; i^{206} et i^{207}.

Exercice 2.12

1) Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $\frac{4}{3-i}$
2. $-\frac{5}{6i}$
3. $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)}$
4. $\frac{(1-i)^2}{(3+4i)(1+i)}$

2) Calculer le module des nombres complexes ci-dessus.

Exercice 2.13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{C}^2$ les équations et les sytèmes d'équations suivants :

1. $z + 4i = 3iz - 1$
2. $\frac{1}{z-i} = -5i$
3. $2z + i\overline{z} = 3$
4. $\begin{cases} 3z + z' = 1 - 7i \\ iz + 2z' = 11i \end{cases}$;
5. $\begin{cases} (1+i)z - iz' = 2 + i \\ (2+i)z + (2-i)z' = 7 - 4i \end{cases}$

Exercice 2.14

1) Montrer que si un polynôme P admet un nombre complexe z comme racine, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

2) On considère $P(x) = x^2 + x + 1$.

a) Vérifier que $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ est racine de P.

b) En déduire l'autre racine de P.

Exercice 2.15

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes. Dans chacun des cas suivants, exprimer z' en fonction de z.

a) $\begin{cases} x' = x + y + 2, \\ y' = -x + y - 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x' = x \\ -y' = -2y - 3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3}, \\ y' = \sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3}, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' - x = -y\sqrt{2} + 2\sqrt{3}, \\ y - y' = x\sqrt{3} - \sqrt{3}, \end{cases}$

Exercie 2.16 [4]

1) Montrer que $(1+i)^6 = -8i$

2) On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$.

a) Déduire de 1) une solution de l'équation (E).

b) L'équation (E) possède une solution autre ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3) Déduire également de 1) une solution de l'équation $(E') : z^3 = -8i$

Exercice 2.17

On considère les points E, F, G et H d'affixes respectives $z_E = -1 - 5i$, $z_F = 4 - 3i$, $z_G = 3 + 3i$ et $z_H = -2 + i$.

1) Calculer $z_{\overrightarrow{EF}}$ et $z_{\overrightarrow{HG}}$.

2) En déduire la nature du quadrilatère EFGH.
3) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [EF].
4) Déterminer l'affixe du point J vérifiant $\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HI}$.
5) Quelle est la nature du quadrilatère EJIH ?

Exercice 2.18 [4]

On considère les points M et N d'affixes respective z_1 et z_2. On pose $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, où x_1, x_2, y_1 et y_2 sont des nombres réels.
1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z_2 \times \overline{z}_2) = 0$
2) Montrer que les points O, M et N sont alignés si et seulement si $Im(z_2\overline{z}_1) = 0$.

Exercice 2.19 : (application de l'exerice 2.18) [4]

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux, où N est le point d'affixe $z^2 - 1$.
2) On recherche l'ensemble des points M d'affixe z, $(z \neq 0)$ tel que les points O, N et P soient alignés où N et P sont les points d'affixes respectives $z^2 - 1$ et $\frac{1}{z^2} - 1$.
a. Montrer que $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(\overline{z^2 - 1}) = -z^2\left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$
b. Conclure sur l'ensemble recherché.

Exerice 2.20

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_1 = 4$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2 + 5i$ et $z_4 = 1 + i$.
1) Déterminer l'affixe du point G=bar{(A,1) ; (B,4)}.
2) Déterminer l'affixe du point G'=bar{(C,2) ; (D,3)}.
3) Soit I le milieu du segment [GG'] et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur donné. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{u}$.
4) Construire le point M_0 tel que $\overrightarrow{M_0A} + 4\overrightarrow{M_0B} + 2\overrightarrow{M_0C} + 3\overrightarrow{M_0D} = 2\overrightarrow{AB}$.
5) Calculer l'affixe z_0 de M_0.

Exercice 2.21

Déterminer et représenter dans chaque cas l'enemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

1. $|z - 3| = |z - 3i|$
2. $|2 - 3i + z| = |2 + 3i|$
3. $|\overline{z} - 4 + i| = 1$
4. $|z - \overline{z} - 1 + i| = 2$.

Exercice 2.22

Déterminer et construire dans chaque cas l'enemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

1. $z\overline{z} + (z + \overline{z}) = 3$
2. $(z\overline{z})^2 - z\overline{z} - 6 = 0$
3. $(z - 1 - i)(\overline{z} - 1 + i) = 5$
4. $2|z - i| = |z - \overline{z} + 2i|$.

Exercice 2.23 [1]

Soit un nombre complexe $z = x + iy$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. L'image de z est M dans le plan complexe . Pour $z \neq i$, on pose $Z = \frac{2z-4}{z-i} = X + iY$, $(X; Y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Exprimer X et Y en fonction de x et y.

2) Quel est l'ensemble des points M tels que $Y = 0$?

3) Quel est l'ensemble des points M tels que Z soit un nombre imaginaire pur ?

Exercice 2.24 [4]

A et B sont les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui à tout point M différent de B, d'affixe z, fait correspondre le point M', d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Déterminer les points invariants par f.
2. a) Montrer que pour tout nombre complexe différent de -1, $(z' - 1)(z + 1) = -2$
   a) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$. Traduire cette relation en terme de distance.
3. Monter que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

Les exercices 2.25 et 2.26 sont liés.

Exercice 2.25 [4]

Soit P le point d'affixe p ou $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ. Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c ou $a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.

2. Soit D le point d'affixe $2 + 2i$. Montrer que D est le projété orthogonal de O sur la droite (BC).

Exercice 2.26 [4]

(On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$)

A tout point M du plan different de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{20}{\overline{z}}$ ou $\overline{z}$ représente le nombre conjugué de z.

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z. On se propose de definir géometriquement le point M' associé au point M.

a) Vérifiez que $z + \overline{z} = 4$.

b) Exprimez $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$ et en déduire que $5(z' + \overline{z'}) = z'\overline{z}$.

c) En déduire que M' appartient a l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ. Placer M' sur la figure.

Exercice 2.27 [4]

Soit l'équation (E) : $z^2 - 2z + 3 = 0$.

1) Montrer que $a = 1 + i\sqrt{2}$ est solution de (E).

2) Déterminer l'autre solution b de (E).

3) On considère les points M d'affixe a et N d'affixe b. Répondre par VRAI ou FAUX.

(a) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = ab$.

(b) $a + b$ est un nombre réel.

(c) Le milieu du segment [MN] est l'axe des réels.

(d) La droite (MN) est parallèle à l'axe des imaginaires.

(e) M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 2.28 [4]

Soit f l'application du plan dans lui-même qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}.$$

1) On considère les point A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.

a) Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par f.

b) Placer A, B, C, A', B' et C' dans le plan.

2) On pose $z = x + iy$, avec x et y des réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M invariants par f.

Exercice 2.29 [4]

Soit f l'application du plan dans le plan, qui au point M d'affixe z, $(z \neq 2)$, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - (1+i)}{z - 2}.$$

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1 + i$, $1 - i$ et 2.

1) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

2) Quelles distances représentent les réels $|z - (1+i)|$ et $|z - 2|$?

3) En déduire que, si M appartient à la médiatrice du segment [AC], alors M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 2.30 [4]

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}).$$

Soit E le point d'affixe $z_E = -i$

1. Déterminer l'affixe du point E' image de E par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que M' = M.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit M un point distinct des points O, A et B.
   a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de 0, 1 et -1, on a : $\frac{z'+1}{z'-1} = (\frac{z+1}{z-1})^2$.
   b) En déduire une expression de $\frac{M'B}{M'A}$ en fonction de $\frac{MB}{MA}$.
4. Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

REFERENCES

Bibliographie

[1] Saliou Touré et al, *Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) Terminale SM*, Nombres complexes, EDICEF 1999.

[2] Saliou Touré et al, *Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM) Terminale SE*, Nombres complexes, EDICEF 1999.

[3] Dominique Flament, *Histoire des nombres complexes*, CNRS Éditions, 2003.

Webographie

[3] http ://bacamaths.net/, Nombres complexes.

[4] http ://laroche lycée.free.fr, Terminale S Nombres complexes corrigés.

[5] http ://mathscyr.free.fr, cours et exercices de mathématiques.

[6] http ://xmaths.free.fr, TS-Nombres complexes.