Nombre complexes: Aspect trigonométrique

BOUOPDA FRANCIS

Sous l'encadrement de

Pr.Christophe MOUAHA (Maitre de Conférences)

Dr.Siméon FOTSO (Chargé de Cours)

Mr.ADJABA BIWOLI JEAN PIERRE(IPN/MATHS)

Et de Mr.TCHOKONA DONATIEN(PLEG)

Yaoundé, le 1er janvier 2001

Chapitre 1

ANALYSE DE L'ARTICLE DE LA RESSOURCE 17

Introduction

L'article soumit à notre analyse est un extrait du livre de Hilda ROSSEEL et Maggy SCHNEIDER, intitulé "Ces nombres qu'on dit imaginaires sont-ils vraiment des nombres ?", Laboratoire de didactique des mathématiques, Facultés universitaires de Namur,Petit X n° 63,2004. Dans cette article ils proposent une méthode pour donner un sens au nombres complexes(introduire les nombres complexes par les similitudes directes planes) ; car de très nombreux élevés même après avoir reçu un cours sur les nombres complexes restent dans le doute quant à l'existence des nombres dont le carré est négatif.

Peut être cette manière de penser est due à la façon dont les nombres complexes ont été introduits. Dans la suite nous présentons un résume des travaux de Hilda ROSSEEL et Maggy SCHNEIDER pour donner un sens au nombres complexes, nous allons présenter une suite d'activités pour introduire les nombres complexes. Nous voulons les présenter comme un couple de réels qui modélise une similitude directe de centre O, ainsi que l'opération associée à la composition de celles-ci.

Ces couples acquièrent ensuite le statut de nombres en raison du fait qu'ils se prêtent à des calculs (addition, multiplication).

1.1 Introduction des nombres complexes par les similitudes directes planes.(voir [2])

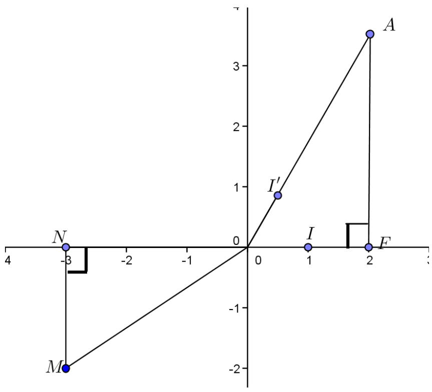
1.1.1 Modéliser les similitudes directes de centre $O\binom{0}{0}$ au moyen de couples.

Activité 1.1.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $r = R(O; \frac{\pi}{3})$ et $h = H(O; 4)$ et $I\binom{1}{0}$

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $s = r \circ h$.
2. Montrer que $s = h \circ r$ (h et r sont commutatives).
3. Déterminer E, image de I par s.
4. Soit $A\binom{2}{2\sqrt{3}}$, montrer qu'il existe une unique similitude S de centre O telle que $S(I) = A$.
5. Déterminer la similitude S_1, de centre O, qui transforme I en $B\binom{2}{2}$.
6. Pour tout point $M\binom{x}{y}$ du plan, montrer qu'il existe une similitude directe de centre $(0; 0)$ et une seule qui transforme I en M. (Cette question est réservée pour les élèves de Terminale C et E.)

Solution.



1. La composée d'un déplacement et d'une homothétie est une similitude directe. Et comme le déplacement (rotation) et l'homothétie ont le point O comme centre, alors s est une similitude de centre O de rapport 4 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Posons $h \circ r = s_1$ et montrons que s et s_1 ont les mêmes éléments caractéristiques. s_1 est la composée d'une homothétie (de rapport 4) et d'une rotation (d'angle $\frac{\pi}{3}$). Donc $s_1 = S(O; \frac{\pi}{3}; 4) = s$.
3. Déterminons l'image de I par s.
   $E = s(I) = h \circ r(I) = h(I'\binom{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}) = E\binom{2}{2\sqrt{3}}$
4. Nous constatons que $A = E$ et d'après la question précédente $s(I) = E = A$. D'où l'existence de S. Il reste maintenant à montrer l'unicité de S.

Soit $S'(O;\alpha';k')$ une autre similitude telle que S'(I)=A, montrons que $S = S'$.

$k' = \frac{OA}{OI} = OA = 4$

Dans le triangle OAC rectangle en C avec $C\binom{2}{0}$ nous avons :

$$\begin{cases} \cos\alpha' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha' = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha' = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nous avons finalement $S = S'$

D'où l'existence et l'unicité de la similitude de centre O telle que $S(I) = A$

5. Soit S_1 la similitude de centre O, de rapport k et d'angle θ qui transforme I en $B\binom{2}{2}$.

   $k' = \frac{OB}{OI} = OB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

   En considérant le triangle OBF rectangle en F avec $F\binom{2}{0}$ nous avons :

   $$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

   On peut encore écrire $B\binom{2}{2} = B\binom{2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}} = B\binom{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ pour avoir directement l'angle et le rapport de la similitude.

6. Soit $M\binom{x}{y}$ un point du plan , cherchons une similitude $f(O;k;\theta)$ telle que $f(I) = M$.

   $k' = \frac{OM}{OI} = OM = \sqrt{x^2+y^2}$.

   Si $x = 0$ alors $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   Si $y = 0$ alors $\theta = \pi + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

   En considérant le triangle OMN rectangle en N, avec $N\binom{x}{0}$ projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses nous avons :

   Si $x > 0$ et $y > 0$ prendre $\theta = \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   Si $x < 0$ et $y > 0$ prendre $\theta = \pi - \arccos(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   Si $x < 0$ et $y < 0$ prendre $\theta = \pi + \arccos(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   Si $x > 0$ et $y < 0$ prendre $\theta = -\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

   $f = f(O;\sqrt{x^2+y^2};\theta)$

Synthèse.

Cette activité introduit la notion de similitude directe, définie par la composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre et montre que :

- tout point du plan, autre que $O\binom{0}{0}$, est l'image de $I\binom{1}{0}$ par une similitude de centre (0 ;0) et une seule ;

- toute similitude directe de centre l'origine du repère, est déterminée entièrement par le couple $(a;b)$ qu'elle octroie au point $I\binom{1}{0}$;

  En conclusion nous pouvons identifier (modéliser) une similitude directe plane de centre $O\binom{0}{0}$ au moyen du couple $(a;b)$ image de $I\binom{1}{0}$ par cette similitude.

1.1.2 Composée des similitudes directes. Définir une opération nouvelle sur les couples

Activité 1.2.

Considérons deux similitudes S_1 et S_2 de centre $O\binom{0}{0}$: la première envoie $I\binom{1}{0}$ sur le point $(a;b)$ et la seconde envoie $I\binom{1}{0}$ sur le point $(a';b')$.

1. Donner l'expression analytique de S_1 et S_2.
2. Donner l'expression analytique de $S_1 \circ S_2$; $S_2 \circ S_1$ et conclure.
3. Trouver l'image du point $I\binom{1}{0}$ par la similitude $S_1 \circ S_2$ et exprimer cette image en fonction de a, b, a' et b'.
4. identifier la similitude $S_1 \circ S_2$ par un couple $(a";b")$ où $a"$ et $b"$ sont exprimés en fonctions de a, b, a' et b'.

Solution.

1. On'a $S_1(M\binom{x}{y})= \begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$ et $S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} u' = a'x - b'y \\ v' = b'x + a'y \end{cases}$
2. $S_1 \circ S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = au' - bv' \\ y" = bu' + av' \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow \quad S_1 \circ S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = a(a'x - b'y) - b(b'x + a'y) \\ y" = b(a'x - b'y) + a(b'x + a'y) \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow S_1 \circ S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = aa'x - b'ay - bb'x - ba'y) \\ y" = ba'x - bb'y + ab'x + aa'y) \end{cases}$

   $\Longleftrightarrow S_1 \circ S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = (aa' - bb')x - (b'a + ba')y \\ y" = (ba' + ab')x + (aa' - bb')y \end{cases}$

   De même

   $S_2 \circ S_1(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = a'x' - b'y' \\ y" = b'x' + a'y' \end{cases}$

$$\iff \quad S_2 \circ S_1(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = a'(ax - by) - b'(bx + ay) \\ y" = b'(ax - by) + a'(bx + ay) \end{cases}$$

$$\iff S_1 \circ S_2(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = aa'x - b'ay - bb'x - ba'y) \\ y" = ba'x - bb'y + ab'x + aa'y) \end{cases}$$

$$\iff S_2 \circ S_1(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = (aa' - bb')x - (b'a + ba')y \\ y" = (ba' + ab')x + (aa' - bb')y \end{cases}$$

Donc $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$.

Nous pouvons conclure que la composée de deux similitudes directes de centre $O\binom{0}{0}$ est commutative.

3. Trouvons l'image de $I\binom{1}{0}$ par $S_1 \circ S_2$.

$$S_1 \circ S_2(I\binom{1}{0}) = \begin{cases} x" = (aa' - bb') \times 1 - (b'a + ba') \times 0 = aa' - bb' \\ y" = (ba' + ab') \times 1 + (aa' - bb') \times 0 = ba' + ab' \end{cases}$$

4. Toute similitude de centre (0 ;0) peut être identifiée au moyen du couple $(x; y)$ image de $(1; 0)$ par cette dernière. Dans notre cas l'image de $I\binom{1}{0}$ par $S_1 \circ S_2$ est le couple $(a"; b") = (aa' - bb'; ba' + ab')$.

   C'est-à-dire $S_1 \circ S_2$ est modélisé par le couple $(aa' - bb'; ba' + ab')$.

Synthèse.

L'activité introduit la composée de deux similitudes directes. Cette composition se solde au niveau de l'expression analytique des deux similitudes. L'activité permet d'ajouter à l'addition de couples une nouvelle opération sur ces derniers. On note $\oplus$ l'addition des couples pour la distinguer de l'addition entre deux réels.

Dans notre travail en modélisant les similitudes par des couples, on exprime leur composition sous la forme :

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb'; ab' + a'b) \tag{1.1}$$

Cette écriture définit une autre opération, différente de l'addition, qui prendra le statut de multiplication au terme de l'activité suivante.

1.1.3 Assimiler les couples (a ;0) à des réels

Activité 1.3.

Soient deux similitudes directes s_1 et s_2 de centre O, données par les couples $(a; b)$ et $(a'; b')$.

I. Déterminer le couple $(a";b")$ de la composée des similitudes s_1 et s_2. Caractériser $s_1 \circ s_2$.

1. $(a;b) = (2,3)$ et $(a';b') = (-1;4)$
2. $(a;b) = (-\frac{2}{3};0)$ et $(a';b') = (\frac{1}{2};0)$
3. $(a;b) = (3;0)$ et $(a';b') = (-1;0)$
4. $(a;b) = (a';b') = (-3;0)$
5. $(a;b) = (0;2)et(a';b') = (0;4)$

II. Les résultats obtenus permettent-ils de préciser la nature de l'opération effectuée entre les couples $(a;b)$ et $(a';b')$?

Solution.

I.
1. $(a";b") = (2\times(-1) - 3\times 4; 2\times 4 + 3\times(-1) = (-14;15)$
2. $(a";b") = (-\frac{1}{3};0)$
3. $(a";b") = (-3;0)$
4. $(a";b") = (-6;0)$
5. $(a";b") = (0\times 0 - 2\times 4; 0\times 4 + 0\times 4) = (-8;0)$

II Oui pour les couples de la forme $(x;0)$ et $(y;0)$, on fait le produit des deux premières composantes des similitudes des couples (a ; b) et (a' ;b') qui modélisent respectivement les similitudes s_1 et s_2, pour avoir la première composante du couple $(a";b")$ de la similitude $s_1 \circ s_2$ et la dernière composante est nulle.

Synthèse.

L'activité porte sur la composition de similitudes associées à des couples déterminés ; en particulier des couples de la forme (a ;0) pour lesquels la nouvelle opération définie sur les couples se comporte comme une multiplication. On remarque en effet que :

$$(a;0) \otimes (a';0) = (aa';0) \tag{1.2}$$

C'est-à-dire que, lorsque la deuxième composante des couples est nulle, l'opération $\otimes$ consiste à effectuer le produit des réels que sont les premières composantes de ces couples. D'où la double décision :

- d'assimiler tout couple (a ;0) au réel a ;

- d'appeler l'opération $\otimes$ multiplication puisqu'elle étend la multiplication des réels ; Le comportement de l'opérateur $\oplus$ sur les couples (a,b), connu des élèves, et plus particulièrement sur les couples de la forme $(a;0)$.

$$(a;0) \oplus (b;0) = (a+b;0) \tag{1.3}$$

Renforce le bien-fondé de son statut d'addition et celui de l'assimilation des couples (a ;0) aux réels.

1.1.4 Donner un sens géométrique aux carrées des nombres négatifs

Activité 1.4.

Soit l'équation $(E) : x^2 = -1$. Admettons que la multiplication dont il est question dans cette équation soit l'opérateur $\otimes$ associé à la composée de deux similitudes directes de centre $(0;0)$.

1. Quelle signification donner dans ce cas à x et à -1 ?
2. Interpréter l'équation $(E) : x^2 = -1$ et ses solutions éventuelles dans le contexte des similitudes.

Solution.

1. Dans ce cas x=(a ; b) est un couple de réels qui permet de modéliser une similitude directe de centre $O(0;0)$ et nous pouvons assimiler -1 au couple $(-1;0)$ qui est la similitude (rotation d'angle π) de centre l'origine qui envoie $(1;0)$ sur $(-1;0)$.
2. $(E) : x^2 = -1 \iff (a;b) \otimes (a;b) = (-1;0)$

$$\iff (a \times a - b \times b; a \times b + a \times b) = (-1;0)$$

$$\iff (a^2 - b^2; 2ab) = (-1;0)$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ ab = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ a = 0 \ ou \ b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a+b)(a-b) = -1 \\ a = 0 \text{ } ou \text{ } b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} si \text{ } b = 0 \\ a^2 = -1 \end{cases} \text{ ce qui est absurde car } a \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} si \text{ } a = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 1 \text{ } ou \text{ } b = -1 \\ a = 0 \end{cases}$$

En conclusion $x = (a;b) = (0;1)$ ou $x = (a;b) = (0;-1)$ et x est l'une des similitudes directes de centre $(0;0)$ qui envoient (1 ;0) sur (0 ;1) ou sur (0 ;-1).

Synthèse.

Il s'agit ici de résoudre l'équation $x^2 = -1$ en termes de similitudes. C'est l'aboutissement de tout le travail effectué jusqu'ici. Les solutions de l'équation ne sont pas des nombres au sens habituel du terme, mais des similitudes que l'on peut coder au moyen de couples.

1.1.5 Une écriture commode

Activité 1.5.

Notons i et -i les solutions de l'équation $x^2 = -1$(C'est à Euler, mathématicien suisse du 18^e siècle, que l'on doit cette notation). Compléter le tableau suivant.

1.

$\otimes$	1	-1	i	-i
1				
-1				
i				
-i				

2. Donner les "nombres" dont le carré est -25, -2, -$\sqrt{3}$.

3. Déterminer les solutions des équations suivantes : $x^2 = i$ et $x^3 = -1$.

Solution.

$\otimes$	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

1. les nombres dont le carré est -25 sont 5i et -5i.

2. Déterminons les solutions de l'équation $x^2 = i$

   $x^2 = i \Leftrightarrow (a,b) \otimes (a,b) = (0;1)$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \; ou \; a = -b \\ a^2 = \frac{1}{2} \; ou \; a^2 = -\frac{1}{2} \; impossible \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

   $x = (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$ ou $x = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Synthèse.

Dans la première partie de l'activité, les symboles 1, -1, i et -i doivent être vus comme des couples de réels qui représentent des similitudes de centre (0,0), des rotations en particulier. L'opérateur $\otimes$ indique que l'on compose deux rotations.

A titre d'exemple , "$-1 \otimes i$" signifie que l'on compose la rotation d'angle π avec celle d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le résultat donne la rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$, qui correspond à -i. Le tableau ainsi complété est une extension de la règle des signes connue pour la multiplication entre des réels et on notera :

$$(-1).i = -i, \quad (-i).(-i) = -1 \tag{1.4}$$

Sans omettre de faire remarquer que $i^2 = -1$.

Les rotations i et -i acquièrent ainsi le statut de nombre pour la raison qu'ils se prêtent à des calculs comparables à ceux que l'on peut faire avec les nombres connus jusque-là : en particulier on les multiplie en respectant des règles canoniques.

La deuxième question de l'activité permet de conclure que toute équation de la forme $x^2 + a^2$ possède deux solutions notées $\pm a$. Ces solutions, que l'on appelle "nombres imaginaires", correspond aux couples (0 ;$\pm a$) qui sont dans le plan, les points de l'axe des coordonnées. Les deux axes d'un repère orthonormé du plan sont par conséquent couverts par des nombres; les nombres réels et les nombres imaginaires. La question que l'on se pose dès lors est de savoir si les points en dehors des axes peuvent aussi être associés à des nombres. La dernière partie de l'activité y répond. De plus, puisque tout couple (a ;b) s'écrit sous la forme a(1 ;0)⊕b(0 ;1), il peut se noter a.1+b.i ou plus simplement $a + bi$.

Une fois la notation a+ib adoptée, il est bien sur opportun d'observer que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sur les couples deviennent des opérations d'addition et de multiplication qui respectent les règles habituelles de calcul, associativité, commutativité, distributivité car elles induisent que :

$$(a + ib) \oplus (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i \tag{1.5}$$

et

$$(a + bi) \otimes (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i \tag{1.6}$$

Pour ces raisons, la notation a+bi confère aux couples (a ;b) le statut de nombres appelés *nombres complexes* ; et l'ensemble de tous ces nombres est appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$. $(\mathbb{C};\ \oplus;\ \otimes)$ est un corps commutatif.

1.1.6 La division d'un nombre complexe par un autre

Dans $\mathbb{R}^2$, on sait ce que signifie additionner ou soustraire des couples. On a également défini une multiplication de couples ou, ce qui revient au même, à une multiplication de nombres complexes a+bi, en donnant un sens géométrique à cette opération. Comment pourrait-on définir le quotient entre deux nombres complexes et quel sens lui donner ?

Activité 1.6.

Soit $(a; b)$ le couple qui modélise la similitude S et $(a'; b')$ le couple qui modélise l'inverse de S notée S^{-1}

1. Donner l'expression analytique de $S \circ S^{-1}$.
2. En utilisant le fait que $S \circ S^{-1} = Id_{\mathcal{P}}$, Exprimer a' et b' en fonction de a et b.

Solution.

1. $S(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$ $\qquad S^{-1}(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x' = a'x - b'y \\ y' = b'x + a'y \end{cases}$

$$S \circ S^{-1}(M\tbinom{x}{y}) = \begin{cases} x" = (aa' - bb')x - (b'a + ba')y \\ y" = (ba' + ab')x + (aa' - bb')y \end{cases}$$

2. $S \circ S^{-1}(M) = M$ car $S \circ S^{-1} = Id_{\mathcal{P}}$

$$S \circ S^{-1}(M\binom{x}{y}) = \begin{cases} x" = (aa' - bb')x - (b'a + ba')y = x \\ y" = (ba' + ab')x + (aa' - bb')y = y \end{cases}$$

$$S \circ S^{-1}(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ b'a + ba' = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ b'a = -ba' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ a' = -\frac{b'a}{b} \qquad b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\frac{b'a^2}{b} - bb' = 1 \quad b \neq 0 \\ a' = -\frac{b'a}{b} \qquad b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -b'(a^2 + b^2) = b \\ a' = -\frac{b'a}{b} \qquad b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b' = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ a' = -\frac{-b}{a^2+b^2} \times \frac{a}{b} \quad b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} b' = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ a' = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$$

Synthèse.

La division d'un nombre complexe par un autre peut être vue comme la multiplication du premier par l'inverse du second, cet inverse étant associé d'entrée de jeu à la similitude réciproque de celle que modélise le nombre complexe diviseur. Soit un nombre complexe $a + ib$ et $S(O; \alpha; k)$ la similitude qui le modélise. Le nombre complexe qui modélise la similitude $S(O; -\alpha; k)$ est appelé nombre complexe conjugué de $a + ib$.

1.1.7 Module et argument d'un nombre complexe

Soit a+ib ((a,b)) un nombre complexe qui modélise une similitude directe $S(O; \alpha; k)$. On appelle module de a+ib(respectivement argument de a+ib) le rapport de la similitude S (respectivement l'angle de la similitude S).

Module et argument d'un produit de nombres complexes

Activité 1.7.

Soit $(a;b)$(respectivement $(a';b')$) un couple qui modélise une similitude directe $S(O;\alpha;k)$(respectivement $S'(O;\theta;l)$).

1. Montrer que $S \circ S' = s(O;\alpha+\theta;kl)$.
2. Déterminer le couple $(x;y)$ de point qui modélise la similitude $S \circ S'$.
   a. Donner le module et l'argument de $(x;y)$.
   b. Conclure

Solution.

1. Il suffit de montrer $s\binom{1}{0} = S \circ S'\binom{1}{0} = (aa' - bb'; ba' + ab')$.
   On sait que $a = k\cos\alpha$, $b = k\sin\alpha$ $a' = l\cos\theta$ et $b' = l\sin\theta$.
   $s(M) : \begin{cases} x' = kl\cos(\alpha+\theta)x - kl\sin(\alpha+\theta)y \\ y' = kl\sin(\alpha+\theta)x + kl\cos(\alpha+\theta)y \end{cases}$
   et $s\binom{1}{0} = \begin{cases} x' = kl\cos(\alpha+\theta) = kl\cos\alpha\cos\theta - kl\sin\alpha\sin\theta = aa' - bb' \\ y' = kl\sin(\alpha+\theta) = kl\sin\alpha\cos\theta + kl\cos\alpha\sin\theta = ba' + ab' \end{cases}$
2. Le couple $(aa' - bb'; ba' + ab')$ modélise s.
   a. Le rapport de s est kl et l'angle est $\alpha + \theta$
   b. Le module(respectivement l'argument) du produit de deux nombres complexes est le produit des modules(respectivement la somme des arguments).

Synthèse.

En utilisant le fait que le produit de deux nombres complexes modélise la composée des similitudes associés à ces nombres complexes, il s'ensuit le résultat suivant. Le rapport (respectivement l'argument) d'un produit de nombres complexes est le produit des rapports (respectivement la somme des arguments).

Nous pouvons finir notre travail en posant $S(O)$ l'ensemble des similitudes directes de centre l'origine du repère.

Considérons la fonction $\begin{array}{rcl} f : S(O) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s(O;\theta;k) & \longmapsto & (k\cos\theta; k\sin\theta) \end{array}$ f est une bijection .

En effet

Soient $s_1(O;\alpha;k)$, $s_2(O;\theta;l) \in S(O)$ vérifiant $f(s_1) = f(s_2)$, montrons que $s_1 = s_2$.

$f(s_1) = f(s_2) \iff \begin{cases} k\cos\alpha = l\cos\theta \quad (1) \\ k\sin\alpha = l\sin\theta \quad (2) \end{cases}$

$(1)^2 + (2)^2 \Longrightarrow k^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$$\iff k^2 = l^2 \implies k = l \text{ car k,l>0}$$

$$k = l \implies \begin{cases} \cos\alpha = \cos\theta \\ \sin\alpha = \sin\theta \end{cases} \implies \alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = \theta \text{ car } \theta, \alpha \in [0; 2\pi[$$

Donc f est injective.

la surjectivité a déjà été montré.