Chapitre 4

Des nombres qui modélisent des transformations

Dans le chapitre 3, nous avons décrit et analysé les réserves exprimées par les élèves à l'encontre des nombres complexes. Ces réserves, patentes aussi dans l'histoire des mathématiques, ont été interprétées en termes d'obstacle épistémologique, comme traces d'une vision positiviste des concepts mathématiques. Des approches classiques de ces nombres, essentiellement algébriques, dont l'une part du postulat d'existence d'un nombre dont le carré vaut -1, ont été analysées comme une solution formaliste contestable car source de non-sens chez les élèves. Nous inspirant de la manière dont s'est résorbée, dans l'histoire, la crise provoquée par les nombres complexes, nous décrivons ici un projet qui s'appuie sur une vision plus intuitionniste dans laquelle on construit les couples de réels comme codages algébriques de similitudes, ainsi que l'opération associée à la composition de celles-ci. Ces couples acquièrent ensuite le statut de nombres en raison du fait qu'ils se prêtent à des calculs. La lecture d'un texte historique pose la question de l'extension de l'ensemble des racines d'un polynôme. Une analyse macrodidactique du projet est réalisée, mettant en évidence les enjeux de chaque activité.

Des réactions d'élèves à cet enseignement sont ensuite décrites et interprétées. Par rapport à une approche classique, les réserves s'atténuent mais le passage du registre géométrique au registre algébrique demeure périlleux : certains élèves persistent à ne trouver un sens que dans le premier, restant perplexes pour le second. Globalement, le projet semble contribuer à changer le regard que portent les élèves sur les mathématiques, dans le sens où ils s'interrogent eux-mêmes sur la signification des ostensifs manipulés.

4.1 Une solution intuitionniste à travers un modèle géométrique

Comme développé plus haut, le critère de non-contradiction a pu, dans une perspective formaliste, tenir lieu de critère suffisant d'existence des objets mathématiques. Le courant intuitionniste, lui, s'opposant au courant formaliste, insiste sur la construction des objets mathématiques au départ d'objets déjà construits. Ainsi, au lieu de définir les nombres réels de manière axiomatique, on s'attachera à les définir par des "opérations" – en un sens large – portant sur les nombres rationnels, par exemple en les définissant par "coupures" comme Dedekind. Quant aux rationnels eux-mêmes, ils seront construits comme classes d'équivalence de couples d'entiers. Bien sûr, il faut un "matériau" de départ pour pouvoir réaliser ces constructions successives, d'où l'importance, pour les intuitionnistes, "d'intuitions premières" comme la succession que forment les nombres naturels, car "les mathématiques ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit, mais sont, au contraire, en étroite connexion avec la réalité concrète" (Borel, E.U., 1980b).

Notons que ce débat entre formalistes et intuitionnistes a fait l'objet d'une évolution historique, que l'intuitionnisme est devenu aujourd'hui une discipline formelle et que le théorème de complétude lie la consistance d'une théorie à l'existence d'un modèle (on est là dans une métamathématique). Rendant compte de cette évolution, T. Gilbert (1999) insiste sur le fait que, si d'aucuns tel Dieudonné ont pu lier la non-contradiction d'une théorie à l'existence, au sens ontologique du terme, des objets satisfaisant les axiomes de cette théorie, le projet des fondements de la mathématique a fait évoluer la non-contradiction de condition nécessaire d'existence en mathématiques au statut de condition également suffisante : "Si l'existence d'un objet n'entraîne pas de contradiction [1], on peut décider de postuler son existence.". Et de citer G. Godefroy (1997) : "[...] un concept mathématique nouveau apparaît d'abord comme une chimère. Cependant, s'il répond à un besoin et qu'il est susceptible d'une formalisation cohérente, il est à plus ou moins long terme intégré (en dépit de la routine et des interdits) au corps des mathématiques, et scientifiquement parlant la question est réglée". Ce propos nous amène à nous demander dans quelle mesure les élèves acceptent d'étudier des chimères et, surtout, en réponse à quel besoin.

1. Cela ne pouvant être prouvé si ce n'est de manière relative : si telle théorie est consistante, telle autre l'est aussi.

Dans une perspective intuitionniste, on pourrait définir les complexes à partir des réels, soit comme couples de réels, soit comme matrices particulières de réels, les uns et les autres étant dotés d'opérations spécifiques. Pour les raisons décrites plus haut, nous pensons cependant important d'expliquer aux élèves quelle(s) raison(s) on pourrait avoir de s'intéresser à ces objets et leurs propriétés. Par ailleurs, nous souhaitions tenir compte de la vision positiviste des mathématiques que nous avons prêtée aux élèves.

Comme nous le montre l'histoire des mathématiques, que nous approfondirons au chapitre 5, la piste didactique que nous cherchions pouvait venir de la géométrie ou de la physique. Pour ce qui est de cette dernière discipline, on pense bien aux vecteurs tournants de Fresnel qui modélisent des phénomènes périodiques comme l'intensité des principaux courants alternatifs. Cette représentation vectorielle éclaire entre autres les phénomènes de déphasage. Les vecteurs du physicien impliquant une intensité et une direction, il leur est associé une représentation complexe dont le principal avantage est de rendre plus concis les développements théoriques, surtout si l'on utilise l'écriture exponentielle des nombres complexes. Cependant, le gain d'écriture réalisé n'est manifeste qu'à un certain niveau d'approfondissement théorique et le coût cognitif d'une telle approche est assez lourd, vu que la compréhension de certains concepts d'électricité ne va pas de soi. Pour ces raisons, nous avons préféré opter pour un sens géométrique, celui-ci fournissant également, le cas échéant, ce dont on a effectivement besoin pour faire de la physique avec des nombres complexes. D'où l'idée du présent projet : construire un formalisme algébrique susceptible de rendre compte de transformations et de figures géométriques.

Ce projet s'inscrit dans une perspective socio-constructiviste, tout comme les approches formalistes analysées plus haut. Mais le projet humain qui le motive est tout autre : ce n'est pas tant la recherche d'une cohérence ou d'une non-contradiction qui le guide mais plutôt l'instrumentation apportée par une écriture symbolique pour étudier des propriétés d'objets géométriques : bref, un projet analogue à celui de Descartes de faire de la géométrie "calculatoire". Pour cela, nous avons choisi une présentation qui mêle d'emblée les aspects géométrique, algébrique et trigonométrique de cette matière en évitant toutefois la représentation matricielle des nombres complexes, les matrices n'étant pas forcément au programme de tous les élèves concernés. Cette dernière représentation nous paraît toutefois particulièrement intéressante lorsque les similitudes de centre (0, 0) auront le visage d'applications linéaires déterminées par les images des vecteurs d'une base.

En gros, un "complexe" sera défini à terme comme un couple, après avoir joué le rôle de codage symbolique d'une similitude directe de centre $(0,0)$. Ce couple, considéré comme l'image du point $(1,0)$ par cette similitude, détermine entièrement cette transformation ; l'écriture trigonométrique du couple livre alors l'angle de la rotation et le rapport d'homothétie en lesquelles la similitude se décompose. La multiplication des couples exprime la composée de similitudes et chaque couple de la forme $(a,0)$ est assimilé au réel a. Dans cet environnement, l'équation $x^2 = -1$ est interprétée d'abord comme la recherche d'une rotation qui, composée avec elle-même, donne une rotation d'amplitude $180°$. Parallèlement, un regard plus algébrique sera proposé par l'étude d'un texte historique et par le débat épistémologique qu'il suscite. Le statut de nombre sera enfin octroyé à ces couples en raison des opérations de calcul auxquelles ils se prêtent. Jusque-là, on se sera abstenu d'utiliser le mot "nombre" à propos des couples pour ne l'introduire qu'au moment opportun.

Après avoir décrit ce projet dans les grandes lignes, nous ferons état des réactions des élèves et nous les analyserons. C'est à ce moment que nous argumenterons des options didactiques choisies.

4.2 Quelques moments clés du projet et leurs enjeux

4.2.1 Ecriture algébrique de transformations du plan et travail "à une translation près"

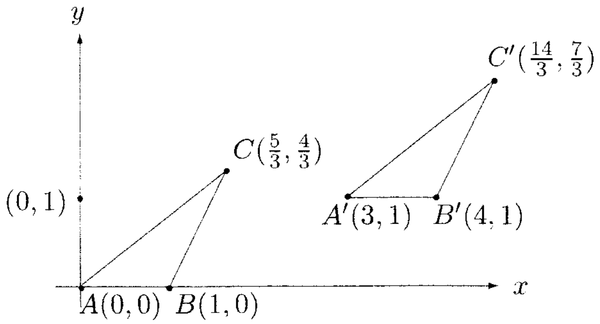
Les activités 1 et 1_{bis} plongent les élèves dans l'univers des transformations du plan, ou du moins de quelques-unes d'entre elles. Elles mettent en jeu une translation et une symétrie centrale, qui sont des transformations abordées au début du cycle secondaire dans l'enseignement belge : il s'agit donc de mobiliser des savoirs anciens. Ces activités font également intervenir une homothétie, laquelle est une notion qui n'a que peu ou jamais été travaillée en tant que transformation du plan mais qui a été préparée par le biais des figures homothétiques définies comme figures ayant des angles respectifs de même amplitude et dont les côtés homologues sont proportionnels et parallèles.

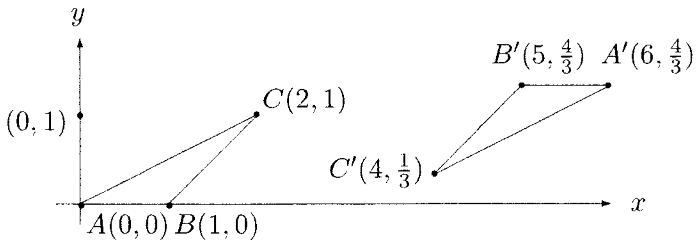
Les transformations mobilisées dans ces activités le sont par le biais de figures et de leurs images. Mais on y étudie leur effet sur les coordonnées des points, ce qui met en relief leur caractère ponctuel. Au terme de ces activités, les homothéties seront introduites comme transformations ponctuelles caractérisées par un centre et un rapport.

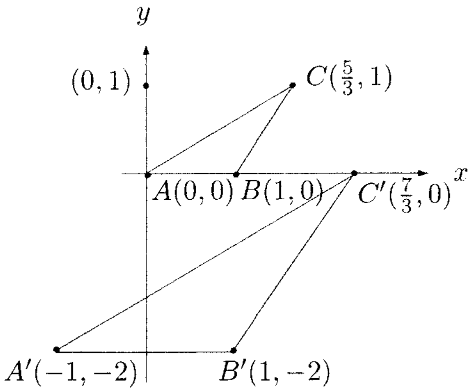
Activité 1

Dans un repère orthonormé, soit un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par une transformation du plan. Pour chaque cas illustré ci-dessous,

1) de quelle transformation du plan s'agit-il ?
2) quel lien y a-t-il entre les coordonnées d'un point et celles de son image ?

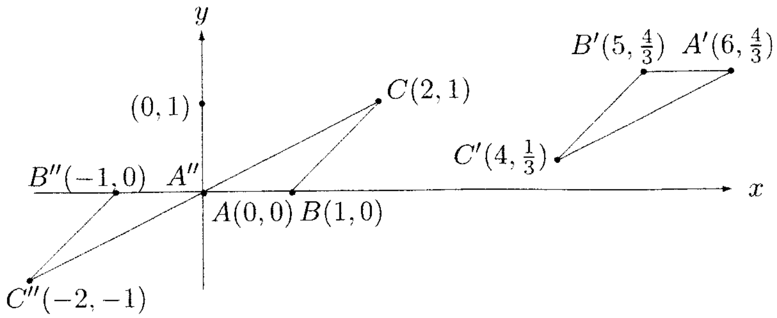


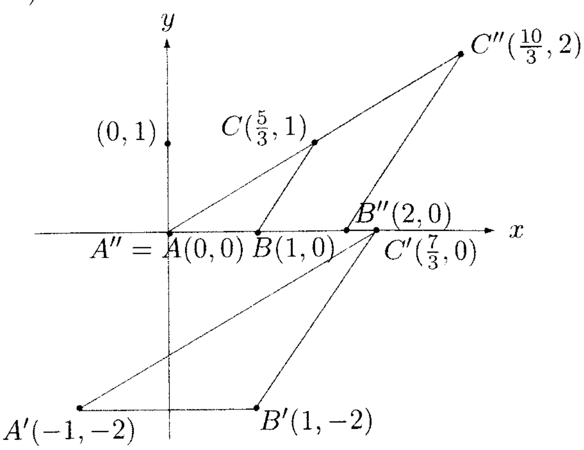




Activité 1_{bis}

Peut-on s'appuyer sur une figure annexe, le triangle $A''B''C''$, pour décrire la transformation qui envoie le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ et exprimer le lien entre les coordonnées d'un point quelconque et de son image ?





L'enjeu principal de l'activité 1 est de formaliser le lien entre les coordonnées d'un point et celles de son image par chacune de ces transformations et de réaliser que ce lien se détermine plus aisément ou, du moins s'éclaire, dans le cas de la symétrie centrale et dans celui de l'homothétie, lorsque l'on décompose ces transformations en une translation et une transformation de même type dont $(0, 0)$ est un centre.

Cette prise de conscience, si elle n'est pas spontanée chez les élèves, devrait être facilitée par l'activité 1_{bis} qui reprend les mêmes questions mais dans laquelle les dessins s'enrichissent d'un triangle intermédiaire entre chaque triangle et son image.

4.2.2 Coder algébriquement les rotations de centre $(0, 0)$

Un des principaux enseignements que l'on retire des activités 1 et 1_{bis} est que, lorsqu'on étudie les effets sur les coordonnées des transformations qui ont un centre, on peut s'en tenir à celles dont le centre est $(0, 0)$: la composition avec une translation permet ensuite de régler le problème en toute généralité. Pour les rotations, on s'en tient donc à des cas de centre $(0, 0)$. C'est ce problème qui est posé dans l'activité 2. Sa résolution suppose une mobilisation d'acquis plus anciens : les cosinus et sinus d'un angle.

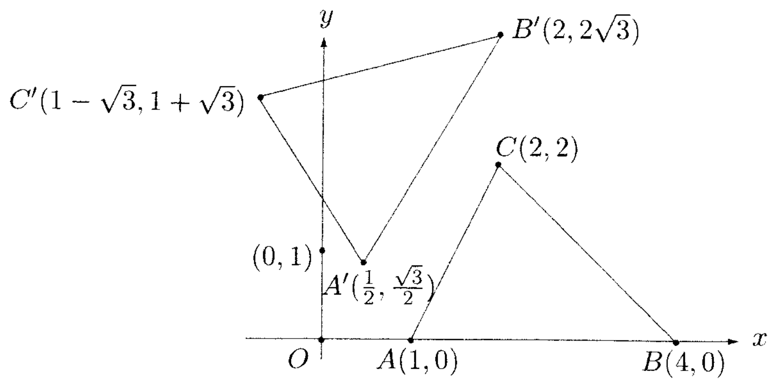
Activité 2

Dans un repère orthonormé, soit un triangle ABC et son image $A'B'C'$ par une rotation de centre $(0, 0)$.

1) Quel est l'angle de cette rotation ?

2) Justifiez les coordonnées de A', image de A par cette rotation.

3) Ecrivez les coordonnées de B' et de C' en fonction de l'angle de la rotation.



Pour répondre à la première question, celle de l'angle, il suffit de réaliser que les coordonnées de A' sont respectivement les cosinus et sinus de l'angle cherché : il s'agit de valeurs remarquables de nombres trigonométriques que les élèves connaissent ; à défaut, ils peuvent déterminer une valeur de l'angle sur la calculatrice. Les élèves peuvent également travailler à partir des coordonnées de B', mais le travail est un peu plus ardu, ce point n'appartenant pas au cercle trigonométrique. Par contre, la détermination de l'angle ne peut se faire d'emblée à partir des coordonnées de C et C'.

Pour déterminer l'angle, il est donc particulièrement facile de se polariser sur le point $(1, 0)$ et son image. Ce fait, mis en évidence lors de la synthèse, est important pour la suite.

Après avoir déterminé l'écriture trigonométrique de C, il est assez aisé de faire apparaître l'écriture trigonométrique de C' en fonction de l'angle.

Il nous semble intéressant, sans plus, de compléter cette activité par la validation des coordonnées de C', telles que proposées sur le dessin : pour ne pas encombrer la réflexion à ce stade, nous avons choisi des coordonnées de C qui permettent de le faire sans mobiliser les formules trigonométriques d'addition d'angles. La démarche peut sembler gratuite car non nécessitée par les questions posées, mais fait ressortir que les coordonnées d'un point image d'un autre par une rotation de centre $(0, 0)$ ont une écriture particulièrement commode lorsque le point initial appartient à l'axe des abscisses.

La synthèse qui clôt cette activité porte principalement sur deux points :

- L'angle d'une rotation de centre $(0, 0)$ est déterminé dès que l'on connaît l'image de $(1, 0)$.
- Tout point du plan peut être considéré comme l'image d'un point de l'axe des abscisses par une rotation de centre $(0, 0)$. Ce point de vue débouche sur l'écriture trigonométrique des coordonnées de ce point. Le module et l'argument de cette écriture sont les coordonnées polaires du point.

Des exercices suivent cette synthèse : ils consistent à passer de l'écriture cartésienne des points du plan à leur écriture trigonométrique et vice-versa, pour tous les quadrants, en considérant ces points comme images d'un point de l'axe des abscisses par une rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle donné (activités 2_{bis} et 2_{ter}). Ces exercices donnent l'occasion de rappeler l'intérêt que l'on a eu d'étendre les notions de sinus et cosinus comme rapports de côtés d'un triangle rectangle à leur définition en termes de coordonnées de points du cercle trigonométrique et de justifier, si cela n'a pas déjà été fait, les modalités de cette extension.

Activité 2_{bis}

Considérons un système d'axes orthonormé.

1) Quelles sont les coordonnées de l'image du point $(1, 0)$ par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle $-60°$?
2) Quelles sont les coordonnées de l'image du point $(1, 0)$ par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle $-135°$?
3) Quelles sont les coordonnées de l'image du point $(1, 0)$ par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle $150°$?
4) Quelles sont les coordonnées de l'image du point $(1, 0)$ par la rotation de centre $(0, 0)$ et d'angle $225°$?
5) Soit le point B', image de $B(3, 0)$ par la rotation de centre $O(0, 0)$ et d'angle $45°$. Quelles sont les coordonnées de B' ?
6) Soit le point C', image de $C(2, 2)$ par la rotation de centre $O(0, 0)$ et d'angle $60°$. Quelles sont les coordonnées de C' ? Expliquez votre réponse par un calcul.

Activité 2_{ter}

1) Considérons la rotation de centre $(0, 0)$ qui envoie $(1, 0)$ sur $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Quel est l'angle de cette rotation ?
2) Quel est l'angle de la rotation qui envoie $(1, 0)$ sur $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$?
3) Quel est l'angle de la rotation qui envoie $(1, 0)$ sur $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$?
4) Quel est l'angle de la rotation de centre $O(0, 0)$ qui envoie $B(5, 0)$ sur $B'(3, 4)$?

Les activités 2_{bis} et 2_{ter} peuvent être proposées en lieu et place de l'activité 2 ou comme marchepied pour résoudre cette dernière. L'accent y est mis d'emblée, par le professeur lui-même, sur le point $(1, 0)$ et son image. Leur morcellement en petites questions peut les rendre plus abordables, mais moins porteuses car moins synthétiques des savoirs que l'activité 2 vise à mettre en place.

Par ailleurs, les deux dernières questions de l'activité 2_{ter} s'avèrent utiles pour aborder l'activité suivante.

4.2.3 Les similitudes directes de centre $(0, 0)$

Activité 3

1) Existe-t-il une rotation de centre $O(0,0)$ qui envoie $B(1,0)$ sur $B'(3,4)$? Si oui, laquelle ? Si non, quelle(s) transformation(s) de centre $(0,0)$ donne(nt) $(3,4)$ comme image à $(1,0)$?
2) Par quelles transformations du plan, ayant $(0,0)$ comme centre, peut-on envoyer $(1,0)$ sur $(-6,7)$?
3) Par quelles transformations du plan, de centre $(0,0)$, peut-on envoyer $(1,0)$ sur $(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5})$?
4) Tentons une généralisation : par quelles transformations du plan, de centre $(0,0)$, peut-on envoyer $(1,0)$ sur (a,b), a et b étant des réels quelconques ?

Cette activité aboutit au concept de similitude directe définie par la composition d'une rotation et d'une homothétie de même centre et montre que :

- Tout point (a,b) du plan, autre que $(0,0)$, est l'image de $(1,0)$ par une telle similitude de centre $(0,0)$ et une seule.
- L'écriture trigonométrique de cette image fournit le rapport (ou module) et l'angle (ou argument) de la similitude.

Nous renvoyons le lecteur à la section 1.2 de cet ouvrage, dans laquelle les questions de l'activité 3 ont été traitées.

4.2.4 Chercher l'image d'un point quelconque par une similitude. Coder les similitudes directes de centre $(0, 0)$ au moyen de couples

Activité 4

Considérons la similitude de centre $(0, 0)$ qui envoie le point $A(1, 0)$ sur le point $A'(3, 2)$.

1) Comment calculer l'image P' du point $P(1, 5)$ par cette similitude ?
2) Si $P(x, y)$ est un point quelconque du plan, déterminez, en fonction de x et y, les coordonnées de son image P' par cette même similitude.

Pour mener à bien cette activité, le passage par les écritures trigonométriques des points en jeu est nécessaire : celle de l'image de $(1, 0)$ par la similitude, à défaut d'avoir l'angle et le rapport de celle-ci, mais aussi celle du point P dont il faut calculer l'image. Si l'on s'en tient uniquement à la première partie de l'activité, ces considérations peuvent suffire et la réponse est acceptable sous sa forme trigonométrique. C'est la deuxième partie de l'activité qui nécessite de revenir à l'écriture cartésienne des coordonnées par le biais des formules des sinus et cosinus d'addition d'angles (que l'on suppose connues à ce stade).

Cette recherche montre qu'une similitude directe de centre $(0, 0)$ est déterminée entièrement par l'image (a, b) qu'elle octroie au point $(1, 0)$. Cette conclusion, combinée avec le premier résultat de l'activité précédente, permet de coder une telle similitude au moyen du couple (a, b), image de $(1, 0)$ par cette similitude.

4.2.5 Composer des similitudes. Définir une opération nouvelle sur les couples

Activité 5

Considérons deux similitudes de centre $O(0, 0)$: la première envoie $(1, 0)$ sur (a, b) et la seconde envoie $(1, 0)$ sur (a', b'). Quelle est l'image du point $(1, 0)$ par la composée de ces deux similitudes ? Exprimez cette image en fonction de a, b, a' et b'.

L'activité 5 mobilise la composition de deux similitudes directes. Cette composition se solde, au niveau de l'écriture trigonométrique, par l'addition des angles respectifs des deux similitudes et le produit de leurs rapports. Un autre apport de l'activité, très important, est d'adjoindre à l'addition de couples une nouvelle opération sur ces derniers. L'addition a été introduite, au terme de l'activité 1, pour exprimer l'effet d'une translation sur les coordonnées de points. On aura noté $\oplus$ cette opération pour la distinguer de l'addition entre deux réels.

Ici, en codant les similitudes par des couples, on exprime leur composition sous la forme

$$(a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

Cette écriture définit une autre opération, forcément distincte de l'addition, qui prendra le statut de multiplication au terme de l'activité 6.

4.2.6 Assimiler les couples $(a, 0)$ à des réels

Activité 6

Soient deux similitudes directes s_1 et s_2 de centre O, données par les couples (a, b) et (a', b').

a) Déterminez le couple (a'', b'') de la composée des similitudes s_1 et s_2. Caractérisez s_1, s_2 et $s_1 \circ s_2$.

  1) $(a, b) = (2, 3)$ et $(a', b') = (-1, 4)$;
  2) $(a, b) = (3, 0)$ et $(a', b') = (\frac{1}{2}, 0)$;
  3) $(a, b) = (-\frac{2}{3}, 0)$ et $(a', b') = (\frac{1}{2}, 0)$;
  4) $(a, b) = (1, -3)$ et $(a', b') = (2, 6)$;
  5) $(a, b) = (a', b') = (-3, 4)$;
  6) $(a, b) = (0, 2)$ et $(a', b') = (0, 4)$.

b) Les résultats obtenus permettent-ils de préciser la nature de l'opération effectuée entre les couples (a, b) et (a', b') ?

L'activité 6 porte sur la composition de similitudes associées à des couples déterminés, en particulier des couples de la forme $(a, 0)$ pour lesquels la nouvelle opération définie sur les couples se comporte comme une multiplication. On remarque en effet que

$$(a, 0) \otimes (a', 0) = (aa', 0);$$

c'est-à-dire que, lorsque la deuxième composante des couples est nulle, l'opération $\otimes$ consiste à effectuer le produit des réels que sont les premières composantes de ces couples. D'où la double décision :

- d'assimiler tout couple $(a, 0)$ au réel a ;
- d'appeler l'opération $\otimes$ multiplication puisqu'elle étend la multiplication des réels.

Le comportement de l'opération $\oplus$ sur les couples (a, b), connu des élèves, et plus particulièrement sur les couples $(a, 0)$:

$$(a, 0) \oplus (a', 0) = (a + a', 0)$$

renforce le bien-fondé de son statut d'addition et celui de l'assimilation des couples $(a, 0)$ aux réels, ce qui donne un sens à l'expression "droite des réels".

Cette activité a également pour but d'habituer les élèves à interpréter géométriquement des calculs relatifs à des couples.

4.2.7 A titre de provocation

Activité 7

Lisez attentivement le texte ci-dessous. Que pensez-vous de la méthode employée ? En quoi vous paraît-elle audacieuse ?

Raphaël Bombelli, dans son unique ouvrage, l'*Algebra*, écrit dans les années 1560 et publié en 1572, année de sa mort, étudie la résolution des équations et plus particulièrement celles de degré 3. La méthode qu'il propose est l'aboutissement d'une longue réflexion relative à la recherche des solutions de telles équations. C'est à l'occasion de la résolution de l'équation

$$x^3 = 15x + 4 \qquad (1)$$

qu'il utilise une démarche pour le moins audacieuse. Voici comment il procède :

1) Il compare la forme de l'équation (1) avec l'égalité évidente

$$(u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v)$$

et affirme que $(u - v)$ est solution de (1) à condition que

$$\begin{cases} -3uv = 15 \\ u^3 - v^3 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

2) Pour trouver $(u - v)$, c'est-à-dire x, il résout (2) comme suit :

$$\begin{cases} v = -\dfrac{5}{u} \\ \\ u^3 + \dfrac{125}{u^3} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -\dfrac{5}{u} \\ \\ u^6 - 4u^3 + 125 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

3) L'équation (3) est apparentée à une équation du second degré. Il pose $u^3 = t$ et résout l'équation $t^2 - 4t + 125 = 0$ en écrivant :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{4 + \sqrt{16 - 500}}{2} = \frac{4 + \sqrt{-484}}{2} = 2 + 11\sqrt{-1} \\ t_2 &= \frac{4 - \sqrt{16 - 500}}{2} = \frac{4 - \sqrt{-484}}{2} = 2 - 11\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

4) En appliquant les règles habituelles du calcul algébrique, Bombelli constate que

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

et en conclut que $u = 2 + \sqrt{-1}$, ce qui donne pour v :

$$v = \frac{-5}{2 + \sqrt{-1}} = \frac{-5(2 - \sqrt{-1})}{4 - (-1)} = -2 + \sqrt{-1}.$$

Finalement, $x = u - v = 4$. Cette valeur de x est bien solution de (1) puisque $4^3 = 15 \cdot 4 + 4$.

Activité 7_{bis} : imitons Bombelli

En s'inspirant des calculs faits par Bombelli, l'équation $x^2 + 1 = 0$ peut se résoudre comme suit

$$\begin{aligned} x^2+1=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2=-1 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Que pensez-vous de cette manière de faire ?

L'activité 7 constitue un changement de contrat : on passe d'une réflexion géométrique à des considérations exclusivement numériques, le lien entre les deux points de vue n'étant pas établi.

Le texte de Bombelli dont nous avons parlé plus haut constitue une sorte de provocation pour les élèves : on espère leur faire revivre le côté scandaleux qu'a représenté dans l'histoire la manipulation de racines carrées de nombres négatifs.

Nous prévoyons des réactions plus vives à propos de l'activité 7_{bis}, ainsi que G. Bagni a pu les observer. Faire voter les élèves sur leur acceptation des procédures en jeu nous paraît ici particulièrement significatif et susceptible de provoquer un débat porteur au sein de la classe.

4.2.8 Donner un sens géométrique aux racines carrées de nombres négatifs

Activité 8

Revenons à l'équation $x^2 = -1$. Admettons que la multiplication dont il est question dans cette équation soit l'opérateur $\otimes$ associé à la composée de deux similitudes et tel que $(a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

1) Quelle signification donner dans ce cas à x et à -1 ?

2) Interprétez l'équation $x^2 = -1$ et ses solutions éventuelles dans le contexte des similitudes.

Il s'agit ici de faire décoder la résolution de l'équation $x^2 = -1$ en termes de similitudes. C'est l'aboutissement de tout le travail effectué jusqu'ici. Cette activité crée un contraste avec les précédentes, de même qu'un changement de contrat symétrique de celui provoqué avant : on en revient délibérément à un point de vue géométrique.

C'est ce chassé-croisé qui constitue le sens : les solutions de l'équation ne sont pas des nombres au sens habituel du terme, mais des similitudes que l'on peut coder au moyen de couples.

4.2.9 Une écriture commode

Activité 9

Notons i et $-i$ les solutions de l'équation $x^2 = -1$ (c'est à Euler, mathématicien suisse allemand du 18^e siècle, soit deux siècles après Bombelli, que l'on doit cette notation).

1) Complétez le tableau suivant :

$\otimes$	1	-1	i	$-i$
1				
-1				
i				
$-i$				

2) Ecrivez les "nombres" dont le carré est $-25, -2, -\sqrt{3}$. Comment représenter ces nombres géométriquement ?

3) Dans la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$, telle que proposée par Bombelli (activité 7), on lit que $u = 2 + \sqrt{-1}$ et $v = -2 + \sqrt{-1}$. Comment réécrire u et v au moyen des nouvelles écritures et comment les représenter géométriquement ?

4) Déterminez les solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 &= i \\ x^3 &= -1. \end{aligned}$$

Dans la première partie de l'activité 9, les symboles $1, -1, i$ et $-i$ doivent être vus comme des couples de réels qui représentent des similitudes de centre $(0, 0)$, des rotations en l'occurrence. L'opérateur $\otimes$ indique que l'on compose deux rotations.

A titre d'exemple, "$-1 \otimes i$" signifie que l'on compose la rotation d'angle 180° avec celle d'angle 90°. Le résultat est la rotation de 270°, qui correspond à $-i$. Le tableau ainsi complété est une extension de la règle des signes connue pour la multiplication entre des réels et on notera :

$$(-1) \cdot i = -i, \quad (-i) \cdot (-i) = -1, \quad \ldots$$

sans omettre de faire remarquer que $i^2 = -1$.

Les objets i et $-i$ acquièrent ainsi le statut de nombre pour la raison qu'ils se prêtent à des calculs comparables à ceux que l'on peut faire avec les nombres connus jusque-là : en particulier, on les multiplie en respectant des règles canoniques.

La deuxième question de l'activité 9 permet de conclure que toute équation de la forme $x^2 + a^2 = 0$ possède deux solutions notées $\pm ai$. Ces solutions, que l'on appelle "nombres imaginaires", correspondent aux couples $(0, \pm a)$ qui sont, dans le plan, les points de l'axe des ordonnées. Les deux axes d'un repère orthonormé du plan sont par conséquent couverts par des nombres : les nombres réels et les nombres imaginaires. La question qui se pose dès lors est de savoir si les points en dehors des axes peuvent aussi être associés à des nombres. Les questions 3 et 4 y répondent. De plus, puisque tout couple (a, b) s'écrit sous la forme $a(1, 0) \oplus b(0, 1)$, il peut se noter $a \cdot 1 + b \cdot i$ ou plus simplement $a + bi$.

Une fois l'écriture $a+bi$ adoptée, il est bien sûr opportun d'observer que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sur les couples deviennent des opérations d'addition et de multiplication qui respectent les règles habituelles de calcul – associativité, commutativité, distributivité – puisqu'elles induisent que

$$(a + bi) \oplus (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$$

et

$$(a+bi) \otimes (a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+a'b)i.$$

Pour ces raisons, la notation $a + bi$ confère aux couples (a, b) le statut de nombres appelés *nombres complexes*.

4.2.10 La division d'un nombre complexe par un autre

Activité 10

Dans l'univers des translations, on sait ce que signifie additionner ou soustraire des couples. On a également défini une multiplication de couples ou, ce qui revient au même, une multiplication de nombres complexes $a + bi$, en donnant un sens géométrique à cette opération. Comment pourrait-on définir le quotient entre deux nombres complexes et quel sens lui donner ?

La division d'un nombre complexe par un autre peut être vue comme la multiplication du premier par l'inverse du second, cet inverse étant associé d'entrée de jeu à la similitude réciproque de celle que modélise le nombre complexe diviseur. Il s'ensuit une définition algébrique de cette opération. La notion de complexe conjugué prend ici sa place.

4.2.11 Une catégorie privilégiée d'exercices

Les bases de la théorie des nombres complexes mises en place, quelques applications routinières seront utiles pour familiariser les élèves avec ces nombres et les techniques qui leur sont propres.

L'approche des nombres complexes, telle que proposée dans ce projet, se veut géométrique. Il nous paraissait légitime de "rentabiliser" cette approche en privilégiant une classe de problèmes proposée dans les programmes belges actuels : la démonstration de propriétés géométriques exploitant le nouveau formalisme développé. C'est par de telles activités que se clôt ce projet d'enseignement. Elles sont précédées d'une synthèse qui fait correspondre de telles écritures à des configurations géométriques clés, par exemple, la caractérisation d'un triangle équilatéral direct ABC (figure 1) au moyen de l'écriture

$$\frac{c-a}{b-a} = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \quad \text{(en abrégé : cis } 60^\circ\text{)}$$

ou celle d'un parallélogramme $ABCD$ (figure 2) par l'égalité (condition nécessaire) $c - d = b - a$; dans ces relations a, b, c, d sont des nombres complexes, respectivement affixes des points A, B, C, D dans le plan de Gauss.

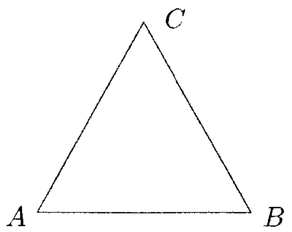


Figure 1

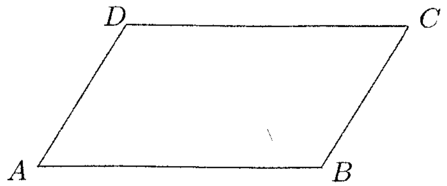
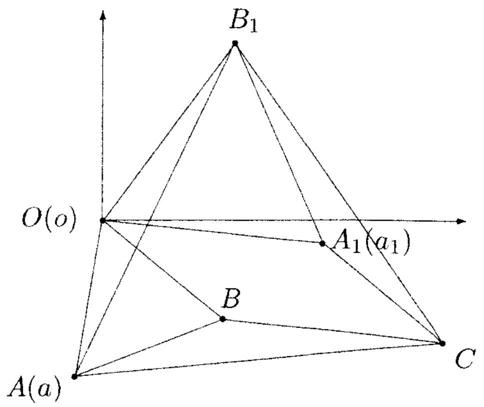


Figure 2

Voici un exemple de propriété démontrée à l'aide de ces configurations et sa traduction en termes de nombres complexes :

OAB et OA_1B_1 sont deux triangles équilatéraux de sens direct ayant un sommet commun O. On construit le parallélogramme $OBCA_1$. Montrez que le triangle ACB_1 est équilatéral et direct.



Dans un repère d'origine O et en notant l'affixe de chaque point par la lettre minuscule correspondante, l'énoncé peut se traduire sous forme d'hypothèses et thèse comme suit :

Hypothèses : $b = a \text{ cis } 60°$, $b_1 = a_1 \text{ cis } 60°$, $a_1 = c - b$.

Thèse : $b_1 - a = (c - a) \text{ cis } 60°$.

La démonstration devient alors une "simple" manipulation du formalisme utilisant les propriétés de calcul des nombres complexes.

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
(c-a) \text{ cis } 60° &= (b + a_1 - a) \text{ cis } 60° \\
&= (a \text{ cis } 60° + a_1 - a) \text{ cis } 60° \\
&= a \text{ cis } 120° - a \text{ cis } 60° + a_1 \text{ cis } 60° \\
&= a(\text{cis } 120° - \text{ cis } 60°) + b_1 \\
&= -a + b_1 \quad \text{car } \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin 120° = \sin 60°.
\end{aligned}
$$

Le lecteur trouvera au chapitre 6 un développement plus exhaustif concernant des activités géométriques utilisant les nombres complexes.

4.3 Observations recueillies

Le projet décrit à la section 4.2 a été testé à plusieurs reprises : cinq fois par H. Rosseel dans ses classes et une fois par quatre autres professeurs, au total neuf fois. Les réactions observées chez les élèves sont décrites à la section 4.3.1. Elles ont été recueillies par les professeurs eux-mêmes et ont le statut tantôt d'une impression globale sur l'avancement des élèves formulée par le professeur après le cours, tantôt d'une description des difficultés spécifiques lues dans les cahiers d'élèves ou les copies, tantôt de réactions écrites par les élèves à la suite d'un questionnaire.

Telles que collectées, ces observations n'ont aucune valeur statistique. Elles ne peuvent non plus être utilisées pour attester d'un quelconque caractère adidactique des activités. Elles se prêtent, par contre, à une analyse qualitative débouchant sur des hypothèses de recherche et des pistes d'action à approfondir que nous formulerons à la section 4.4.

Les réactions recueillies suite à l'expérimentation du projet ont été regroupées avec d'autres données :

- interviews ou réponses à un questionnaire d'élèves ayant eu un enseignement plus conventionnel des nombres complexes, en particulier la première approche brièvement décrite à la section 3.1.2 ;
- interviews ou réponses de professeurs stagiaires à un questionnaire.

Ces autres observations ont nourri notre interprétation des réactions d'élèves au projet. Dans le cadre limité de cet ouvrage, nous avons dû sélectionner les propos. Ceux-ci l'ont été de manière à représenter la variété des réactions et c'est de cette variété précisément que notre analyse tentera de rendre compte.

4.3.1 Réactions des élèves aux activités 6 à 9

Le rôle des activités 1 à 5 est de créer un milieu "géométrico-algébrique" propice pour donner sens à la théorie des nombres complexes. Les difficultés rencontrées par les élèves pour répondre aux questions posées sont diverses mais ne constituent pas vraiment un obstacle fondamental à l'apprentissage visé. A l'extrême, ces activités peuvent être remplacées par un exposé *ex cathedra*. Pour cette raison, les réactions qu'elles suscitent chez les élèves ne sont pas détaillées ici.

Nous nous attarderons plutôt à relever l'impact des activités 6 à 9 chez les élèves, après qu'ils aient intégré :

- le concept de similitude,
- son codage algébrique au moyen d'un couple (a, b), image de $(1, 0)$ par la similitude,
- l'opération entre couples qui exprime la composition de telles similitudes tant en termes de coordonnées cartésiennes qu'en termes de coordonnées polaires.

Quant à l'activité 10, elle n'a pu être expérimentée dans des classes, du moins comme activité de recherche, faute d'avoir été conçue en temps utile.

Réactions à l'activité 6

L'idée qu'il s'agit d'une multiplication ressort de manière évidente pour les couples de la forme $(a, 0)$. Mais plusieurs élèves font spontanément remarquer que, de plus, il est possible d'obtenir un tel couple au départ de couples n'ayant pas leur deuxième composante nulle. Une analyse de ces situations pourra s'avérer utile ultérieurement.

Vient ensuite l'idée d'assimiler les couples $(a, 0)$ aux réels : il est évident que les élèves n'ont pas cette initiative et que c'est le professeur qui prend la décision après avoir invoqué des raisons qui paraissent suffisantes pour le faire, à savoir que, lorsque la deuxième composante d'un couple est nulle, l'addition de couples et l'opération $\otimes$ agissent comme les opérations d'addition et de multiplication entre les réels que sont les premières composantes des couples. La seule information fournie par la deuxième composante (nulle) est de préciser que les couples en question forment une droite puisqu'ils représentent les points de l'axe des abscisses. Les élèves acceptent assez volontiers ce point de vue. En témoigne une réaction spontanée dans une classe où le projet a été proposé :

"Mais alors, les réels sont des cas particuliers de couples !"

Réactions aux activités 7 et 7_{bis}

Comme dit plus haut, les activités 7 et 7_{bis} constituent un changement de contrat par rapport aux activités précédentes : on passe, sans crier gare, d'une réflexion de type géométrique à la résolution algébrique d'équations ; qui plus est, la méthode proposée pour les résoudre est en opposition complète avec les règles de calcul enseignées jusqu'à présent. Cela risque donc de dérouter les élèves qui se demandent où on veut en venir.

Avec la lecture du texte de Bombelli, on veut évidemment faire réagir les élèves face aux écritures $\sqrt{-1}$, ... insensées à leurs yeux, en relevant aussi leurs autres questions et difficultés.

Nous leur avons posé la question suivante : "Acceptez-vous la méthode utilisée par Bombelli ?". Voici quelques exemples de réponses,

- d'élèves qui acceptent la méthode :

  (1) *"Cette méthode utilise dans ses calculs des nombres impossibles* $(\sqrt{-1})$; $\sqrt{-1}$ *se supprime à la fin, mais peut-on quand même l'utiliser ? J'accepte la méthode parce que la réponse qu'il obtient est solution de l'équation* $x^3 = 15x + 4$."

- d'élèves qui refusent la méthode :

(2) *"Un élément frappant, c'est le négatif en dessous des racines. Je n'accepte pas la méthode utilisée par Bombelli parce que je me demande si la méthode marche à chaque fois, le négatif en dessous des radicaux me paraît non logique."*

Pour l'activité 7_{bis}, nous avons également demandé aux élèves de se positionner par rapport à la méthode. Un vote à main levée mène à la conclusion qu'aucun élève n'accepte cette fois ; cependant quelques élèves s'abstiennent. Dans d'autres groupes, nous avons demandé aux élèves d'écrire leur avis. Leurs commentaires confirment ce que révèle le vote.

- Des oppositions nettes s'appuyant sur les acquis antérieurs, par exemple :

  (3) *"$\sqrt{-1}$ est maintenant même solution de l'équation. Alors que Bombelli le supprimait et obtenait comme réponse un nombre réel. Dans le cas présent, l'équation est fausse et l'obtention du $\sqrt{-1}$ pourrait signifier que c'est impossible."*

  (4) *"Je trouve la méthode fausse : le graphique de $x^2 + 1$ n'admet pas de racine, alors que d'après cette imitation, on en aurait deux ; de plus, on a de nouveau des racines carrées de nombres négatifs, ce qui est impossible."*

- Quelques avis plus nuancés qui vont dans le sens de l'élargissement de l'ensemble des nombres, par exemple :

  (5) *"Je ne trouve pas cela exact si on travaille dans le domaine des réels, sauf s'il existe des nombres irréels où $x = \pm\sqrt{-1}$."*

- Et enfin, un argument d'autorité qui semble convaincre son auteur :

  (6) *"Je suis d'accord avec ce raisonnement. La calculette permet de donner la valeur i pour $\sqrt{-1}$, donc $\sqrt{-1}$ existe."*

Réactions à l'activité 8

Si les deux activités précédentes constituaient un changement de contrat, il en va de même quand on propose l'activité 8 puisqu'on demande aux élèves de réfléchir géométriquement à une question qui, pour eux et par sa forme même, relève du numérique.

Dans une première version du projet, l'activité avait été proposée sans allusion explicite au caractère géométrique de la multiplication suggérée par l'écriture x^2 et s'énonçait comme suit :

En assimilant -1 *au couple* $(-1, 0)$, *résolvez l'équation* $x^2 = -1$.

Compte tenu des difficultés observées chez presque tous les élèves pour comprendre cet énoncé et afin d'éviter certaines erreurs peu porteuses de sens, nous avons aménagé la question en insistant davantage sur l'aspect géométrique de son interprétation. Mais, malgré les consignes données incitant à décoder l'opération de multiplication que sous-entend x^2 comme une multiplication de couples, l'activité demeure un obstacle difficile à franchir pour la plupart des élèves. En effet, rares sont ceux qui réagissent spontanément en identifiant x à un couple de réels bien que nous ayons rencontré de tels élèves lors de nos expérimentations.

Beaucoup restent dans la logique de l'activité précédente, dans la foulée de laquelle la question de l'activité 8 est posée, et décodent l'équation $x^2 = -1$ non en termes de couples ou de similitudes mais dans l'univers des nombres réels et de la résolution d'équations au sein de l'ensemble qu'ils forment.

Certains commencent à franchir l'obstacle en remplaçant -1 par le couple $(-1, 0)$ comme indiqué dans la consigne tout en reconnaissant la légitimité de cette substitution, en référence à ce qui a été vu avant (activité 6), et surtout en tentant d'écrire x autrement. Mais le choix pour x est maintes fois inadéquat, la tentation étant forte de substituer à x un couple de la forme $(a, 0)$ tout comme on le fait pour un nombre réel. Ceci les mène à une impasse, la même que celle qui les choquait dans l'activité 7_{bis}. En effet, $(a, 0) \otimes (a, 0)$ équivaut à $(a^2, 0)$ qui doit être égalé à $(-1, 0)$, ce qui conduit à l'égalité impossible $a^2 = -1$ puisque a est un réel.

Pour mettre les élèves sur la voie d'une solution plus adéquate, le professeur les invite à revoir les calculs faits dans l'activité 6 et rappelle qu'il est possible d'obtenir un couple de la forme $(a, 0)$ comme résultat de la multiplication entre deux couples dont la deuxième composante n'est pas nulle. En réexaminant ces calculs, certains élèves proposent d'emblée les solutions $(0, \pm 1)$ après avoir vérifié que $(0, \pm 1)^2 = (-1, 0)$.

D'autres assimilent x à un couple quelconque (a, b) et résolvent l'équation algébriquement ou géométriquement comme décrit ci-après.

Voici quelques exemples significatifs des résolutions proposées par les élèves, qui illustrent les propos précédents.

Solutions proposées à l'énoncé dans sa première version

(7) $$\left.\begin{array}{l} \text{“}x^2 = -1 \\ -1 \leftrightarrow (-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = (-1,0) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{(-1,0)} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1}.\text{”}$$

Cette proposition de résolution n'est plus apparue lorsque nous avons proposé le deuxième énoncé.

(8) “$(-1,0) \otimes (-1,0) = (1,0)$ *: ne va pas, donc j'essaie autre chose :* $(x,0) \leftrightarrow x$*, donc* $(x,0) \otimes (x,0) = (x^2,0)$ *; encore faux, je réessaie !*”

(9) “$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = (-1,0)$. *Par analogie :*

$$\begin{array}{c} (a,b) \otimes (a,b) \cong x^2 \\ \downarrow \\ \textit{plus ou moins “fois”} \end{array}$$

L'élève résout ensuite algébriquement en écrivant :

$$\begin{aligned} (a,b) \otimes (a,b) = (-1,0) \quad &\Leftrightarrow \quad (a^2-b^2, 2ab) = (-1,0) \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

et éprouve quelques difficultés à résoudre le système d'équations.

Plusieurs élèves utilisent la méthode de fausse position et trouvent les solutions par “tâtonnement” ; ainsi par exemple :

(10) $$\begin{array}{ccccccl} \text{“}x & \times & x & = (-1,0) & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ (0,1) & \times & (0,1) & = (-1,0) & \textit{donc } x = (0,1) \\ & & & \textit{ou} & & \\ (0,-1) & \times & (0,-1) & = (-1,0) & \textit{donc } x = (0,-1).\text{”} \end{array}$$

Quelques tentatives de résolutions géométriques sont fournies également, par exemple :

(11) “$(-1,0)$ *peut être assimilé à une composée d'une similitude par elle-même et, dans ce cas,* s_2 *de* $(-1,0) = -1$ *est égal à* s_1^2 *de la première similitude. Or, vu que la composée des similitudes est une homothétie, la première similitude est aussi une homothétie.*”

(12) "$(-1, 0) = (\cos 180°, \sin 180°)$ *ou* $(-1 \cos 0°, -1 \sin 0°)$ *et doit être la composée de deux similitudes. Soit* $\rho = 1$ *et* $\theta = 180°$ *ou* $\rho = -1$ *et* $\theta = 0°$ *; cette composée peut être assimilée soit à une homothétie de rapport* -1 *ou à une simple rotation de* $180°$. *En tenant compte de la rotation, les solutions sont* $(0, 1)$ *et* $(0, -1)$."

Ce commentaire est accompagné d'un dessin du cercle trigonométrique où l'élève indique les solutions.

Solutions proposées par des élèves ayant eu l'énoncé dans sa version actuelle

(13) "$x^2 = -1$ *: quel sens donner à* x^2 *et à* -1 *?*
$x \cdot x = 1 \cdot 1 \cdot \boxed{-\,?}$
si $aa' = 0$, *alors* $(a, b) \otimes (a', b') = (-bb', 0)$
$a' = a$ *et* $b' = b$, *donc* $(a, b)^2 = (a^2 - b^2, 2ab)$ *: pour obtenir* $(-1, 0)$, *il faut* $a = 0$ *et* $b = \pm 1$ *: les solutions sont donc* $x = (0, \pm 1)$."

(14) "*Solutions :* $x = (0, 1)$ *ou* $x = (0, -1)$, *rotations de* $\pm 90°$ *par rapport à* $(1, 0)$."

Un élève, qui traite la question géométriquement, conclut en écrivant :

(15) "*En termes de similitudes, les solutions sont pour* x *les couples* $(0, 1)$ *et* $(0, -1)$ *mais en termes algébriques, il n'y a pas de solutions.*"

Réactions à l'activité 9

Après avoir complété le tableau de composition des symboles $1, -1, i$ et $-i$; les élèves utilisent le plus souvent le même procédé que celui qu'ils ont mis en oeuvre pour répondre à la deuxième question de l'activité 8, soit algébriquement en résolvant un système d'équations, soit géométriquement en cherchant les similitudes qui, composées avec elles-mêmes, amènent le couple $(1, 0)$ sur le couple de la forme $(a, 0)$ associé au nombre négatif donné $(-25, -\sqrt{3}, \ldots)$. Cependant, plusieurs élèves procèdent spontanément en utilisant les résultats du tableau qu'ils viennent de compléter et écrivent, par exemple,

$$\begin{aligned} x^2 = -25 &\Leftrightarrow x^2 = 25i^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = (\pm 5i)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 5i. \end{aligned}$$

Pour ces élèves, l'opération $\otimes$ semble, à ce stade, décodée comme une opération banale de multiplication entre des nombres. La confrontation des diverses méthodes utilisées fait apparaître l'écriture "en ai" comme procédure calculatoire commode et, dès lors, met en évidence l'intérêt de s'exprimer en termes de "nombres". Dans la foulée, on décide que l'écriture $\sqrt{-1}$ sera désormais interdite et remplacée par i.

Après la mise en place de l'écriture algébrique $a+bi$, les élèves sont invités à résoudre les équations $x^2 = i$ et $x^3 = -1$.

Pour résoudre l'équation $x^2 = i$, quelques élèves sont tentés d'écrire $x = \pm\sqrt{i}$: c'est l'occasion de signaler que le symbole $\sqrt{\ }$ est réservé aux nombres réels positifs uniquement. Cette mise au point faite, nous laissons aux élèves le choix de la méthode pour résoudre cette équation. Cependant, si la résolution peut se traiter sans trop de difficultés par l'algèbre, cela se complique lorsque l'on généralise à des équations de la forme $x^n = a$ telle que l'équation $x^3 = -1$ et, pour ces dernières, la méthode géométrique est plus avantageuse.

Ainsi, les questions qui sont posées dans l'activité 9 amènent progressivement les élèves à choisir les méthodes les plus pertinentes et les obligent à jouer sur les divers aspects développés par les activités pour asseoir la théorie des nombres complexes.

Pour la résolution de l'équation $x^3 = -1$, bon nombre d'élèves oublient la solution réelle. De plus, aucun d'entre eux ne pense à décomposer $x^3 + 1$ en facteurs. Cette dernière méthode accentue la banalisation des opérations avec les nombres complexes déjà signalée plus haut et met en avant le fait que l'ensemble des complexes prolonge l'ensemble des réels sans contredire la théorie établie à propos de ces derniers.

4.3.2 Réactions globales des élèves au projet

Une fois le projet d'enseignement expérimenté, nous avons tenté de cerner la représentation mentale des nombres complexes induite par ce projet dans le chef des élèves. Nous leur avons posé les questions suivantes :

> 1) Décrivez en $\pm$ 10 lignes ce qu'évoque pour vous la notion de nombre complexe.
> 2) Pour vous, les nombres complexes sont-ils des nombres à part entière ? Expliquez pourquoi.
> 3) Dans l'écriture "$a + bi$", quelle signification donnez-vous à la lettre i ? S'agit-il d'un nombre ? Expliquez !
> 4) Quel intérêt y a-t-il à avoir inventé les nombres complexes ?

Voici quelques réponses révélatrices de la variété observée, classées de manière à faire apparaître celle-ci.

- Ce que les élèves ont perçu de manière globale :

(16) *"La notion de nombre complexe est extrêmement novatrice en ce sens qu'elle attribue un couple de nombres à chaque réel : ceci met en évidence la flexibilité des mathématiques face à des opérations plus complexes. Elle rend aussi parfaitement compte des transformations du plan, ce qui aide à mieux comprendre les fondements mêmes des opérations mathématiques."*

(17) *"C'est un nombre qui sort de l'ensemble des réels, un nombre qui ne s'écrit pas rien qu'avec des chiffres. Il permet de donner des réponses aux équations qu'on nous avait annoncées jusqu'ici impossibles. Les nombres complexes sont plus performants que les vecteurs dans les démonstrations géométriques car on gagne beaucoup en écriture. Un nombre complexe est défini par deux transformations : une translation* (l'élève a-t-il voulu dire homothétie ?) *et une rotation."*

- S'agit-il de nombres ?

  a) Des avis nuancés reposant sur des acquis anciens, par exemple :

  (18) *"Oui et non. Non car, jusqu'ici, pour nous, un nombre signifiait une suite de chiffres. Or un nombre complexe s'écrit sous forme $a + bi$ et i n'est pas un chiffre. Oui, car les nombres complexes englobent toutes les autres familles de nombres : tout nombre est un nombre complexe. Si on adopte ce point de vue, il s'agit bien de nombres à part entière."*

b) Des arguments structurels ou algébriques pour accepter l'idée qu'il s'agit de nombres, par exemple :

(19) *"Oui, mais pour admettre leur existence et leur utilité, il faut accepter que notre vision des choses est limitée puisqu'on ajoute une dimension (y) mais l'on pourrait encore en rajouter une (z). Donc, ils sont des nombres à part entière dans le sens où ils ont l'air plus de s'ajouter à la théorie ancienne plutôt que de la compléter ou de l'expliquer mieux."*

(20) *"Ceux-ci s'inscrivent dans la suite logique des nombres réels. En effet, ils répondent à des lacunes que l'on rencontre au niveau des nombres réels, telles la difficulté de calcul de valeurs précises de racines $n^{èmes}$, difficultés de factorisation, ... Cela dit, ils ont la spécificité de représenter à eux seuls les couples de nombres."*

c) Des arguments essentiellement géométriques pour refuser le concept de nombre, par exemple :

(21) *"Non, ils représentent des couples de nombres. Chaque nombre complexe représente le résultat d'une opération effectuée (une similitude) sur un réel a. Il s'agit donc d'une transformation, non pas d'une valeur mathématique : ils ne sont donc pas des nombres."*

(22) *"Non, ils me paraissent irréels, ils sont issus de transformations du plan qui, elles, sont parfaitement imaginables, mais je ne parviens pas à cerner le rapport qu'il y aurait entre ces nombres et ces transformations."*

- Comment les élèves perçoivent "i" ?

a) Comme un objet insensé, par exemple :

(23) *"Le i ne signifie rien tout seul mais il prend tout son sens lorsqu'il est mis au carré ou multiplié à un autre nombre : i, c'est racine carrée de -1 et comme $\sqrt{-1}$ ne peut pas s'écrire dans un calcul, i sert à contourner l'interdit."*

b) Comme un signe de reconnaissance d'un nombre complexe, par exemple :

(24) *"Tout nombre complexe est accompagné de la lettre i et donc le i n'est pas vraiment un nombre mais plutôt une indication nous aidant à bien repérer l'ensemble dans lequel on travaille. Par exemple, $3 + 7 = 10$ mais $3 + 7i$ est la coordonnée d'un point dans le repère de Gauss."*

c) Comme solution d'une équation :

(25) *"La lettre i est un nombre complexe, c'est la solution* $(0, 1)$ *de l'équation* $x^2 = -1$. *Elle représente la partie imaginaire du nombre complexe."*

d) Comme représentant d'une similitude :

(26) *"i est un nombre imaginaire dont le carré vaut* -1 *; géométriquement, c'est une similitude qui, composée avec elle-même donne le couple de point* $(-1, 0)$.

- Ce que les élèves pensent de l'apport des nombres complexes :

(27) *"J'y vois deux atouts majeurs : d'une part, pouvoir factoriser des expressions algébriques à une variable qui ne peuvent s'annuler dans* $\mathbb{R}$ *; d'autre part, pouvoir résoudre des problèmes géométriques par l'algèbre et sans connaissance de formules (tel qu'en géométrie analytique)."*

(28) *"Cela simplifie énormément les démonstrations géométriques dans lesquelles on devait utiliser les écritures vectorielles et toutes les équations sont solubles."*

(29) *"Apparemment, pour résoudre des équations et pour augmenter le nombre de solutions de ces équations. La théorie des nombres complexes est logique mais a-t-elle vraiment un intérêt car on dirait qu'elle se base sur des choses qu'elle est plutôt censée déterminer. Est-elle vraiment utile ? Est-on obligé de trouver des solutions pour des équations insolubles ? Et est-ce qu'on aurait pu trouver une autre théorie des nombres complexes se basant sur autre chose que le plan pour trouver d'autres solutions à ces équations ?"*

4.4 Analyse

4.4.1 Du géométrique à l'algébrique : un fossé qui demeure

Au travers des activités 7 et 8, le projet contient une dimension algébrique en posant la question de la résolution d'équations non solubles dans l'ensemble des réels. Comme le montrent les réactions des élèves, d'une part, à ces activités (propos 1 à 15), d'autre part, à l'ensemble du projet (propos 16 à 29), le passage du géométrique à l'algébrique ne va pas de soi. Bien sûr, nous avons rencontré des élèves qui parviennent d'eux-mêmes à résoudre l'équation $x^2 = -1$ en termes de couples et cela n'est pas banal, nous semble-t-il.

Mais nous avons pu observer la difficulté des autres à identifier x à un couple de réels dont la deuxième composante n'est pas nulle même lorsque la consigne était de nature à suggérer un travail par couples. Evidemment, cette incursion de l'algébrique dans une réflexion de nature géométrique correspond à un changement de contrat assez brutal. Mais ces observations corroborent également la difficulté, décrite plus haut, qu'ont les élèves à décoder d'une manière inhabituelle une expression algébrique connue. D'autant que, à ce stade, les couples dont la deuxième composante n'est pas nulle n'ont pas encore le statut de nombres, pas plus que les couples qui sont des codages algébriques de similitudes. A cet égard, il est significatif qu'un élève puisse résoudre correctement l'équation de manière géométrique tout en affirmant qu'il n'y a pas de solution algébrique (propos 15).

D'une manière plus globale, les réactions recueillies (propos 18 à 22) montrent la difficulté à parler "nombre" dans un univers géométrique et le fossé entre ce dernier et l'univers algébrique reste infranchissable pour certains élèves. La référence à la représentation graphique de la fonction $y = x^2 + 1$ (propos 4) n'arrange évidemment rien.

Dans ce projet, nous avons prévu d'octroyer aux couples le statut de nombres à la suite de l'activité 9 qui montre qu'ils se prêtent à des opérations semblables à celles des autres nombres, nous inspirant de ce point de vue des travaux de N. et G. Brousseau (1987) sur les rationnels et les décimaux à l'école élémentaire.

4.4.2 En guise de conclusion : changer la posture des élèves vis-à-vis des mathématiques

On peut imaginer un projet plus extrême : éviter l'obstacle décrit ici en travaillant exclusivement le codage algébrique de similitudes, éviter le mot "nombre", ne pas parler d'équations et modéliser les transformations et figures géométriques avec des notations légèrement différentes (éviter la lettre x, par exemple). Bien sûr, on perdrait un type d'exercices : la résolution d'équations mais il ne semble pas que ce soit là un créneau d'applications si intéressant des nombres complexes, du moins pour des "utilisateurs" de mathématiques. Pour eux, en effet, le véritable intérêt de ces nombres est ailleurs : concision d'écriture grâce entre autres à la notation exponentielle, modélisation de mouvements vibratoires, recherche de primitives facilitée par l'extension complexe de la fonction, étude de stabilité des équilibres de systèmes, en mécanique par exemple, ...

Le choix d'un tel projet extrême n'est pas le nôtre. Comme la plupart des professeurs du secondaire, nous sommes sensibles au fait que la résolution d'équations a été l'origine historique des nombres complexes. Mais nous ne le sommes pas moins à une autre réalité historique : à savoir que la question des équations constitue la phase initiale de l'histoire, celle où on utilise l'outil sans pouvoir lui donner un sens "concret", et que cette phase est suivie d'une autre pendant laquelle les mathématiciens n'ont de cesse de chercher à sortir les complexes d'un univers chimérique. Aussi, en raison du malaise observé chez les élèves, pensons-nous utile de ne pas suivre le cours de l'histoire et de commencer par des aspects géométriques des nombres complexes pour terminer par la résolution d'équations.

Ce scénario bouleverse les pratiques enseignantes et, lors des formations continuées, nous avons entendu des réactions telles que : "Cette manière de faire ne simplifie pas l'exposé sur les nombres complexes et ne rend pas les élèves plus habiles dans l'utilisation des calculs ; *a posteriori*, certains se demandent pourquoi il faut faire un tel détour pour mettre en place les techniques de calcul des nombres complexes.". Bien sûr, sans rentabiliser l'approche par d'autres exercices que la résolution d'équations, des démonstrations géométriques par exemple, nous pensons effectivement que l'investissement est lourd !

D'autres professeurs voient dans ce projet un intérêt "parallèle" : le réinvestissement de la trigonométrie et l'approfondissement des transformations du plan, l'approche des coordonnées polaires ou encore l'entraînement des élèves à résoudre des problèmes.

Quant à nous, tout bien considéré, la visée du projet se situe ailleurs, à savoir dans un changement de posture de plusieurs élèves vis-à-vis des mathématiques : accepter de voir les écritures symboliques comme un outil de pensée et s'interroger sur le sens des concepts mathématiques et des mots qui les désignent, au-delà de toute injonction autoritaire du professeur. Nous pensons là à *l'intention scripturale* et à *l'intention rationnelle* dont parle B. Rey (1996) et que ne renierait pas la théorie des situations didactiques de G. Brousseau (1998). Et nous avons bien le sentiment qu'il s'est passé quelque chose de cet ordre-là dans les classes dont les professeurs étaient convaincus de la portée épistémologique du projet. Notons qu'il ne s'agit là que d'une impression personnelle, non falsifiable et qu'il est en outre difficile d'interpréter. S'agit-il là d'un effet heureux du *contrat expérimental* au sens de M.-L. Schubauer-Leoni (1988) qui joue dès que le cours s'inscrit dans cet événement qu'est une expérience didactique ou ce fait signifie-t-il le *mimétisme cognitif* du professeur par les élèves dont B. Rey (1996) souligne l'importance dans le développement des intentions scripturale et rationnelle ?

Le présent travail ne constitue qu'un premier débroussaillement du problème didactique soulevé par l'approche des nombres complexes. Les hypothèses avancées sur les difficultés d'apprentissage ne demandent qu'à être étayées davantage, par une analyse plus pointue et par la mise à l'épreuve de ces hypothèses au moyen de méthodes appropriées (des questionnaires construits à cet effet par exemple).

Par ailleurs, l'expérience faite soulève des questions dignes d'intérêt pour la recherche. Tout d'abord, elle illustre une des facettes de ce que M. Bosch et Y. Chevallard (1999) appellent significativement "la sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs". En particulier, elle montre, dans le cas précis des nombres complexes, les difficultés soulevées par les ostensifs dont l'écriture est unique mais dont les sens associés sont multiples et fort variables d'un contexte à l'autre. Elle illustre également l'intérêt de retravailler plus profondément le sens de ces ostensifs chaque fois que l'on change de contexte.

Cette expérience soulève aussi une question liée à l'ingénierie curriculaire qui est celle d'une certaine "dynamique des praxéologies mathématiques". Celle-ci se traduit par une adéquation aux types de tâches proposées des techniques étudiées et du discours technologique qui les valide et, en retour, par une rentabilité des techniques et technologies dans l'accomplissement des tâches. Comme dit plus haut, l'approche présente des nombres complexes ne peut être "rentabilisée" par la résolution d'équations. Elle peut l'être, par contre, par une résolution calculatoire de problèmes géométriques, les complexes apportant un formalisme complémentaire très efficace au calcul vectoriel. Mais cela suppose, en Belgique, de changer les habitudes didactiques en la matière, dans le sens illustré par M. Ballieu et M.-F. Guissard (2002).

Enfin, ce travail relance le débat des phénomènes didactiques et des apprentissages liés à une approche tantôt plus formaliste, tantôt plus intuitionniste. De ce point de vue, l'approche des nombres complexes proposée ici permettrait aux étudiants universitaires de se positionner dans ce débat ou tout simplement de se repositionner par rapport au sens des ostensifs mathématiques que ce soit dans le cadre d'une transition "secondaire-université" pensée autrement que sur le mode de "colmatage des brèches" ou dans le cadre d'une formation des futurs professeurs.

Et sans doute que vous ne manquerez pas d'y voir d'autres questions ...