Nombre complexes: Aspect trigonométrique

BOUOPDA FRANCIS

Sous l'encadrement de

Pr.Christophe MOUAHA (Maitre de Conférences)

Dr.Siméon FOTSO (Chargé de Cours)

Mr.ADJABA BIWOLI JEAN PIERRE(IPN/MATHS)

Et de Mr.TCHOKONA DONATIEN(PLEG)

Yaoundé, le 1er janvier 2001

Chapitre 2

NOMBRES COMPLEXES : ASPECT TRIGONOMETRIQUE

2.1 Présentation de la ressource

Objectif pédagogique général de la ressource

Cette ressource vise permet à l'élève de résoudre des problèmes faisant appel aux aspects trigonométriques des nombres complexes.

Objectifs pédagogiques spécifiques

A la fin de cette ressource l'élève doit être capable de :

– déterminer l'argument d'un produit et d'un rapport de deux nombres complexes;
– de passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à la forme trigonométrique et vice versa;
– d'énoncer la formule de Moivre et de l'utiliser pour déterminer les racines nième de l'unité, linéariser dans $\mathbb{C}$... ;
– utiliser et exploiter diverses formules trigonométriques pour la résolution des problèmes;
– déterminer, interpréter et utiliser les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Liens avec les autres parties du programme

Les parties du programme ayant un lien avec cette ressource sont :

- la trigonométrie;
- le calcul des primitives et l'intégration;
- les isométries et les similitudes du plan.

Les apports de la ressource à ces parties sont :

- la formule de Moivre permet de montrer les formules trigonométriques ;
- la linéarisations permet de calculer les intégrales de la forme $\int(a\cos^n x+b\sin^m x)dx$ $n, m \in \mathbb{N}; a, b, x \in \mathbb{R};$
- elle permet de calculer le rapport et l'argument d'une similitude (isométrie) et plus encore, elle permet de trouver facilement l'expression analytique d'une application affine.

Pré-requis

Pour mieux aborder cette ressource, il est conseillé à l'élève d'être familiarisé avec, les notions de structures algébriques, les formules usuelles de trigonométrie, et de maitriser parfaitement l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Introduction et Historique(voir [6])

Au XVI siècle, les mathématiciens italiens Jérôme Cardan et Raffaele Bombelli ont introduit des nombres "imaginaires" ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré. Deux siècles plus tard, Leonhard Euler et Jean le Rond d'Alembert ont parachevé la création des nombres complexes et fixé les notations actuelles, en particulier celle du nombre i. Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi dans d'autres sciences comme la physique.

2.2 Aspect trigonométrique d'un nombre complexe

2.2.1 Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Activité 2.1.

Soit $z = \sqrt{3} + i$ un nombre complexe, a et b désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z.

1. Déterminer a et b.
2. Calculer le module de z. On le note $|z|$.

3. Déduire l'existence d'un θ appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$. Le réel θ est appelé argument de z.
4. Ecrire z en fonction de θ et de $|z|$. Cette forme est appelée forme trigonométrique de z.
5. Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, écrire z sous forme trigonométrique.

Solution.

1. – La partie réelle de z est: a=$\sqrt{3}$
   – La partie imaginaire de z est : b=1
2. Calculons la valeur $|z|$:

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{a^2+b^2}\\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\\ &= 2\end{aligned}$$

3. Cherchons $\theta \in \mathbb{R} \;/ \cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$.

$$\begin{aligned}2 = \sqrt{3+1} &\Rightarrow (2)^2 = 3+1\\ &\Rightarrow 1 = \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\\ &\Rightarrow 1 = (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\tfrac{1}{2})^2\\ &\Rightarrow 1 = (\cos\tfrac{\pi}{6})^2+(\sin\tfrac{\pi}{6})^2\end{aligned}$$

Prendre $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\begin{cases}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{1}{2}\end{cases}$

4. $z = \sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

5. $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 = |z|^2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \tfrac{a^2}{|z|^2}+\tfrac{b^2}{|z|^2} = 1\\ &\Leftrightarrow (\tfrac{a}{|z|})^2+(\tfrac{b}{|z|})^2 = 1\end{aligned}$$

Il existe $\theta \in \mathbb{R}/ \begin{cases}\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|}\end{cases} \Leftrightarrow z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

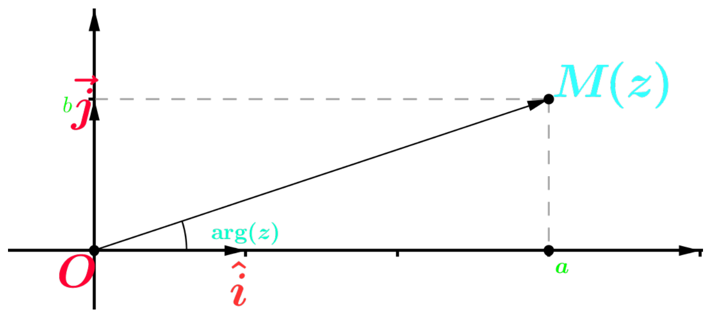
Activité 2.2.

Soient M,N les points du plan d'affixes respectives z = $\sqrt{3}+i$, $z_1 = 1$

1. Placer les points O, N et M dans le plan P.
2. Calculer d(O,M) et $|z|$ et Comparer d(O,M) et $|z|$.
3. Calculer $\cos\theta$, $\sin\theta$ où $\theta = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ et comparer $\arg z$ et θ.
4. Exprimer z en fonction de $|z|$ et θ. Cette forme est appelée forme trigonométrique de z.
5. Donner une interprétation géométrique de l'argument d'un nombre complexe non nul z.

Définition 2.1.

Soit z = a+ib un nombre complexe non nul et M un point d'affixe z. On appelle argument de z toute mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.



Remarque 2.1.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul, si θ est un argument de z et $|z|$ le module de z alors : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

Définition 2.2.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, z s'écrit en fonction de son module ($|z|$) et θ, où θ est un argument de z.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{2.1}$$

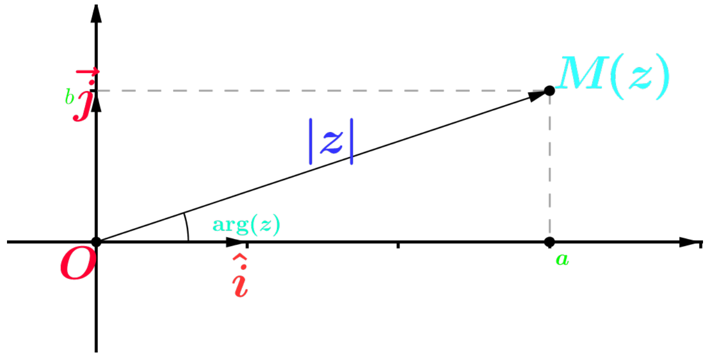
On dit alors que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est écrit sous forme trigonométrique.

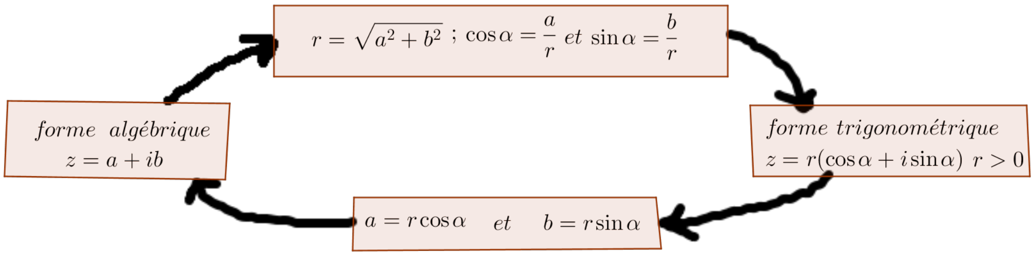
Notation

Soit $z \in \mathbb{C}$, z=$|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\cos\theta + i\sin\theta$ se note $e^{i\theta}$ et est appelée fonction exponentielle. z s'écrit alors

$$z = |z|e^{i\theta} \tag{2.2}$$

Cette forme est appelée la forme exponentielle de z.





Propriété 2.1.

Soient $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes non nuls.

1. Si z=r$(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec r>0 alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta[2\pi]$
2. Si z=z' alors $|z| = |z'|$ et $\theta = \theta' + 2k\pi(k \in \mathbb{Z})$

Exemple 2.1.

Calculer le module, un argument, écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 2 + 2i$; $z_3 = -1 - i$; $\overline{z_1}$.

a. $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos\arg(z_1) = \frac{1}{2} \\ \sin\arg(z_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \arg(z_1) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. $z_2 = 2 + 2i$

$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\arg(z_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\arg(z_2) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \arg(z_2) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c. $z_3 = -1 + i$

$|z_3| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\arg(z_3) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\arg(z_3) = \frac{\sqrt{1}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \arg(z_3) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$z_3 = |\sqrt{2}|(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2.2.2 Argument des nombres complexes particuliers

Activité 2.3.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et z, z', g les complexes définis par : $z = a + ia$, $z' = ib$ et $g = c$. Soient M,N,P les points d'affixes respectives z, z' et g.

i. Placer les points M,N et P dans le plan $\mathcal{P}$.

ii. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z, z' et g.

iii. Soient $M', N'etP'$ les points d'affixes respectives $\overline{z}$, $\overline{z'}$ et $-g$.

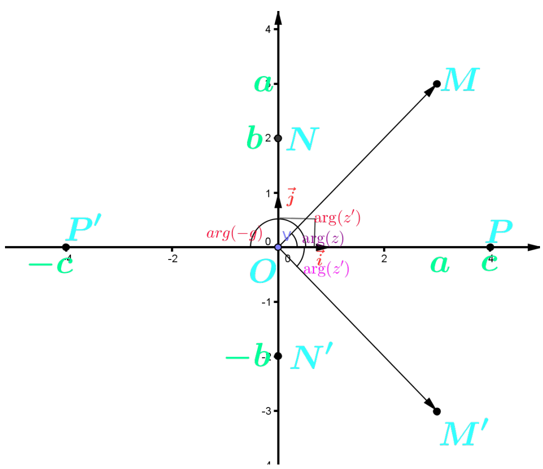
   a. Placer $M', N'etP'$ dans le plan $\mathcal{P}$.

   b. En déduire le module et l'argument de $\overline{z}$, $\overline{z'}$ et $\overline{g}$.

iv. Quelle relation existe-t-il entre l'argument de z et l'argument de $\overline{z}$.

Solution.

i.



ii. a Calculons le module de z, z' et g.

$|z| = \sqrt{a^2 + a^2} = |a|\sqrt{2}$

$|z'| = \sqrt{b^2 + 0^2} = |b|$

$|g| = \sqrt{c^2} = |c|$

b Calculons un argument de z, z' et g.

$\arg(z) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(z') = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\arg(g) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP}}) = 0 + k\pi$

iii. $\arg(\overline{z}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM'}}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$\arg(\overline{z'}) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{ON'}}) = -\frac{\pi}{2} + k\pi$

$\arg(-g) = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OP'}}) = \pi + k\pi$

iv. Nous constatons que $\arg(z) = -\arg(\overline{z})[2\pi]$

Propriété 2.2.

Soit z un nombre complexe ;

1. z est un nombre réel non nul, si et seulement si $\arg(z) = 0 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
2. z est un nombre réel non nul, strictement positif si et seulement si $\arg(z) = 0 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
3. z est un nombre réel non nul, strictement négatif si et seulement si $\arg(z) = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
4. z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
5. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)[2\pi]$.

Exercice d'application 2.1.

Soit i le complexe imaginaire pur tel que $i^2 = -1$.

a) Calculer le module et un argument de i.

b) Mettre le complexe i sous la forme trigonométrique.

c) Calculer i^n, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire la somme $S = \sum\limits_{k=0}^{n} i^k$.

e) Simplifier les expressions suivantes :

i $I = i^{100000}$

ii $J = i^{23000004}$

iii $K = i^{100000} + i^{23000004}$

iv $L = i^{5000000} + i^{7896543} + i^{41236}$

2.2.3 Exercices d'entrainement

2.a Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) $3i$

b) $2+\sqrt{3}i$

c) -4

d) $\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

2.b Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $(2+2i)(1-i)$

b) $\frac{-2+i\sqrt{3}}{1+3i}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{1+2i}$

d) $(-1-i)^4$

2.c Placer dans le plan complexe les points d'affixes suivants :

a) $z=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z=3e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $z=1+e^{-i\frac{\pi}{6}}$

d) $z=e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.d Soit $z_1=1+i$ et $z_2=1+i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b) Écrire sous forme algébrique et sous forme trigonométrique le produit z_1z_2.

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

2.3 Formule de Moivre et applications

2.3.1 Formule de Moivre

Activité 2.4.

Cette activité a pour objectif d'énoncer et de montrer la formule de Moivre.

Considérons la fonction :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

1. Montrer que $f(\theta+\theta') = f(\theta)f(\theta')$
2. En déduire que $f(2\theta) = (f(\theta))^2$
3. Montrer que $\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$
4. En utilisant la question 1), montrer que $f(n\theta) = (f(\theta))^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $f(n\theta) = (f(\theta))^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n.
6. En utilisant la question précédente, déterminer l'expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.
7. En déduire la formule de Moivre c'est-à-dire $f(n\theta) = f(\theta)^n \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. $$\begin{aligned} f(\theta+\theta') &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' \\ &= \cos\theta'(\cos\theta + i\sin\theta) - \sin\theta'(\sin\theta - i\cos\theta) \\ &= \cos\theta'(\cos\theta + i\sin\theta) + i^2\sin\theta'(\sin\theta - i\cos\theta) \\ &= \cos\theta'(\cos\theta + i\sin\theta) + i\sin\theta'(i\sin\theta - i^2\cos\theta) \\ &= \cos\theta'(\cos\theta + i\sin\theta) + i\sin\theta'(i\sin\theta + \cos\theta) \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= f(\theta)f(\theta') \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} f(2\theta) &= f(\theta+\theta) \text{ d'après la question 1.) avec } \theta=\theta' \\ &= f(\theta)f(\theta) \\ &= f(\theta)^2 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} f(2\theta) &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

   Donc
   $$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

4. $$\begin{aligned} f(n\theta) &= f(\theta + (n-1)\theta) \\ &= f(\theta) f((n-1)\theta) \\ &= f(\theta) f(\theta) f((n-2)\theta) \\ &= \underbrace{f(\theta) \times ... \times f(\theta)}_{nfois} \\ &= f(\theta)^n \end{aligned}$$

5. Désignons par P(n) cette propriété.

   Pour n=1 $(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos 1\theta + i \sin 1\theta$

   D'où P(1) est vraie

   Supposons que $\forall k < n$ p(k) est vraie et montrons que P(n) est aussi vraie.

   En effet

   $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$

   $= (\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$ (hypothèse de récurrence)

   $= \cos(n-1)\theta\cos\theta + i\cos(n-1)\theta\sin\theta + i\sin(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta$

   $= \cos((n-1)\theta + \theta) + i\sin((n-1)\theta + \theta)$

   $= \cos n\theta + i \sin n\theta$

   D'où P(n) est aussi vraie

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

6. $(\cos n\theta + i\sin n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

   $= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k}$ (D'après la formule du Binôme de Newton)

   Donc $\begin{cases} \cos n\theta = Re(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k}) \\ \sin n\theta = Im(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (\cos\theta)^k (i\sin\theta)^{n-k}) \end{cases}$

7. Soit n$\in \mathbb{Z}^-$, -n$\in \mathbb{N}$

   $$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^n &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}} \\ &= \frac{1}{\cos -n\theta + i\sin -n\theta} \\ &= \frac{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{(\cos -n\theta + i\sin -n\theta)(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \\ &= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta - i\sin\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta + \sin^2 n\theta} \\ &= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta} \end{aligned}$$

$$= \cos n\theta + i \sin n\theta$$

Il en résulte que : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2.3. *(Formule de Moivre)*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Proposition 2.1.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} \cos n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} \\ \sin n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i} \end{cases}$

Corollaire 2.1. *(Formule d'Euler)*

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

2.3.2 Module et argument d'un produit (rapport) de nombres complexes

Activité 2.5.

Soit $z = re^{i\alpha} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $z' = r'e^{i\alpha'} = r'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$ deux nombres complexes non nul.

1. Prouver que $zz' = rr'(\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha'))$.
2. En déduire $|zz'|$ et $\arg(zz')$.
3. Écrire $\frac{1}{z}$; $\;-z$; $\;\overline{z}$ sous la forme trigonométrique.
4. En déduire le module et un argument de $\frac{1}{z}$; $\;-z$; $\;\overline{z}$.
5. En utilisant la formule de Moivre déterminer le module et un argument de z^n.
6. Écrire $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique avec $z' \in \mathbb{C}^*$.
7. En déduire le module et un argument de $\frac{z}{z'}$.

Solution.

1. $zz' = re^{i\alpha}r'e^{i\alpha'} = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$ (d'après l'activité précédente)
2. $zz' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$ avec $rr' > 0$

   Donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \alpha + \alpha'$
3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\alpha}} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha} = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ $\quad$ On fait de même pour les autres.
4. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{r}$ et $\arg\frac{1}{z}$

5. Nous pouvons déduire d'après la formule de Moivre que $|z^n| = |r^n|$ et $\arg z^n = n\alpha$
6. $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\alpha}}{r'e^{i\alpha'}} = \frac{r}{r'}e^{i\alpha}e^{-i\alpha'} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$
7. $|\frac{z}{z'}| = \frac{r}{r'}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \alpha - \alpha'$

Propriété 2.4.

$\forall z,\ z' \in \mathbb{C}^*$

1. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$
3. $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
4. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
5. $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$
6. $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$

2.3.3 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Etant donné un nombre complexe Z et un entier naturel non nul n, le but de cette partie est de déterminer des nombres complexes z tels que $z^n = Z$

Activité 2.6.

Soit Z un nombre complexe non nul.

1. Vérifier que $(1+i)^2 = 2i$. On dit que 1+i est une racine carrée de $2i$.
2. Trouver une autre racine carrée de 2i.
3. On se donne l'équation $(E) : z^2 = Z$. Nous nous proposons de chercher $z \in \mathbb{C}^*$ telle que z vérifie (E).
   (a) Mettre z et Z sous forme trigonométrique.
   (b) En utilisant la formule de Moivre mettre z^2 sous forme trigonométrique.
   (c) Remplacer z et Z par leurs expressions dans (E).
   (d) Résoudre (E).

Solution.

1. $(1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = 2i)$.

2. On remarque que : $(-1-i)^2 = 1+2i-1 = 2i$.

   Donc l'autre racine de 2i est -1-i.

3. (a) Z=$|Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et z=$|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\alpha = \arg z$ et $\theta = \arg Z$.

   (b) $z^2 = (|z|(\cos\alpha + i\sin\alpha))^2$.

   $=|z|^2(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$.

   $=|z|^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$.

   $=|Z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

   (c) Comme $|z|^2, |z| > 0$ Par identification on'a :
   $$\begin{cases} |z|^2 = |Z| \\ \cos 2\alpha = \cos\theta \\ \sin 2\alpha = \sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{|Z|} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi \quad k \in \{0,1\} \end{cases}$$
   Donc

   $S = \{\sqrt{|Z|}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta)}{2}, \sqrt{|Z|}(\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\theta)}{2}+\pi)\}$

Proposition 2.2.

Soient z et Z deux nombres complexes non nuls, z est une racine carrée de Z si et seulement si $z^2 = Z$.

Activité 2.7.

Soit Z=a+ib un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cet activité est de trouver des nombres complexes z tels que $z^n = a + ib$.

1. Supposons que $a + ib = 1$ (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité)
2. Supposons que $a + ib = 1 + i$ (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de 1+i)
3. Trouver z tel que $z^n = a + ib$ avec $n > 1$. (rechercher les racines $n^{\text{ième}}$ de a+ib)

Solution.

1. Premier cas $z^n = 1$

   Posons $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \Longrightarrow z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$

   Par identification :
   $$\begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta = 2k\pi \quad k \in \{0,1,...,n-1\} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0,1,...,n-1\} \end{cases}$$
   Les racines nième de l'unité sont les $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0,1,...,n-1\}$

2. Deuxième cas on fait de même comme dans le premier cas.

3. Cas général

   Nous savons que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

   Or $z^n = Z$ d'où $z^n = |Z|(\cos(\arg Z) + i\sin(\arg Z))$

   Par identification on a :
$$\begin{cases} |z|^n = |Z| \\ \cos n\theta = \cos(\arg Z) \\ \sin n\theta = \sin(\arg Z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|Z|} \\ \theta = \frac{\arg Z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0,1,...,n-1\} \end{cases}$$

   Les racines $n^{\text{ième}}$ de Z=a+ib sont les complexes $z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\arg Z+2k\pi}{n}}, k \in \{0,1,...,n-1\}$.

Propriété 2.5.

Soit $Z = re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul et n un entier naturel($n \geq 2$).

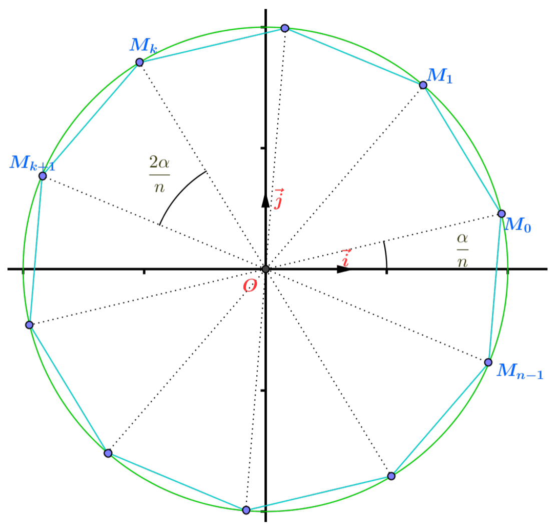
1. Z admet n racines $n^{\text{ième}}$ telles que :$z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\frac{\arg Z+2k\pi}{n}}, k \in \{0,1,...,n-1\}$.
2. Les images de ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.
3. Si z et g sont les racines nième d'un nombre complexe Z non nul, alors $\frac{z}{g}$ et $\frac{g}{z}$ sont les racines nième de l'unité.
4. La somme de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z est égale à 0.
5. L'ensemble de toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z forme un groupe pour la multiplication de $\mathbb{C}$.

Preuve

1. D'après l'activité précédente.
2. Soit M_k d'affixe z_k, $OM_k = |z_k| = |z_0| = |\sqrt[n]{r}| \Longrightarrow M_k \in C(O; \sqrt[n]{r})$

   $M_kM_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |z_k||e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1| = |e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1|\sqrt[n]{r} = 2\sin(\frac{\pi}{n})\sqrt[n]{r}$.

   $M_0M_1 = M_1M_2 = ... = M_{n-1}M_n = M_nM_0 \Longrightarrow$ polygone régulier de n cotés inscrit dans le cercle $C(O; \sqrt[n]{r})$.



3. Montrons que $(\frac{z}{g})^n = 1$

   Pour cela $(\frac{z}{g})^n = \frac{z^n}{g^n} = \frac{Z}{Z} = 1$.

   De même on montre que $\frac{g}{z} = 1$.

4. Posons $S = z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_{n-1}$ et $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On remarque que, $z_{k+1} = qz_k$

   $S = z_0 + qz_0 + z_0q^2 + ... + q^{n-1}z_0$

   $= z_0(1 + q + q^2 + ... + q^{n-1})$

   $= z_0(\sum_{k=0}^{n-1} q^k)$

   $= z_0\frac{q^n-1}{q-1}$ (Or $q^n = 1$)

   $= 0$

2.3.4 Linéarisation

Activité 2.8.

1. En utilisant la formule d'Euler exprimer $\cos^2\theta$ en fonction de $\cos k\theta$ où $k \in \mathbb{N}$. Cette écriture est une linéarisation de $\cos^2\theta$
2. Linéariser $\cos^3\theta$, $\sin^3\theta$
3. Linéariser $\cos^2\theta\sin\theta$

Solution.

1. D'après la formule d'Euler on a :

   $\cos^2\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^2$

   $= \frac{1}{4}(e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta})$

$= \frac{1}{2}(\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} + \frac{2}{2})$

$= \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$

$= \frac{\cos 2\theta+1}{2}$

2. En utilisant toujours la formule d' Euler nous avons :

   $\cos^3\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^3$

   $= \frac{1}{8}(e^{i2\theta} + 2 + e^{-i2\theta})(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

   $= \frac{1}{8}(e^{i3\theta} + 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}) + e^{-i3\theta}$

   $= \frac{1}{4}(\frac{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})$

   $= \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

   De même on montre que $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

   En effet

   $\sin^3\theta = (\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2})^3$

   $= -\frac{1}{8i}(e^{i2\theta} - 2 + e^{-i2\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

   $= -\frac{1}{8i}(e^{i3\theta} - 2e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} + 2e^{-i\theta}) - e^{-i3\theta}$

   $= -\frac{1}{4}(\frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i} + 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})$

   $= \frac{1}{4}(-\sin 3\theta + 3\sin\theta)$

Définition 2.3.

Linéariser c'est transformer un produit en une somme, développer les expressions de la forme $\cos^n x$ et $\sin^m x$ en fonction de $\cos\alpha x$ ou en fonction de $\sin\beta x$ avec $\alpha, \beta, ...$ étant des entiers naturels non nuls.

A. **Utilisations des formules trigonométriques pour linéariser**

   a. **Forme linéaire de $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$**

   $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

   De même

   $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \iff \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

   b. **Forme linéaire de $\cos a \cos b$**

   $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad (1) \\ \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin b\sin a \quad (2) \end{cases}$$

   $(1) + (2) \iff \cos a\cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Exemple 2.2.

Linéariser $\cos^3 x$ et $\cos^4 x$

Solution.

$$\begin{aligned}
\cos^4 x &= (\cos^2 x)^2 \\
&= (\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x))^2 \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\cos^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 2x \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4x) + \tfrac{1}{2}\cos 2x \\
&= \tfrac{1}{8}\cos 4x + \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{3}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \cos x \cos^2 x \\
&= \cos x(\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)) \\
&= \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos x \cos 2x \\
&= \tfrac{1}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\cos 3x + \tfrac{1}{2}\cos x) \\
&= \tfrac{1}{4}\cos 3x + \tfrac{3}{4}\cos x
\end{aligned}$$

c. Forme linéaire de $\cos a \sin b$

$$\begin{cases} \sin a + b = \cos a \sin b + \sin a \cos b & (1) \\ \sin a - b = \cos a \sin b - \cos b \sin a & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \quad \Longleftrightarrow \quad \cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Exercice d'application 2.2.

Linéariser $\sin^3 x$ et $\sin^4 x$

B. **Utilisations des nombres complexes pour linéariser**

Nous avons d'après la formule d'Euler que

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^n\theta = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^n \\ \sin^n\theta = (\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^n \end{cases}$$

a. **Forme linéaire de** $\cos a \cos b$ **et** $\sin a \cos b$

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= (\tfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2})(\tfrac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}) \\
&= \tfrac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{4} \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2} + \tfrac{e^{i(a-b)}+e^{-i(a+b)}}{2}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))
\end{aligned}$$

Exercice d'application 2.3.

Linéariser $\sin a \cos b$, $\sin 3x \cos 2x$, $\cos 3x \cos 2x$

2.3.5 Exercice d'entrainement

Répondre par vrai ou faux en justifiant.

i. La partie imaginaire d' un nombre complexe est un imaginaire pur. ?

ii. Si le produit de deux nombres complexes est nul, c'est que l'un des deux est nul.

iii. Si z est un nombre complexe de module 1, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

iv. Le module d'une somme de deux complexes est la somme de leurs modules respectif.

v. L'argument du produit de deux complexes est la somme de leurs arguments.

2.4 Exercices

Exercice 2.1.

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

1. $z = 1 - i$
2. $z = 3i$
3. $z = \sqrt{3} + i$
4. $z = 2 + \sqrt{3} + i$

Exercice 2.2.

Soit (E) l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.

1. Montrons que (E) admet 2 solutions complexes conjuguées u et $\overline{u}$, u étant celle de partie imaginaire positive.
2. Calculer le module et un argument de u.
3. En déduire le module et un argument de $\overline{u}$.
4. Écrire u-4 sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique.
5. Calculer le module de g=$\frac{u}{u-4}$
6. vérifier que $\overline{g} = \frac{\overline{u}}{\overline{u}-1}$
7. En déduire le module et un argument de $\overline{g} = \frac{\overline{u}}{\overline{u}-1}$.

Exercice 2.3.

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

1. $z = \frac{1-u}{1+u}$ avec $u = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \theta \in]0, \pi[$
2. $z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+1)^3}$.
3. $z = -3(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$.

Exercice 2.4. (voir[5])

Posons $q = e^{ix} = \cos x + i\sin x$; $x \neq 0[2\pi]$

1. Exprimons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ en fonctions de n et x. Trouver la partie réelle A et la partie imaginaire B de S.
2. En déduire une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin kx$

Exercice 2.5. (voir[3])

Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule de Moivre.

a. $C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cos k\theta$

b. $S = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \sin k\theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$

Exercice 2.6.

Soients a_n et (b_n) les suites de réels tels que : $\begin{cases} a_0 = 1 & b_0 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $z_n = a_n + ib_n$.

1. Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} e^{in\frac{\pi}{4}}$.
3. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite (z_n) converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.7.

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer le module et un argument de z.
- En déduire la forme trigonométrique de z.

1. $z = (\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^3$
2. $z = (1-i)^4$
3. $z = (\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i})^3$

Exercice 2.8. (voir[7])

Soit $(z_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} & si \;\; n = 0 \\ z_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_n & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

On note M_n l'image de z_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Placer les points M_0, M_1, M_2,...,M_{11}.
2. a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = e^{-i(\frac{\pi}{2}+n\frac{\pi}{6})}$

   b. En déduire que M_n et M_{n+12} sont confondues.
3. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_{n+6} = -z_n$

   b. En déduire que O est le milieu du segment $[M_n, M_{n+6}]$.
4. a. sous forme exponentielle le complexe de $\dfrac{z_{n+8} - z_n}{z_{n+4} - z_n}$.

   b. En déduire la nature du triangle M_n, M_{n+4}, M_{n+8}.

Exercice 2.9.

Soit z un nombre complexe

1. Résoudre l'équation $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ et mettre le résultat sous forme exponentielle.
2. Démontrer que si $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$ alors $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$

Exercice 2.10.

Déterminer les parties réelles et imaginaire des complexes suivants :

1. $z = e^{-1+i\frac{\pi}{6}}$
2. $z = e^{2-i}$
3. $z = e^{1+i}e^{-2+i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 2.11.

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

a Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b Écrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

c En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2.12. (voir[3])

Calculer le module et l'argument de e^z dans les cas suivants :

1. $z = x + iy$

2. $z = 1 + i$
3. $z = \frac{1+i}{1-i}$
4. Le complexes z est solution de : $z^2 = 8 + 6i$

Exercice 2.13.

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $z = 2i$
2. $z = \frac{1+i}{1-i}$
3. $z = 1 + i$
4. $z = 3 - 4i$
5. $z = -11 + 60i$

Exercice 2.14.

Soit z le nombre complexe égal à 1+i$\sqrt{3}$.

a. Mettre le nombre complexe z sous la forme trigonométrique.

b. En déduire la forme algébrique du nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^{30}$.

Exercice 2.15.

Soit z le nombre complexe égal à $\frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-1}$.

a. Déterminer le module et un argument de z.

b. Calculer :z^{20}, z^{22}, z^{24}.

Exercice 2.16. (voir[4])

Soient x un nombre réel et z le nombre complexe égal à :$z = (x - 2)(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

a. Déterminer le module et un argument du complexe z.

b. Démontrer que z^{1976} est un nombre réel. Préciser le signe de z^{1976}.

Exercice 2.17.

a. Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

b. Soit z le nombre complexe égal à $\frac{z_1}{z_2}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

c. En déduire le cosinus et le sinus de $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.18.

Soit **U** l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

a. Soit z un élément de **U** que peut-on dire des nombres complexes $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$?

b. Soient z_1 et z_2 deux éléments de **U** tels que l'on ait : $z_1z_2 \neq -1$. Démontrer que le nombre complexe égal à $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est un nombre réel.

c Soient θ_1 et θ_2 des arguments respectives de z_1 et z_2. Exprimer le nombre Z en fonction de θ_1 et θ_2.

Exercice 2.19.

Soit α un réel tel que l'on ait $\forall k \in \mathbb{Z}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1}{1+i\tan\alpha}$.

b. Même question pour le nombre complexe $\frac{1}{i+\tan\alpha}$.

Exercice 2.20.

Soit z le nombre complexe égal a $-i$.

1. Mettre le nombre complexe z sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines cubiques de z et construire leurs images dans le plan complexe.

Exercice 2.21.

Calculer les racines cubiques des nombres complexes suivant :

1. $z = 1$
2. $z = 1 + \sqrt{3}i$
3. $z = 2 - 2i$
4. $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2-2i}$

Exercice 2.22.

Déterminer les complexes z définis par les conditions suivantes :

1. $z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$
2. $z^8 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$
3. $z^7 = 1 + i$

Exercice 2.23.

Exprimer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

Exercice 2.24.

Linéariser les expressions suivantes :

1. $a = \cos^3 x \sin^2 x$
2. $b = \sin^4 x$
3. $c = \sin^4 x \cos 2x$

Exercice 2.25. (voir[5])

Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

a) Écrire i en fonction de j puis démontrer que tout nombre complexe z peut s'écrire sous forme :
$z = \alpha + j\beta(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$

b) Déterminer une relation entre α et β pour que le complexe $\alpha + j\beta(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$ ait pour module 1.

Exercice 2.26. (voir[5])

Soit (z_n) la suite définie dans $\mathbb{C}$ par :
$z_0 = 1 + i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = -\frac{1}{2} z_n$

1. Démontrer que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison
2. Exprimer $\arg(z_n)$ en fonction de n, puis z_n en fonction de z_0 et n

Exercice 2.27.

Soit $j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ et $u = 1 + j$

a) Démontrer que :$1 + j + j^2 = 0$.

b) Calculer $u^n (n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction de n.

Exercice 2.28. (voir[3])

On considère le nombre complexe $z_0 = -2 - 2i\sqrt{3}$

1. Déterminer le module et un argument de z_0. En déduire z_0^2 et z_0^3
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz + 1 - 2i\sqrt{3} = 0$.

Exercice 2.29. (voir[5])**Construction d'un pentagone régulier**

Soit le nombre complexe $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$On pose : $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. a) Démontrer que $1 + z_0 + ... + z_0^4 = 0$ et en déduire que que α et β sont solutions de l' équation $(E) : Z^2 + Z - 1 = 0$.

   b) Exprimer α en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

   c) Résoudre (E) et déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

2. On désigne par $A_0,\ A_1,\ A_1,\ A_2,\ A_3$ et A_4 les points d'affixes respectives $1, z_0, z_0^2, z_0^3, z_0^4$.

   a) Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec la droite de repère $(O, \vec{i})$. Démontrer que l'affixe du point H est $\cos \frac{2\pi}{5}$.

   b) Soit (Γ) le cercle de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ et passant par le point B d'affixe i. (Γ) coupe la droite de repère $(O, \vec{i})$ en M et N, M étant le point d'abscisse positive. Démontrer que M et N ont pour affixes respectives α et β et que H est le milieu de $[OM]$.

   c) En déduire une construction simple d'un pentagone régulier dont on connaît le centre O et un sommet A_0.

Exercice 2.30. (voir[3])

Soit $z = -4i$; un nombre complexe.

1. Déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe z. On désignera ces racines par z_1, z_2, z_3, z_4.
2. Calculer les nombres $A = \sum_{k=1}^{4} z_k$, $B = \sum_{k=1}^{4} z_k^2$ et $C = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{z_k}$.

2.5 Correction des exercices

Exercice 11

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1. $|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \arg z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \arg z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{1}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \arg z_1 = -\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \cos \arg z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \arg z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \arg z_2 = -\frac{\pi}{4}$$

2. Posons $z = \frac{z_1}{z_2}$ et mettons z sous la forme algébrique et trigonométrique.

   $z = \frac{z_1}{z_2}$

   $= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\frac{1}{1-i}$

   $= \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)\frac{1}{2}$

   $= \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4}$

   $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   $z = \frac{z_1}{z_2}$

   $= \frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})}$

   $= \cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})$

   $= \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

3. $z = \frac{z_1}{z_2}$

   $= \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

   $= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   Donc

   $$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Conclusion générale

En conclusion nous avons montré qu'il existe une application bijective de l'ensemble des similitudes de centre $O\binom{0}{0}$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est-à-dire qu'une similitude directe de centre O peut être modélisée par un couple $(a; b)$. Et par suite nous avons défini une nouvelle opération sur les couples qui prolonge la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui s'obtient par la composée de deux similitudes de centre O. Ces couples acquièrent le statut de nombres puisqu'ils se prêtent à des calculs (somme, multiplication). Grâce à la notation d' EULER, nous avons construit un ensemble contenant $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, chaque élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$ (i étant le couple $(0; 1)$ qui modélise la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$). A partir d'un objet mathématique concret (Similitude directe de centre O) nous avons donné un sens aux nombres complexes. Nous avons interprété les solutions de l'équation $x^2 = -1$ (comme une rotation de centre O qui, composée par elle même donne une rotation de centre O et d'angle π).

Le cours proposé au chapitre deux est bien détaillé (avec des exercices d'application, des activités pédagogiques, des exercices d'entrainement) pour faciliter l'enseignement de l'aspect trigonométrique des nombres complexes aux enseignants et l'apprentissage pour les élèves de terminale scientifique. Les élèves ont intérêt à bien assimiler cette ressource parce qu'elle intervient dans beaucoup de parties du programme (Primitives et Intégration, isométrie et similitude, trigonométrie...). Les exercices du chapitre deux peuvent servir d'objet d'évaluation pour vérifier si les enseignements dispensés ont été bien assimilés.

Dans la suite nous pouvons nous intéresser aux intérêts d'avoir inventé les nombres complexes en mathématiques ou dans l'interdisciplinarité (en physique, Électronique, Télécommunication et j'en passe).

Bibliographie

[1] CHARLES MVOMO OTAM et al, MAJORS en Mathématiques terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.

[2] Hilda ROSSEEL et MAGGY SCHNEIDER, Ces nombres qu'on dit imaginaires sont-ils vraiment des nombres ?, Laboratoire de didactique des mathématiques, Facultés universitaires de Namur,Petit X n° 63,2004

[3] JEAN-LECOUTRE.PHILIPPE PILIBOSSIAN, édition DUNOD 2001

[4] M. MONGE.-C Audouin-Egoroff F. Lemaire'Body, MATHÉMATIQUES Terminale C-E Tome 1 Bulletin officiel du 24 juin 1971 EDICEF 1999.

[5] SALIOU TOURE et al, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale SM (CIAM), EDICEF 1999, Dépôt légal 11/2004

[6] Microsoft Encarta 2008

[7] www.EDUCAMER.org

Annexe

Programme officiel :