THEME: APPLICATIONS DES NOMBRES COMPLEXES EN Tle D: Aspect géométrique

Presenté par

TANGA NGOUMLAK ALEXIS

Sous l'encadrement de

Dr CIAKE CIAKE Fidèle (Chargé de Cours)

De Mr.ADJABA BIWOLI Jean-Pierre(IPN de Mathématiques)

Et de Mme SIMO (PLEG)

Yaoundé, le 6 septembre 2013

0.1 Objectifs généraux

1. Applications des nombres complexes dans la résolution des équations polynomiales et trigonométriques.
2. Applications des nombres complexes pour linéariser.
3. Applications des nombres complexes dans les configurations géométriques planes.

0.2 Objectifs spécifiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Résoudre une équation du sécond degré et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- utiliser les nombres complexes pour caractériser les figures géométriques

0.3 Motivations

La découverte de cette notion fût motivée par :

- le souci de résoudre l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, (a, b, c $\in \mathbb{R}$) quand le discriminant est négatif.
- le souci de trouver une primitive de $x \mapsto \cos^n x$ et $x \mapsto \sin^n x$.

0.4 Pré-réquis

L'élève doit déja avoir vu :

- La ressource 16 dont le titre est : Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes où on définit l'ensemble $\mathbb{C}$.
- La ressource 17 intitulée "aspect trigonométrique des nombres complexes" où on donne les formules de linéarisation.

0.5 Utilisation future

- Résolution des problèmes en electricité notamment dans les circuits R-L-C .
- Résolution des équations différentielles.
- On parlera des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

1 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

1.1 Objectifs spécifiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$).

1.2 Racines carrées d'un nombre complexe

1.2.1 Activité

1. On se propose de déterminer un nombre complexe z tel que $z^2 = 3 - 4i$.

   On pose alors $z = x + iy \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$.

   a) Montrer que $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$.

   b) En déterminant les modules de z^2 et de $3 - 4i$, montrer que $x^2 + y^2 = 5$.

   c) En déduire que $z^2 = 3 - 4i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

   d) Résoudre le système d'équations ci-dessus.

2. On pose $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -z_1 = -2 + i$.

   Vérifier que $z_1^2 = z_2^2 = 3 - 4i$.

   NB : *z_1 et z_2 sont les racines carrées de* $3 - 4i$

3. De la même manière, déterminer les racines carrées de $4 + 5i$ et de $2 - 3i$.

1.2.2 Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}$.
On appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

1.2.3 Remarque

Tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées : les deux racines carrées sont opposées.

1.2.4 Détermination des racines carrées

Soit $Z = X + iY$. On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$.

Alors :

1. $z^2 = Z \Longleftrightarrow (x+iy)^2 = X + iY \Longleftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY$. On obtient par identification le système suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases}$

2. Après avoir remarqué que $|z^2| = |Z|$, on obtient finalement le système
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = X & (i) \\ 2xy = Y & (ii) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} & (iii) \end{cases}$$

3. (i) et (iii) permettent de déterminer x et y au signe près :
(ii) permet de lever l'ambiguïté sur les signes.

1.2.5 Exercices d'application

Exercice 1

Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants.

a) $Z = 5 - 12i$

b) $Z = -32i$

c) $Z = 9 + 25i$

Solution

Posons $z = x + iy$

a) $z^2 = 5 - 12i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (i) \\ 2xy = -12 & (ii) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13 & (iii) \end{cases}$

(i) et $(iii) \Longrightarrow 2x^2 = 18$ et $-2y^2 = -8, \Longrightarrow x^2 = 9,\ y^2 = 4$ $(4i)$

$(ii) \Longrightarrow x$ et y sont de signes contraires.

Donc $(4i) \Longrightarrow (x = 3$ et $y = -2)$ ou $(x = -3$ et $y = 2)$

D'où les racines carrées de $5 - 12i$ sont $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = -3 + 2i$.

b) $z^2 = -32i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (i) \\ 2xy = -32 & (ii) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{0^2 + (-32)^2} = 32 & (iii) \end{cases}$

(i) et $(iii) \Longrightarrow 2x^2 = 32$ et $-2y^2 = -32, \Longrightarrow x^2 = 16,\ y^2 = 16$ $(4i)$

$(ii) \Longrightarrow x$ et y sont de signes contraires.

Donc $(4i) \Longrightarrow (x = 4$ et $y = -4)$ ou $(x = -4$ et $y = 4)$

D'où les racines carrées de $-32i$ sont $z_1 = 4 - 4i$ et $z_2 = -4 + 4i$.

c) On raisonne de la même manière que dans les cas précédents.

Exercice 2

Même question qu'à l'éxercice 1.

a) $Z = 12$

b) $Z = -20$

Solution

a) Les racines carrées de 12 sont $z_1 = \sqrt{12}$ et $z_2 = -\sqrt{12}$, c'est-à-dire $z_1 = 2\sqrt{3}$ et $z_2 = -2\sqrt{3}$

b) $Z = -20 = 20i^2 = (2\sqrt{5}i)^2$. Donc les racines carrées de -20 sont $z_1 = 2\sqrt{5}i$ et $z_2 = -2\sqrt{5}i$.

1.3 Equations du second degré.

1.3.1 Introduction

La " mise sous forme canonique " : $az^2 + bz + c = a((z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2}))$ (où à présent, a, b et c sont des nombres complexes) est encore valable dans $\mathbb{C}$. De même, après avoir déterminé une des racines carrées du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, le procédé de calcul des solutions de $az^2 + bz + c = 0$ reste le même que dans $\mathbb{R}$.

1.3.2 Activité

1. Soit (E) l'équation : $z^2 + (2 + 3i)z - 2(1 - 2i) = 0$.

   (a) **Calculer le discriminant $\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(1)[-2(1 - 2i)]$.**

   On a : $\Delta = (2 + 3i)^2 - 4(1)[-2(1 - 2i)] = 4 - 9 + 12i + 8 - 16i = 3 - 4i$

   (b) **Trouver une racine carrée de Δ qu'on nommera δ.**

   $$\text{On a } (x + iy)^2 = 3 - 4i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \end{cases}$$

$$\textit{Donc } (x+iy)^2 = 3-4i \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Ce système a deux solutions : $(2;-1)$ *et* $(-2;1)$

On peut donc prendre $\delta = 2-i$.

On pose $z_1 = \frac{-(2+3i)-\delta}{2(1)}$ **et** $z_2 = \frac{-(2+3i)+\delta}{2(1)}$.

(c) **Réduire** z_1 **et** z_2 **et montrer qu'ils sont solutions de** (E).

On a $z_1 = \frac{-(2+3i)-\delta}{2(1)} = \frac{-(2+3i)-(2-i)}{2} = -2-i$

$z_2 = \frac{-(2+3i)+\delta}{2(1)} = \frac{-(2+3i+(2-i)}{2} = -2i$.

2. **De la même manière, résoudre les équations** $z^2 - 2iz + (1+2i) = 0$ **;** $(3+2i)z^2 + 4z + 5 = 0$.

1.3.3 Propriété.

Soit (E) l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnu z où a, b et c sont des nombres complexes, $(a \neq 0)$. Le discriminant de cette équation est le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit δ l'une des racines carrées de Δ.

L'quation (E) admet deux racines complexes : $z = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Attention

Dans tous les cas, la somme des racines est $\frac{-b}{a}$ et leur produit est $\frac{c}{a}$.

1.3.4 Remarques.

1. Dans la propriété ci-dessus, lorsque $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet une solution unique donnée par $z = \frac{-b}{2a}$
2. Pour les équations de la forme $az^2 + b = 0$ $(a \neq 0)$, le calcul du discriminant n'est pas nécessaire, on procède comme suit :
   $az^2 + b = 0 \iff z^2 = \frac{-b}{a}$. Les solutions cherchées sont donc les racines carrées de $\frac{-b}{a}$.
3. si $b = 2b'$, alors on peut utiliser le discriminant réduit $\Delta' = b'^2 - ac$. Les solutions s'écrivent alors $z_1 = \frac{-b'-\delta'}{a}$ et $z_2 = \frac{-b'+\delta'}{a}$.
4. Si a,b et c sont tous des réels, alors on distingue deux cas :$\Delta < 0$ et $\Delta \geq 0$.
   (a) Si $\Delta \geq 0$, alors les deux solutions de (E) sont réelles et s'écrivent $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

(b) Si $\Delta < 0$, alors elles sont non réelles, conjuguées l'une de l'autre et s'écrivent $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

1.3.5 Exercices d'application

i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1) : z^2 + z + 1 = 0$.

Solution

On a :$\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.

Les solutions de (E_1) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

ii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_2) : iz^2 - iz - 3 - i = 0$.

Solution

On a :$\Delta = (-i)^2 + 4i(3+i) = -1 + 4i(3+i) = -5 + 12i$.

Déterminons les racines carrées du nombre complexe $-5 + 12i$.

On a :$(x+iy)^2 = -5 + 12i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy = 6 \end{cases}$

Ce système a deux solutions : $(2;3)$ et $(-2;-3)$.

Donc (E_2) a deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{i+(2+3i)}{2i}$ et $z_2 = \frac{i-(2+3i)}{2i}$;

c'est-à-dire $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

1.3.6 Exercices d'application

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $(2+i)z^2 - (9+2i)z + 5(3-i) = 0$

b) $z^2 - 4z + 5 + i(z+1) = 0$

c) $2z^2 + 5z + 11 = 0$

1.4 Equations se ramenant au second degré.

1.4.1 Activité

1. Soit l'équation $(E) : z^3 + (4-5i)z^2 + (8-20i)z - 40i = 0$.

   (a) Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.

   (b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Solution ;

(a) *Posons* $z_1 = ib \quad (b \in \mathbb{R}^*)$.

$$\begin{aligned} z_1 \quad \textit{solution} \quad \textit{de} \quad (E) &\iff (ib)^3 + (4-5i)(ib)^2 + (8-20i)ib - 40i = 0(b \in \mathbb{R}^*). \\ &\iff 4b(b-5) + i(b3 - 5b^2 - 8b + 40) = 40(b \in \mathbb{R}^*). \\ &\iff b = 5. \end{aligned}$$

Donc (E) admet une solution imaginaire pure $z_1 = 5i$.

(b) L'équation (E) peut s'écrire : $(z-5i)(z^2 + az + b) = 0$ $(a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C})$.

Par identification de polynômes, on obtient :$(z-5i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.

- *Soit l'équation :* $z^2 + 4z + 8 = 0$ *; on a :* $\Delta = -16 = (4i)^2$.

  Donc, cette équation a deux solutions : $z_2 = -2 + 2i$ *et* $z_3 = -2 - 2i$.
- *On en déduit que les solutions de (E) dans* $\mathbb{C}$ *sont :* $z_1 = 5i$, $z_2 = -2 + 2i$ *et* $z_3 = -2 - 2i$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 - \sqrt{2}z^2 + 1 = 0$.

   Solution

   Posons $Z = z^2$.

   Alors (E) devient : $Z^2 - \sqrt{2}Z + 1 = 0$

   $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(1) = -2 = (\sqrt{2}i)^2$

   D'où les solutions de cette dernière équation sont : $Z_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ *et* $Z_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

   Les solutions de l'équation de départ sont donc les racines carrées de Z_1 *et de* Z_2.

   Posons $z = x + iy$.

   - $z^2 = Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} & (i) \\ 2xy = -\frac{\sqrt{2}}{2} & (ii) \\ x^2 + y^2 = 1 & (iii) \end{cases}$

     (i) et (iii) $\Longrightarrow 2x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ *et* $-2y^2 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$, $\Longrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ *(4i)*

     (ii) $\Longrightarrow$ *x et y sont de signes contraires.*

     Donc (4i) $\Longrightarrow$ $\left(x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right.$ *et* $\left.y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$ *ou* $\left(x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right.$ *et* $\left.y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$

     Les racines carrées de Z_1 *sont donc* $z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ *et*
     $z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- $z^2 = Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} & (i) \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} & (ii) \\ x^2 + y^2 = 1 & (iii) \end{cases}$

  (i) et (iii) $\Longrightarrow 2x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ *et* $-2y^2 = \frac{\sqrt{2}-2}{2}, \Longrightarrow x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ *(4i)*

  (ii) $\Longrightarrow$ *x et y sont de même signe.*

  Donc (4i) $\Longrightarrow (x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ *et* $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$ *ou* $(x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ *et* $y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2})$

  Les racines carrées de Z_2 *sont donc* $z_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ *et*
  $z_4 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

D'où les solutions de notre équation de départ sont : z_1, z_2, z_3 *et* z_4 .

3. **Racines cubiques de l'unité**.

   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$

   Solution

   Posons : $z = \rho e^{i\theta}$; donc $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$.

   On a : $z^3 = 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta \equiv 0[2\pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0[\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$

   Donc 1 admet trois racines cubiques z_1, z_2 et z_3 telles que :

   $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Les images de z_1, z_2 et z_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

1.4.2 Remarques

Par changement d'inconnu, on peut ramener au second degré les équations dites bicarrées ($az^4 + bz^2 + c = 0$) et quelques autres types particuliers ; "la méthode de Cardan" permet même de résoudre les équations du troisième degré. Mais en général, on ne sait résoudre que les équations dont on connait une "solution particulière" (une racine évidente) ; on factorise alors, en utilisant la division euclidienne ; on peut parfois aussi "déviner" une factorisation, telle $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1)$.

2 Configuration et nombres complexes

2.1 Objectifs spécifiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable d'interpréter géométriquement un nombre complexe Z qui s'écrit sous la forme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ où z_A, z_B, z_C, sont les affixes des points A, B, C respectivement.

2.2 Activité

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soit $Z = \frac{3-2i}{(\frac{1-i}{2})-2i}$ un nombre complexe.

   (a) **Déterminer le module et un argument de Z.**

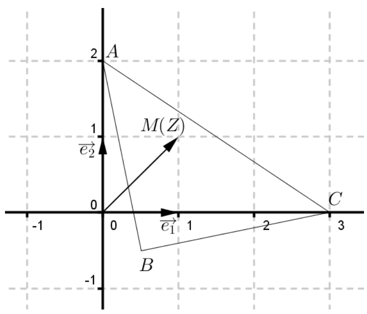
   Solution

   On a : $Z = \frac{3-2i}{(\frac{1-i}{2})-2i} = \frac{3-2i}{\frac{1-5i}{2}} = \frac{6-4i}{1-5i} = \frac{(6-4i)(1+5i)}{1+25} = \frac{6+30i-4i+20}{26} = \frac{26+26i}{26} = 1+i$
   et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

   Donc $|Z| = \sqrt{2}$ *et* $Arg(Z) = \frac{\pi}{4}$

   On désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $z_A = 2i$,

   $z_B = \frac{1-i}{2}$**,** $z_C = 3$



   Ainsi, on aura les relations module-distances $|z_C - z_A| = AC$**,**

   $|z_B - z_A| = AB$**.**

   (b) Calculer le rapport $\frac{AC}{AB}$.

   On a : $A(0;2)$, $B(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, $C(3;0)$

   D'où $AB = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2 + (-\frac{1}{2}-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$,

   $AC = \sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{13}$.

   $BC = \sqrt{(3-\frac{1}{2})^2+(0+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

   Donc $\frac{AC}{AB} = \sqrt{13} : \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

   (c) **Déterminer** $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &\iff BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} \\
&\iff BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\
&\iff \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2AB.AC} \\
&\iff \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\frac{26}{4} - \frac{26}{4} - 13}{-2\frac{\sqrt{26}}{2}.\sqrt{13}} \\
&\iff \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$.

(d) **En déduire que** $AC = |Z|AB$**, puis que** $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = Arg(Z)$.

Le résultat découle directement de ce qui précède.

2. **Réciproquement, trouver de deux manières différentes** $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ **lorsque les points A, B et C sont d'affixes respectifs** 1**,** $2+i$ **et** i**.**

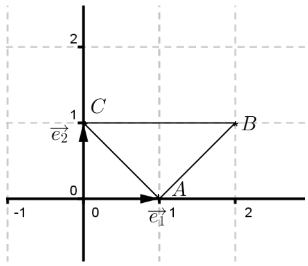
Première méthode :

On a $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i-1}{2+i-1} = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)^2}{-1-1} = \frac{-1-2i+1}{-2} = i$

Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = Arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = Arg(i) = \frac{\pi}{2}$

et $AC = |\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}|AB = |i|AB = AB.$

La deuxième méthode est la méthode graphique.



2.3 Propriété

Le plan affine euclidien ξ_2 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est identifié à $\mathbb{C}$ par :

$$(x, y) = x + iy.$$

Pour M(x,y) $\in \xi_2$, x+iy est l'affixe de M : pour z $\in \mathbb{C}$, (x,y)$\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, le point M(x,y) est l'image de z.

Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C (tels que $z_A \neq z_B$).

Posons $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Alors on a :

1. $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = Arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A})$.
2. $AC = |Z|AB$.

2.4 Interprétation géométrique des applications $z \longmapsto az+b$

. Le plan affine euclidien ξ_2 est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Les nombres complexes peuvent être utilisés pour décrire quelques transformations de $\mathcal{P}$. Ainsi, pour A le point d'affixe a on a :

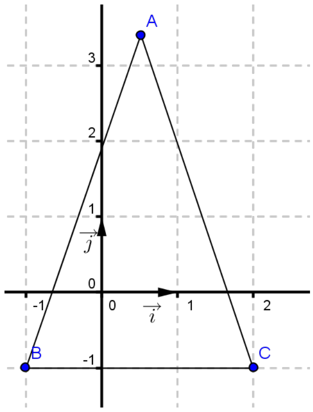
1. $z \longmapsto z + a$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
2. $z \longmapsto -z$ est la symétrie par rapport à O.
3. pour tout réel $\rho > 0$, $z \longmapsto \rho z$ est l'homothétie de rapport ρ et de centre O.
4. pour tout réel θ, $\theta \longmapsto e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
5. pour tous nombres complexes a, b avec $a \notin \{0, 1\}$ et d'argument θ, l'application $z \longmapsto az + b$ est la composée commutative de la rotation d'angle θ et de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et de l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

2.5 Etude de quelques figures

2.5.1 Activité

Le plan affine euclidien ξ_2 est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient A, B, et C trois points non alignés d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C.

1. **On pose** $z_A = \frac{1}{2} + ai$ **où** $a \in \mathbb{R}$**,** $z_B = -1 - i$**,** $z_C = 2 - i$



a) **Montrer que** $|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}| = 1$.

On a :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2-i-\frac{1}{2}-ai}{-1-i-\frac{1}{2}-ai} = \frac{\frac{3}{2}-i(1+a)}{-(\frac{3}{2}+i(1+a))}$

$|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}| = |\frac{\frac{3}{2}-i(1+a)}{-(\frac{3}{2}+i(1+a))}| = \frac{|\frac{3}{2}-i(1+a)|}{|-(\frac{3}{2}+i(1+a))|} = \frac{|\frac{3}{2}-i(1+a)|}{|\frac{3}{2}+i(1+a)|} = 1$

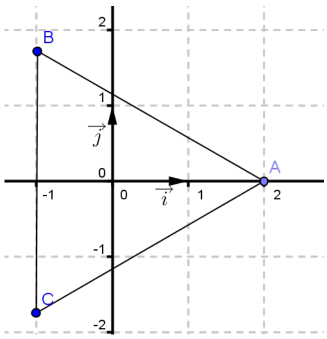
$car\ \frac{3}{2} + i(1+a) = \overline{\frac{3}{2} - i(1+a)}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

On a $|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}| = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha} \Rightarrow AC = AB|e^{i\alpha}| = AB$.

Donc ABC est un triangle isocèle en A.

2. **Ici, on suppose que** $z_A = 2$ **;** $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ **;** $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.



a) **Calculer le module et un argument de** $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

On a

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{(-3-i\sqrt{3})^2}{9+3} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}| = 1$ et $arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{3}$.

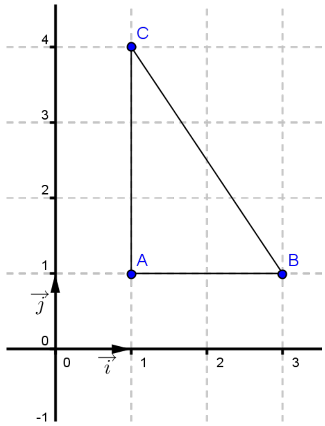
b) En déduire la nature du triangle ABC.

On a :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow (AB = AC \text{ et } mes\widehat{A} = \frac{\pi}{3})$.

Donc ABC est un triangle équilatéral.

3. **Supposons à présent que** $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = 1 + 4i$.



a)Donner un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1+4i-1-i}{3+i-1-i} = \frac{3i}{2}$

Donc $arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = arg(\frac{3i}{2}) = \frac{\pi}{2}$, *d'où ABC est rectangle en A .*

b) Même question si $z_A = -1 - i$, $z_B = -1 + 3i$ $z_C = 4 - i$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4-i+1+i}{-1+3i+1+1-i} = \frac{5}{4i} = \frac{-5i}{4}$

Donc $arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = arg(\frac{-5i}{4}) = -\frac{\pi}{2}$, *d'où ABC est un triangle rectangle en A .*

c) De manière générale, comment montrer qu'un triangle ABC est un triangle rectangle lorsque les affixes z_A, z_B, z_C **sont connus ?**

On montre que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi$, $(b \in \mathbb{R}^*)$

4. **A partir des questions 1) et 3), donner une méthode pour montrer qu'un triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.**

   Il suffit de montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$.

Tableau recapitulatif (cf [3])

Pour M un point quelconque du plan, on note par z_M son affixe.

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A	$AB = AC$ et $mes\widehat{A} = \alpha$, $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\alpha}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral	$AB = AC$ et $mes\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$,	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	$AB = AC$ et $mes\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$,	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = i$ ou $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle	$mes\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = ib$, $(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv 0[\pi]$	$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C, D cocycliques	$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})[\pi]$ $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \neq 0[\pi]$	$\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} : \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \in \mathbb{R}^*$

2.6 Exercice résolu

2.6.1 Exercice : *Carrés et parallélogramme* (cf [6])

ABC est un triangle de sens direct.

DBA est un triangle isocèle et rectangle en D de sens direct.

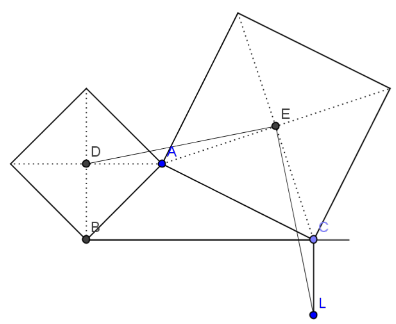
ACE est un triangle isocèle et rectangle en E et de sens direct.

On construit le point L tel que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que EDL est un triangle rectangle isocèle en E de sens direct.

2.6.2 Solution

1. Figure :



2. Munissons le plan d'un répère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

   Notons $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_L$ les affixes respectifs des points A, B, C, D, E, et L.

   Comme A est l'image de B par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$z_A - z_D = i(z_B - z_D)$$

   De même, dans ACE :

$$z_C - z_E = i(z_A - z_E)$$

   Enfin, puisque L est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$:

$$z_L = z_C + z_B - z_D$$

   Exprimons $z_L - z_E$ en fonction de $z_D - z_E$:

$$z_L - z_E = z_C - z_E + z_B - z_D = i(z_A - z_E) - i(z_A - z_D) = i(z_D - z_E).$$

   Donc L est l'image de C par la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   Le triangle EDL est bien rectangle isocèle en E de sens direct.

2.6.3 Exercices d'application

Exercice 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|\overline{z} - 1 + 2i| = 3$

b) $|z - 3 + i| = 3$

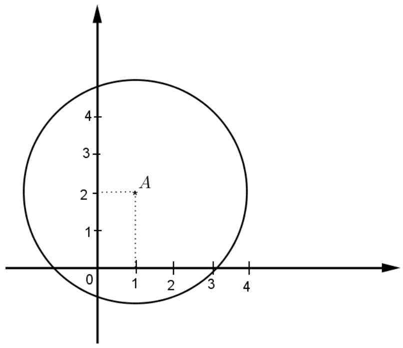
c) $arg(z - 3i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Solution

a) Posons $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} Alors \quad |\overline{z} - 1 + 2i| = 3 &\iff |x - iy - 1 + 2i| = 3 \\ &\iff |(x-1) + i(2-y)| = 3 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \end{aligned}$$

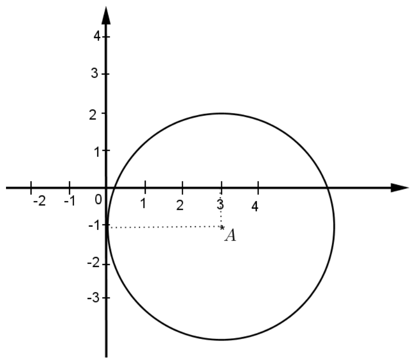
D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre $A(1;2)$ et de rayon 3.



b)Soit A le point d'affixe $3 - i$.

Alors $|z - 3 + i| = 3 \Longleftrightarrow AM = 3$.

Donc M appartient au cercle de centre A et de rayon 3.



c))Soit A le point d'affixe $3i$.

Alors $arg(z - 3i) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Longleftrightarrow Mes(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Le lieu de M est la droite (D) de repère $(A, \overrightarrow{u})$, privée de A, avec $Mes(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées privé du point A.

Exercice 2

Á tout nombre complexe z distinct de $-1 + 2i$, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}.$$

Déterminer les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $|Z| = 1$.

b) $|Z| = 2$.

c)Z est un nombre réel.

d) Z est un nombre imaginaire pur.

Solution

Soient A et B les points d'affixes respectifs $-1 + 2i$ et $2 - 4i$.

Alors on a :

a) $|Z| = 1 \iff AM = BM \iff M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

$$
\begin{aligned}
b) \quad |Z| = 2 \quad &\iff \quad BM = 2AM \\
&\iff \quad 4AM^2 - BM^2 = 0 \\
&\iff \quad 3MG^2 + 4GA^2 - GB^2 = 0 \quad avec \quad G = bar\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 4 & -1 \\ \hline \end{array} \\
&\iff \quad MG^2 = \frac{GB^2 - 4GA^2}{3} \\
&\iff \quad GM^2 = \frac{AB^2}{3}(\frac{16}{9} - \frac{4}{9}) \quad car \quad \overrightarrow{AG} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{3}, \overrightarrow{BG} = \frac{4\overrightarrow{BA}}{3} \\
&\iff \quad GM^2 = 20 \quad car \quad AB^2 = (2+1)^2 + (-4-2)^2 = 45
\end{aligned}
$$

Donc M appartient au cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{5}$

$$
\begin{aligned}
c) \quad Z \in \mathbb{R} \quad &\iff \quad z = z_B \quad ou \quad arg(\frac{z - z_B}{z - z_A}) \equiv 0[\pi] \\
&\iff \quad M = B \quad ou \quad Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv 0[\pi]
\end{aligned}
$$

Le lieu des points M est la droite (AB), privée du point A.

$$
\begin{aligned}
d) \quad Z \quad imaginaire \quad pur \quad &\iff \quad arg(\frac{z - z_B}{z - z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\
&\iff \quad Mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]
\end{aligned}
$$

Le lieu des points M est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

3 Exercices

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

3.1 Exercices corrigés

3.1.1 Enoncés

Eexercice 1

Résoudre les équations du second degré suivantes :

a) $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$

b) $z^2 - (1 + i\sqrt{3}) - 1 + i\sqrt{3} = 0$

Eexercice 2 (cf [1])

Résoudre les équations suivantes :

a) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

b) $(\frac{z+i}{z-i})^3 + (\frac{z+i}{z-i})^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0$

Eexercice 3 (cf [1])

Résoudre les équations suivantes pour tout entier positif n :

a) $z^{2n} - 2z^n \cos\alpha + 1 = 0 \qquad \alpha \in [0, 2\pi[$

b) $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$

Eexercice 4 *Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique* (cf [6])

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que a et b sont la somme de deux carrés :

il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $a = x^2 + y^2$ et il $z, t \in \mathbb{Z}$ tels que $b = z^2 + t^2$.

Démontrer que le produit ab est encore la somme de deux carrés. (Idée :écrire $(x^2 + y^2) = |x + iy|^2$ etc...).

Exercice 5 (cf [4])

Soient $A(1+i), A^{'}(2+i), B(2-3i), B^{'}(7-2i)$. Montrer qu'il existe une similitude directe unique f telle que $f(A) = A^{'}$ et $f(B) = B^{'}$.

Exercice 6 (cf [4])

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ tels que $|a| = |b| = |c|$.

Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si

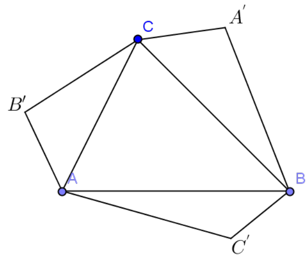
$a + b + c = 0$.

Exercice 7 (cf [4])

Soient O, A, B trois points C et D les images respectives de A et B par une similitude directe S de centre O. On construit les triangles ADM et CBN directement semblables à ABO. Montrer que O est le milieu de MN.

Exercice 8 (cf [4])

Soient A, B ,C trois points deux à deux distincts, $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ construits extérieurement à ABC tels que les triangles $ABC^{'}, BCA^{'}, CAB^{'}$soient directement semblables. Montrer que $A^{'}B^{'}C^{'}$ a le même centre de gravité que ABC.



Exercice 9 (cf [4])

Soient ABC un triangle non aplati, B_1, C_2 définis par $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{B_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, C_1, A_2, A_2, B_2 de façon analogue ; on construit $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ extérieurement à ABC de façon que les triangles $B_1C_2A^{'}, C_1A_2B^{'}, A_1B_2C^{'}$ soient équilatéraux.

Montrer que $A^{'}B^{'}C^{'}$ est équilatéral.

Exercice 10 (cf [4])

Soient ABC un triangle non aplati, $A^{'}, B^{'}, C^{'}$ construits extérieurement à ABC de façon que les triangles $BCA^{'}, CAB^{'}, ABC^{'}$ soient rectangles isocèles.

a)Montrer : $(AA^{'}) \perp (B^{'}C^{'})$ et $AA^{'} = B^{'}C^{'}$.

b)En déduire que les droites $(AA^{'}), (BB^{'}), (CC^{'})$ sont concourantes.

Exercice 11 (cf [4])

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note P, Q les polynômes à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{R}$ définis par :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x + iy)^n = P(x, y) + iQ(x, y)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \backslash \{(0, 0)\}$. Montrer que l'équation $aP(x, y) + bQ(x, y) = 0$ représente la réunion de n droites passant par O et faisant entre elles des angles successifs égaux.

3.1.2 Corrigés

Exercice 1

a) Le discriminant a pour valeur :

$\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$.

Les racines de cette équation sont donc :

$$z_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i) = e^{\frac{5i\pi}{6}} \qquad z_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - i) = \overline{z_1}$$

L'équation étant à coefficients réels, les deux racines sont deux complexes conjugués.

b) On calcule le discriminant de cette équation :

$$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 + 4 - 4i\sqrt{3} = 2 - 2i\sqrt{3} = 2(1 - i\sqrt{3}) = 4e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

On obtient donc comme racines :

$$z_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3} + 2e^{\frac{-i\pi}{6}}) = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3} + 2e^{\frac{5i\pi}{6}}) = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Les deux racines ne sont pas ici des complexes conjugués car les coefficients de l'équation sont complexes.

Exercice 2(cf [1])

a)On transforme l'équation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 &= z^2(z^2 + 6z + 9) + 10^2 \\ &= z^2(z+3)^2 - (10)^2 \\ &= [z(z+3) + 10i][z(z+3) - 10i] \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre les deux équations du second degré :

$$z^2 + 3z + 10i = 0 \quad et \quad z^2 + 3z - 10i = 0$$

Leurs discriminants respectifs sont :

$$\Delta_1 = 9 - 40i \qquad et \qquad \Delta_2 = 9 + 40i = \overline{\Delta_1}$$

On détermine leurs racines carrées et on obtient les quatre racines suivantes :

$$z_1 = \frac{1}{2}(-3 + 5 - 4i) = 1 - 2i \qquad z_2 = \frac{1}{2}(-3 - 5 + 4i) = -4 + 2i$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(-3+5+4i) = 1+2i = \overline{z_1} \qquad z_4 = \frac{1}{2}(-3-5-4i) = -4-2i = \overline{z_2}$$

L'équation initiale étant à coefficients réels, on obtient deux couples de racines conjuguées.

b) On effectue le changement :

$$u = \frac{z+i}{z-i} \Longleftrightarrow z = i\frac{u+1}{u-1}$$

On doit donc résoudre d'abord l'équation :

$$u^3 + u^2 + u + 1 = u^2(u+1) + u + 1 = (u^2+1)(u+1) = 0$$

Elle admet trois solutions évidentes :

$$u_1 = -1, \quad u_2 = i \quad et \quad u_3 = -i$$

Les solutions correspondantes de l'équation initiale sont :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1 \quad et \quad z_3 = -1$$

Exercice 3(cf [1])

a) On fait le changement de variable $u = z^n$ et l'équation devient :

$u^2 - 2u\cos\alpha + 1 = (u-\cos\alpha)^2 + 1 - \cos^2\alpha = (u-\cos\alpha)^2 - (i\sin\alpha)^2 = 0$

Les deux racines sont donc :

$$u_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha} \qquad et \qquad u_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha = e^{-i\alpha} = \overline{u_1}$$

L'équation initiale, à coefficients réels, admet donc n couples de racines conjuguées $(z_k, \overline{z_k})$, avec :

$z_k = e^{i\alpha_k} \qquad \alpha_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$

b) En divisant par $(z-i)^n$, l'équation devient :

$$(\frac{z+i}{z-i})^n = -1 = e^{i\pi}$$

On obtient donc comme solutions :

$$\frac{z+i}{z-i} = u_k = e^{i\alpha_k}$$

avec :

$$\alpha_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc :

$$z_k = i\frac{u_k+1}{u_k-1} = i\frac{1+\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k}{\cos\alpha_k - 1 + i\sin\alpha_k} = \frac{-\sin\alpha_k + i(1+\cos\alpha_k)}{\cos\alpha_k - 1 + i\sin\alpha_k}$$

Pour simplifier l'écriture, nous utilisons les formules trigonométriques suivantes :

$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ $\quad 1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ $\quad 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

On obtient ainsi :

$$z_k = \frac{-sin(\frac{\alpha_k}{2})\cos(\frac{\alpha_k}{2}) + i\cos^2(\frac{\alpha_k}{2})}{-\sin^2(\frac{\alpha_k}{2}) + i\sin(\frac{\alpha_k}{2})\cos(\frac{\alpha_k}{2})} = \frac{\cos(\frac{\alpha_k}{2})}{\sin(\frac{\alpha_k}{2})} = \cot\frac{\alpha_k}{2}$$

<u>Exercice 4</u> *Utilisation des nombres complexes pour établir une propriété algébrique*(cf [6])

On a : $\qquad ab = |x+iy|^2|z+it|^2$

Et d'après les propriétés des modules : $ab = |(x+iy)(z+it)|^2$

$$ab = |(xz-yt)| + i(yz+xt)|^2$$

$$ab = (xz-yt)^2 + (yz+xt)^2$$

Or, $xt - yt \in \mathbb{Z}$ et $xt + yt \in \mathbb{Z}$, donc ab est aussi la somme de deux carrés.

<u>Exercice 5</u>(cf [4])

En notant $f : M \longmapsto M^{'}(az+b)$,résoudre $\begin{cases} a(1+i)+b = 2+i \\ a(2-3i)+b = 7-i \end{cases}$

On obtient $a = 1+i$, $b = 2-i$.

Réponse : f admet pour centre le point d'affixe $1+2i$, a pour rapport $\sqrt{2}$ et pour angle $\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

<u>Exercice 6</u>(cf [4])

Puisque $|a| = |b| = |c|$, le centre du cercle circonscrit à ABC est O. D'autre part, l'affixe du centre de gravité G de ABC est $\frac{1}{3}(a+b+c)$. ABC est équilatéral si et seulement si $G = O$,c'est-à-dire ici $a+b+c = 0$.

<u>Exercice 7</u>(cf [4])

Par les nombres complexes :A(a),B(b),C(c),D(d),M(m),N(n). Il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $c = \alpha a$ et $d = \alpha b$, d'où $ad - bc = 0$.

D'autre part, puisque ABO et ADM sont directement semblables :

$\frac{m-a}{-a} = \frac{d-a}{b-a}$, d'où $m = a\frac{b-d}{b-a}$.

De même, on obtient : $n = b\frac{c-a}{b-a}$.

D'où : $m+n = \frac{bc-ad}{b-c} = 0$.

Donc O est le milieu de MN.

Exercice 8(cf [4])

Par les nombres complexes : $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $A^{'}(a^{'})$, $B^{'}(b^{'})$, $C^{'}(c^{'})$, $G(g)$, $G^{'}(g^{'})$, où G , $G^{'}$ sont les centres de gravité respectifs de ABC, $A^{'}B^{'}C^{'}$.

Puisque $ABC^{'}$, $BCA^{'}$, $CAB^{'}$ sont directement semblables, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^{*}$ tel que :

$$\begin{cases} c^{'} - b = \alpha(c^{'} - a) \\ a^{'} - c = \alpha(a^{'} - b) \\ b^{'} - a = \alpha(b^{'} - c) \end{cases}$$

D'où par addition, $3g^{'} - 3g = \alpha(3g^{'} - 3g)$, et donc ($\alpha \neq 1$, car sinon $a = b = c$) $g^{'} = g$, $G^{'} = G$.

Exercice 9(cf [4])

Par les nombres complexes : $A(a)$, $B(b)$, ... Puisque $A^{'}C_2B_1$ est (par exemple) équilatéral direct :

$A^{'} = Rot_{C_2,\frac{\pi}{3}}(B_1)$, c'est-à-dire :

$a^{'} - c_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(b_1 - c_2) = -j^2(b_1 - c_2)$

ou encore : $a^{'} = -j^2 b_1 - jc_2$.

Comme $b_1 = \frac{2b+c}{3}$ et $c_2 = \frac{b+2c}{3}$, on déduit :

$3a^{'} = (-j - 2j^2)b + (-2j - j^2)c = (2 + j)b + (1 - j)c$.

En permutant, on obtient :

$$\begin{cases} 3a^{'} = (2 + j)b + (1 - j)c & \times 1 \\ 3b^{'} = (2 + j)c + (1 - j)a & \times j \\ 3c^{'} = (2 + j)a + (1 - j)b & \times j^2 \end{cases}$$

D'où : $3(a^{'} + jb^{'} + j^2c^{'}) = (1 + j + j^2)(a + b + c) = 0$, et donc (comme au début de la solution) $A^{'}B^{'}C^{'}$ est équilatéral direct.

Exercice 10 (cf [4])

a) Par les nombres complexes : $A(a)$, $B(b)$, ...

On a :

$$\begin{aligned} B = Rot_{A^{'},\frac{\pi}{2}}(C) &\iff b - a^{'} = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a^{'}) \\ &\iff b - a^{'} = i(c - a^{'}) \\ &\iff a^{'} = \frac{b - ic}{1 - i} \end{aligned}$$

De même, $b^{'} = \frac{c-ia}{1-i}$, $c^{'} = \frac{a-ib}{1-i}$.

D'où :

$i(c^{'} - b^{'}) = \frac{b-ic+i(1+i)a}{1-i} = \frac{b-ic}{1-i} - a = a^{'} - a$.

Ceci montre que : $\overrightarrow{AA'} = Rot_{\frac{\pi}{2}}(\overrightarrow{B'C'})$, et donc
$(AA')\perp(B'C')$ et $AA' = B'C'$.
b) D'après a), (AA'), (BB'), (CC') sont les hauteurs du triangle $A'B'C'$, donc sont concourantes.

Exercice 11 (cf [4])

On a : $\forall(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{1}{2}((x + iy)^n + (x - iy)^n) \\ Q(x, y) = \frac{1}{2i}((x + iy)^n - (x - iy)^n). \end{cases}$$
D'où pour tout (x,y)de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} (1) \quad aP(x, y) + bQ(x, y) = 0 &\iff \frac{a - ib}{2}(x + iy)^n + \frac{a + ib}{2}(x - iy)^n = 0 \\ &\iff (\frac{x + iy}{x - iy})^n = -\frac{a + ib}{a - ib}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{x+iy}{x-iy}$ et $\frac{a+ib}{a-ib}$ sont de module 1.
Notons $\varphi = Arg(\frac{x+iy}{x-iy})$, ϵ une racine $n^{\text{ième}}$ de $-\frac{a+ib}{a-ib}$, $\alpha = Arg(\epsilon)$, on a :
(1)$\iff n\varphi \equiv \alpha[2\pi] \iff \varphi \equiv \frac{\alpha}{n}[\frac{2\pi}{n}]$.
Notons $\theta = Arg(x + iy)$.
Comme $\frac{x+iy}{x-iy} = \frac{1}{x^2+y^2}(x + iy)^2$ et que $\frac{1}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi \equiv 2\theta[2\pi]$, et donc :
(1) $\iff 2\theta \equiv \frac{\alpha}{n}[\frac{2\pi}{n}] \iff \theta \equiv \frac{\alpha}{2n}[\frac{\pi}{n}]$.
D'où le résultat voulu.

3.2 Exercices non corrigés

Exercice 1 *Racine carrée de deux façons (cf [3])*

Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 2 *Equations du second degré*

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
2. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$
3. $z^2 - (7 + i)z + 12 + 3i = 0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\frac{z+1}{z-1})^3 + (\frac{z-1}{z+1})^3 = 0$

2. $z^n = \overline{z}$ $(n \geq 2)$

3. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

4. $iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$

Exercice 4 (cf [2])

Quel est le nombre complexe dont le carré est égal à son inverse ?

Exercice 5 (cf [2])

On considère les points A, B et C d'affixes définis ci-dessous :

$z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - i$ et $z_C = 2 - 2i$.

Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 6 (cf [2])

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée.

a) $(z - 1 - i)(\overline{z} - 1 + i) = 5$

b) $|\frac{z+i}{z-i}| = 3$

c) $arg(3i - z) \equiv 0[2\pi]$.

Exercice 7 (cf [2])

On considère deux points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

Déterminer l'ensemble des M d'affixe z_M tel que les points A, B et M soient alignés.

Exercice 8

Linéariser $\cos^5 x$, $\sin^5 x$ et $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 9 (cf [2])

On définit dans $\mathcal{P}$ une suite de point $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'affixes z_n définis par :

$z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$.

1) Calculer z_n en fonction de n.

2) Pour tout entier naturel, calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.

En déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1} et montrer que : $M_nM_{n+1} = kOM_{n+1}$, où k est un réel strictement positif à déterminer.

3) Si r_n est le module de z_n, donner la limite de r_n si n tend vers plus l'infini. Quelle interprétation géométrique peut-on donner ?

Exercice 10

On définit la transformation f du plan par sa forme complexe :

$z^{'} + 3 - 4i = 2(z + 3 - 4i)$

1) Quelle est la nature de l'application f ?

2) Déterminer l'image $C^{'}$ par f du cercle C de centre $A(-2+i)$ et de rayon 1.

Exercice 11 *Points à coordonnées entières*(cf [6])

Soit $ABCD$ un carré dans le plan complexe. Prouver que, si A et B sont à coordonnées entières, il en est de même de C et D.

Exercice 12 *Similitude*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point $M^{'}$ d'affixe $(1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$.

Exercice 13 (cf [3])

Soient a et b deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.

1. a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\overline{a}b$ est un nombre réel.

b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel si et seulement si les points O, A et B sont alignés ou si $OA = OB$.

2. On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignés et que les nombres complexes a et b ont pour module 1.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif.

3. Application

Soient M_1 et M_2 deux d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer, en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_2|); (M_2, |z_1|)\}$.

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel.

c) En déduire que $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$.

Exercice 14(cf [2])

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} z_1 z_2 = 17 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2z_1 z_2 = 3 \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ (3) $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = \frac{37}{4} \end{cases}$

Exercice 15 (cf [2])

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\overline{z} = 0$.

2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), O, A, B, C sont les images des solutions obtenues.

Représenter O, A, B, C et montrer que O, A, B, C sont situés sur un cercle.

Exercice 16 (cf [2])

Déterminer les nombres complexes z tels que les points A, A' et A'' d'affixes respectifs z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 17 (cf [2])

On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$.

1. Comparer $P(\overline{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z, $\overline{P(z)}$ le conjugué de $P(z)$.

Calculer $P(i)$.

En déduire une, puis deux solutions de l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2. Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).

Exercice 18 (cf [3])

Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions.

2. Démontrer que la somme des solutions de (E) est nulle et en déduire que :

$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

En déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 19

1. Linéariser : $\sin^2 3\theta \cos^2 \theta$.

2. Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta \cos^2 \theta d\theta$.

Bibliographie et Webographie

[1] JEAN-LECOUTRE,PHILIPPE PILIBOSSIAN, *édition DUNOD* 2001

[2] Saliou Touré et al ; *CIAM Terminale SE, EDICEF 1999.*

[3] Saliou Touré et al ; *CIAM Terminale SM, EDICEF 1999.*

[4] Jean-Marie Monier ; *Géométrie* 1^{re} *et* 2^{e} *années MP, PSI, PC, PT,* 2^{e} *édition*, 2000

[5] http ://www.bibmath.net/dico/index.php

[6] http ://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/Lycee_fichiers/CoursT_fichiers