Ressource n° 18 : Applications des nombres complexes

Auteur : TANGA NGOUMLAK Alexis
Encadreur ENS : Dr. F. Ciake

Rapport de pré-évaluation proposée par F. MALONGA MOUNGABIO

Pour la ressource n °18 intitulée « Applications des nombres complexes » en terminale D, l'auteur Tanga Ngoumlak Alexis soumet un document de 21 pages. Une bibliographie de 3 références est présentée : deux manuels universitaires (niveau 2e année) et un manuel de terminale. 24 exercices sont proposés dont 11 exercices corrigés, 10 exercices (non corrigés) et 3 exercices d'application (non corrigés).

Le document est composé de quatre principales parties : Introduction, cours détaillé, exercices et bibliographie.

- Dans la première partie, l'auteur présente les objectifs généraux de la ressource, les motivations, les pré-requis ainsi l'utilisation future des nombres complexes.

Concernant les objectifs, 4 objectifs généraux sont formulées.

Le premier objectif ne se limite qu'aux équations du second ordre. Or le programme scolaire du Cameroun (terminale D) prévoit la résolution des équations à une inconnue du premier, du second et du troisième degré. Cet objectif peut être élargi à d'autres catégories d'équations.

Une formulation possible serait : « résoudre des équations dans l'ensemble des nombres complexes ».

De même, le troisième objectif peut être élargi aux d'autres figures simples (carré, rectangle, losange). Une formulation possible serait : « Déterminer la nature d'un polygone connaissant les affixes de ses sommets ».

Concernant les motivations, au regard de ce que l'auteur présente on ne sait pas s'il s'agit des motivations ayant conduit les mathématiciens à la découvertes des nombres complexes ou bien de ses propres motivations relatives au choix du thème de cette ressource.

D'ailleurs, si cela n'a été fait dans les ressources 16 ou 17, il serait intéressant de présenter un extrait ou un résume de texte historique sur les nombres complexes. Vous pouvez vous inspirer des textes issus des ouvrages suivants (qui ne sont malheureusement pas en ligne, mais je peux vous envoyer la page (scannée) du premier ouvrage). :

- Rogalski Marc: *Complément sur les nombres complexes*. In Carrefour entre Analyse, Algèbre et Géométrie. Collection CAPES / Agregation. Ellipse 2001, p. 45

- IREM : *Images, Imaginaires, Imaginations. Imaginaires. une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes.* Commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques. Ellipses 1998.

- La deuxième partie est consacrée au cours détaillé. Deux domaines d'applications des nombres complexes sont choisis : la résolution d'une équation du second dans l'ensemble des complexes et la géométrie.

L'auteur commence cette partie par la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe.

A travers une activité guidée, l'élève est amener à découvrir les racines carrées d'un nombre complexes donnés.

Ainsi l'élève doit établir, de ce qui précède, l'équivalence : $z^2 = 3 - 4i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

La présentation pose un problème de logique : l'équation $z^2 = 3 – 4i$ ne permet pas d'établir immédiatement les trois équations dans l'accolade. Il faut rajouter la condition $|z|^2 = |3-4i|$.

Il aurait fallu écrire :

$$\begin{cases} Z^2 = 3 - 3i \\ |z|^2 = |3 - 4i| \end{cases} \quad <==> \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Je propose une reformulation de la question. On peut supprimer la première proposition et demander à l'élève :

« En déduire le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ ».

Ensuite, une partie est consacrée à la résolution d'équations de type $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des nombres complexes et $a \neq 0$.

Un objectif spécifique est défini :

> « A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b, c \in \mathbb{C}$) ».

On se demande pourquoi dans cette partie du cours, un seul objectif spécifique est défini.

En introduction de cette partie sur la résolution d'équations, l'auteur signale que l'on distingue 3 cas mais ne les présentent pas. Il serait particulièrement intéressant de (dé-)montrer que l'équation

$az^2 + bz + c = 0$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$) admet deux solutions complexes conjuguées.

Une activité « préparatoire » est proposée. Elle me paraît très guidée. Ainsi, je propose :

Au lieu de demander aux élèves de « Calculer le discriminant $\Delta = ...$ »,

on peut écrire :

- « déterminer (ou calculer) le discriminant Δ puis l'écrire sous la forme a + ib
- déterminer les racines carrées de Δ ».

Après la résolution des équations du second degré, l'auteur aborde les racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Je me demande pourquoi cette étude ne vient pas juste avant ou juste après la recherche de la racine carrée d'un nombre complexe.

De plus, l'étude générales des racines n-ième s'appuie sur la forme géométrique ou trigonométrique d'un complexe; l'étude se fait dans le cadre géométrique. Cependant, lors de l'étude des racine carrées d'un complexe, c'est la forme algébrique des nombres complexes qui est privilégiée :c'est le cadre algébrique qui est convoqué.

Je remarque que le lien entre les deux études et donc, les deux cadres (algébriques et géométriques) n'est fait ici.

- La troisième partie du cours détaillé est intitulée « configuration et nombres complexe ». Un objectif spécifique relatif à cette partie est :

« A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable d'interpréter géométriquement un nombre complexe Z qui s'écrit sous la forme $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ où z_A, z_B et z_C sont les affixes des points A, B et C respectivement ».

L'activité proposée doit conduire à deux résultats:

1. $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB}$ et 2. $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = Arg(Z)$

A la troisième question de l'activité, on demande de :

« graphiquement, déterminer $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ».

On peut s'attendre à trouver un valeur de l'angle (la mesure); ce n'est pas le cas. Il s'agit sans doute de construire l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

A partir de cette activité, l'auteur propose un résumé qui reprend les 2 résultats obtenus et qui sont présentés sous la forme :

1). AB = |Z| AC. 2). $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = Arg|Z|$

Concernant le premier résultat, il souhaitable de le présenter sous forme d'une égalité de rapports. Cela pourra permettre d'avoir d'une part, le rapport des modules et d'autre part le rapports des distances (affixes).

Signalons au passage l'erreur de frappe sur le deuxième résultat : écrire Arg (Z) au lieu de Arg|Z|.

La dernière partie du cours est consacrée à l'interprétation graphique de quelques applications complexes. Dans cette partie, on peut regretter le manque de figure géométrique pour soutenir le texte proposé.

- Concernant la quatrième partie, on remarque les exercices proposés sont en conformités avec les différentes parties de ce chapitre. Cependant, on peut enrichir la base des exercices, en y ajoutant les exercices issus de la physique (électricité).

Remarques générales :

Le document proposé par M. TANGA traduit bien l'esprit d'une ressource au sens du projet Prenum-AC. L'approche des notions est en conformité avec les programmes scolaires du Cameroun et du Congo. L'auteur complétera sa ressource en précisant la place de cette ressource dans le programme.

L'un des points faibles est sans doute l'absence des figures géométriques dans la partie cours détaillé. Aussi, les rares propriétés qui sont proposées ne sont pas démontrées. Le document comporte encore des fautes d'orthographes ou des oublis. Par exemple :

Page 2 : sous-paragraphe 1.3. écrire : pré-requis au lieu de: pré-réquis

Page 7 : 4e ligne, sous-paragraphe 3.1. … z_C, z_A sont les affixes …

il y a un z_A en trop (supprimer).

Page 5 : Exercices d'application. Exercice 2 : b) il y a « z » qui manque. Z = -20

Page 10 : 2e ligne : Z réel <==> (Z=0 ou …

écrire : Im(Z) = 0 au lieu de Z = 0

Page 10 : 8e ligne : écrire |Z| = 1 au lieu de |Z| = 2.