relation entre les angles orientés

NGUIMGO PAUL MARTIN

Yaoundé, le 5 janvier 2013

Table des matières

1 Dénomination de la ressources et contributeurs

1. TITRE : Rélation entre les angles orientés
2. Nguimgo Paul Martin (étudiant)
3. Dr Tégankong David (encadreur de l'ENS)
4. Mr Adjaba bewoli (inspecteur)
5. Mr Tobou samuel (encadreur)

2 Objectifs pédagogiques spécifiques

Consolider les acquis sur :

1. Les secteurs angulaires, les angles géométriques,les angles orientés à partir d'un couple de vecteurs tous non nuls.
2. Les propriétés des angles orientés.
3. Les appllications des angles orintés.

3 Liens avec les autres parties du programmes

ce chapitre à un liens direct avec :

Le chapitre sur les nombres complexes.

Le chapitre sur la géometrie de l'espaces.

4 Dévellopement du plan

4.1 Introduction

Ayant constater la dificulter qui se pose sur la comphrension de la notion d'angle,s'etant rendue compte de la confusion qui se fait entre un angle et un secteur angulaire d'une part et entre angle geométrique et angle orientés d'autre part,nous nous somme consenti qu'en tant que enseignant de mathematiques nous pouvons apporter notre pierre a l'ediffice en essayant d'etayer au maximum ces notion et en faisant ressortir les differences fondamentales qui peuvent exister entre elle.et de montrer au nouveaux aprenants le role que les angles orientés jouent sur certaines transformation du plan nous pouvons en citer : alignements des points, les arcs capables et la cocyclicités des points.

4.1.1 Motivation

Si nous demandons à un individus de tourner d'un angle de 45 degré ,il ne sait dans quel sens il faut le faire.C'est pour pouvoir résoudre ce type de problème que nous allons dans ce chapitre insister sur la notion d'angle orienté et approfondir les notions de trigonométrie.

4.2 Utilisation future

Ce chapitre permettra à l'avenir de mieux approfondir les notions de transformations orientées du plan complexe ou réel, et de mieux comprendre les notions de géométrie classique dans le supérieur.

4.3 Pré-requis

Pour aborder ce cour , l'élève devra maîtriser les notions tels que :

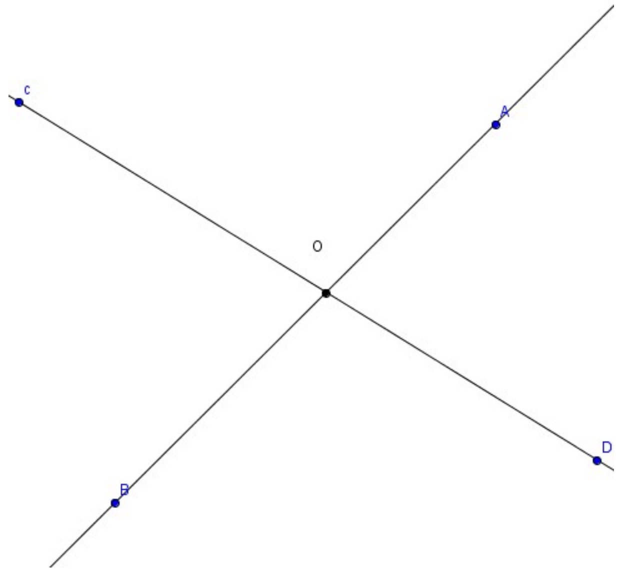
1. Secteur angulaire,
2. Mesure d'un angle en radian,
3. Notion de trigonométrie,
4. D'angles orientés de vecteurs,
5. Arguments d'un nombre complexe,
6. Orientation du cercle.

Il pourra pour mieux se préparer retrouver tous ses élements dans les livres tels que :

1. Monges (Tle, premiére,2nd S)
2. Collection CIAM

5 SECTEUR ANGULAIRE ,ANGLE GEOMETRIQUE ET ANGLE ORIENTÉ.

Activité 5.1. *Ci-contre sont réprésentés duex droite (AB) et (CD) sécante en O.*
1. *Soit (P_1) le demi plan fermé de frontière (OA) contenant le point D et (P_2) le demi plan fermé de frontière (OD) contenant le point A.*



a) *Hachurer* $(P_1)\cap(P_2)$ *; Comment appelle t-on cet ensemble de point.*

b) *Nommer* $(P_1)\cup(P_2)$.

2.

a) *Quels demi-plans fermés* (P'_1) *et* (P'_2) *peut-on utiliser pour définir les secteur angulaires* $\widehat{COA}$ *et* COA *?*

b) *Remplacer les pointillés par les symboles mathématiques «∪» ou «∩» :*

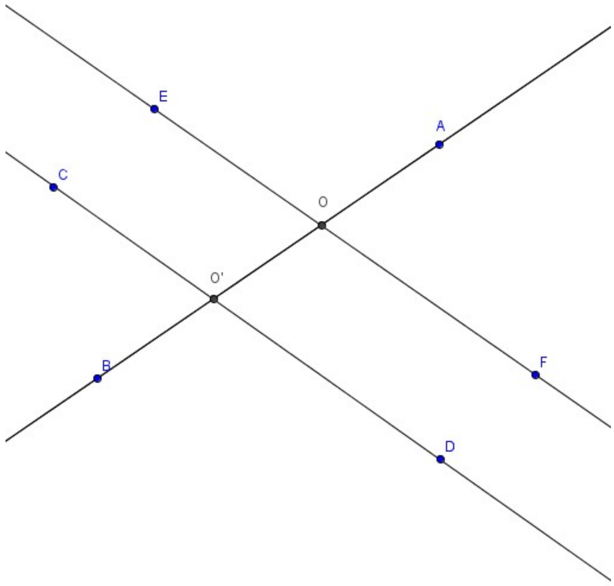
i) $M \in C\hat{O}A \Leftrightarrow M \in (P'_1)......(P'_2)$

ii) $M \in C\check{O}A \Leftrightarrow M \in (P'_1)......(P'_2)$

3. Proposer alors une définition des secteurs angulaires $B\hat{O}D$ *et* $B\check{O}D$ *?*

4. Quels secteurs angulaires particuliers aurait-on eu si les droites (AB) et (CD) étaient confondues ?

Activité 5.2. *En observant la figure ci-contre où (EF)//(CD),*



1.

a) *Les secteurs angulaires $A\hat{O}D$ et $A\check{O}'F$ sont-ils égaux ? Déterminent-ils le même angle ?*

b) *Citer d'autres secteurs angulaires de la figure qui déterminent le même angle que $A\hat{O}D$.*

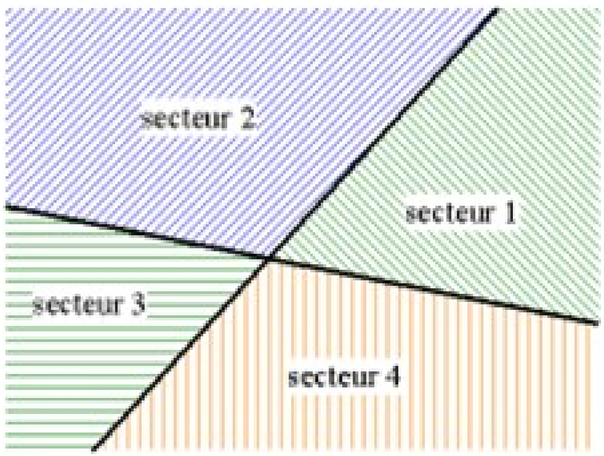
2. Indiquer les familles de secteurs angulaires de la figure qui déterminent le même angle.

3. Quelle définition peut-on donner d'un angle, d'une mesure d'angle.

5.1 Angles géometriques

5.1.1 Secteur angulaire

Définition 5.1. *Un secteur angulaire est un ensemble de points obtenue par intersection ou réunion de deux demi-plans fermés délimités par des droites sécantes ou confondues.*



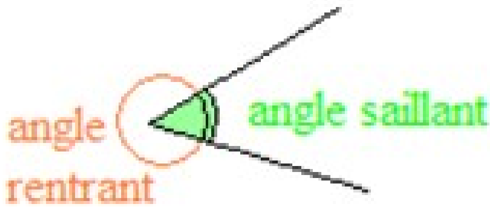
Définition 5.2. *L'angle d'un secteur angulaire est un ensemble de secteur angulaire superposable*

.

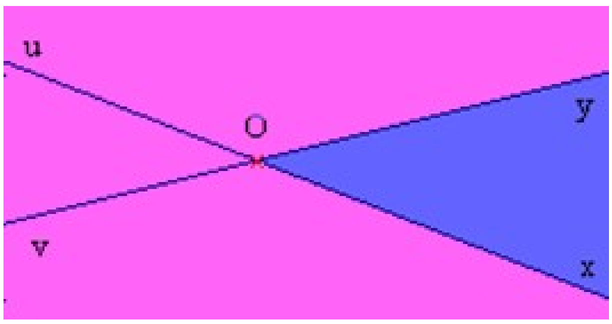
Définition 5.3. *la mésure d'un secteur angulaire est le nombre reel positif qui mesure la proportion du plan occupée par le secteur angulaire. Les unités utilisées pour le quantifier sont le radian et ses subdivisions le degré, ses sous-unités et le grade.*

Remarque 5.1. Les angles sont fréquemment notés par une lettre grecque minuscule, par exemple α, β, γ, δ.Lorsque l'angle est au sommet d'un polygone et qu'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilise alors le nom du sommet surmonté d'un chapeau, par exemple Â. L'angle peut aussi s'interpréter comme l'ouverture du secteur angulaire, c'est-à-dire la " vitesse " à laquelle s'éloignent les droites l'une de l'autre lorsque l'on s'éloigne du point.

Définition 5.4. *Un secteur angulaire saillant est l'intersection de deux demi-plans dont les frontières (xu) et (yv) sont deux droites ayant en commun au moins un point O, appelé sommet. Les demi-droites [Ox) et [Oy) s'appellent les côtés. Notation :*$[x\hat{o}y)$



Un secteur angulaire rentrant est la réunion de deux demi-plans dont les frontières (xu) et (yv) sont deux droites ayant en commun au moins un point O, appelé sommet. Les demi-droites [Ox) et [Oy) s'appellent les côtés. Notation : $[x\check{o}y)$



En bleu, le secteur saillant $[x\hat{o}y)$ *. En violet, le secteur rentrant .*$[x\check{o}y)$

secteur angulaire (1) : Un secteur angulaire saillant est convexe, un secteur rentrant ne l'est pas.

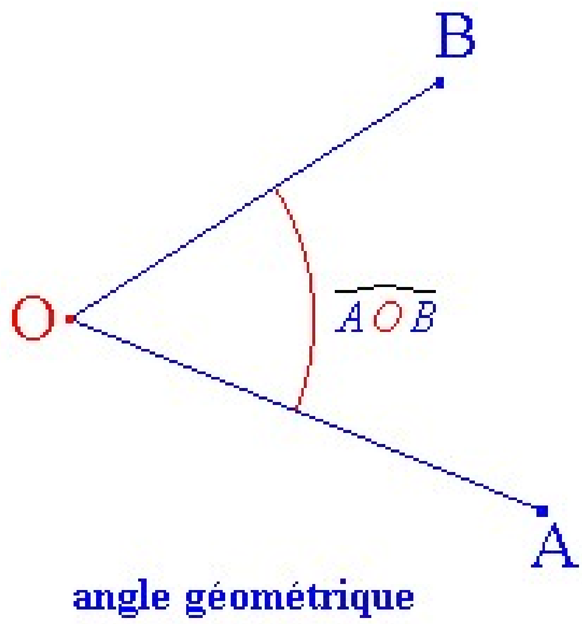
5.1.2 Angles géométriques

Définition 5.5. *Un angle géométrique est un ensemble de secteur angulaire pouvant être représenté par des secteur angulaire superposable.*

Remarque 5.2. On peut l'interpréter de plusieurs façons : divergence entre deux directions, directions des faces d'un objet (coin), direction visée par rapport au nord (angle donné par une boussole) $\widehat{BAC}$ est un angle géométrique. On a par ailleurs : $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$? On confond fréquemment " mesure de l'angle " et " angle ".

Remarque 5.3. un angle " plat " est appelé abusivement angle " égal " à 180^0. Cet abus est appliqué largement et volontairement dans la suite de cet article. D'autre part un angle droit par exemple, peut être représenté par plusieurs secteurs angulaires différents, mais comme ils sont tous " superposables ", ils représentent tous le même angle.

En mathématiques on parle de " classe d'équivalence ".



5.2 Angles orientés

Activité 5.3. *1. Rappeller la définition de mesure principale d'un angle.*

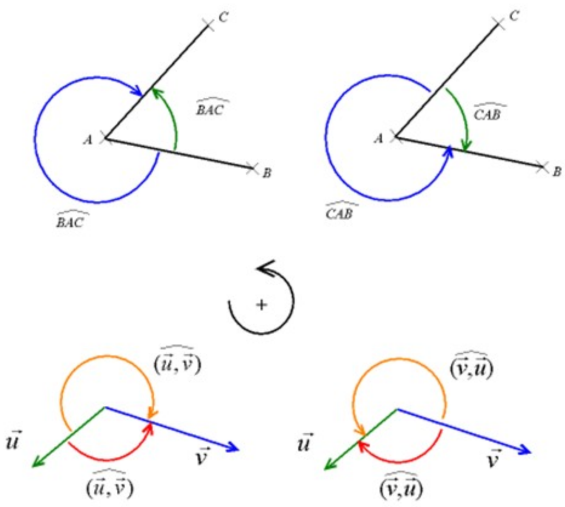
2. Representer les angles de vecteurs dont les mesures sont les suivants ? $(\widehat{\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}}) = \frac{-\pi}{4}$ $(\widehat{\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}}) = \frac{\pi}{3}$ $(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{W}}) = \frac{\pi}{4}$

3. representer l'angle dont la mesure vaut $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$

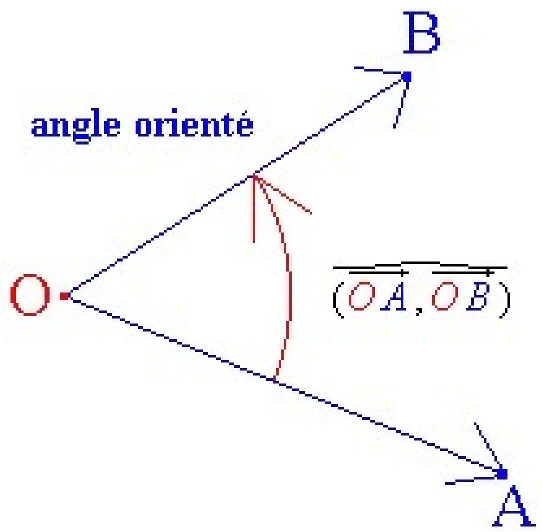
4. Que remarquer vous ?

Remarque 5.4.

Un angle géométrique $\widehat{AOB}$ correspondant à deux angles orientés distincts $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$



Définition 5.6. *On appelle angle orienté* $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ *toute mesure de l' arc orienté intercepté par cet angle.*



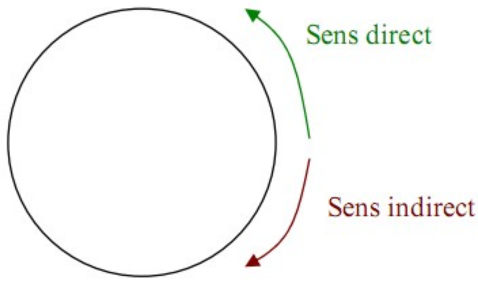
5.3 Orientations du plan

Activité 5.4. 1. *Rappeller la notion de sens trigonométriqe.*

2. *que signifie orienté un plan, un cercle ?*
3. *Representer les angles de vecteurs dont les mesures sont les suivants ?* $(\widehat{\overrightarrow{V},\overrightarrow{W}}) = \frac{-\pi}{4}$ $(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{W}}) = \frac{\pi}{4}$ $(\widehat{\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}}) = \frac{-\pi}{3}$, $(\widehat{\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}}) = \frac{\pi}{3}$,

5.3.1 Cercles orientés

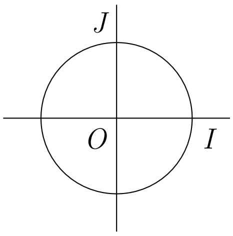
Imaginons le déplacement d'un automobiliste autour d'un rond point donné ; cela nous présente l'idée de deux sens de parcours sur tout cercle du plan. Sur un cercle donné ; il existe deux sens de parcours .



ce cercle est orienté dans deux sens , un sens positif (sens contraire au sens des aiguille d'une montre)et un sens négatif(sens des aiguille d'une montre)

5.3.2 Plan orienté

Orienter un plan c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens ; ce sens est appelé sens direct Ont considère généralement le sens direct comme étant le sens contraire du sens des aiguilles d'une montre.



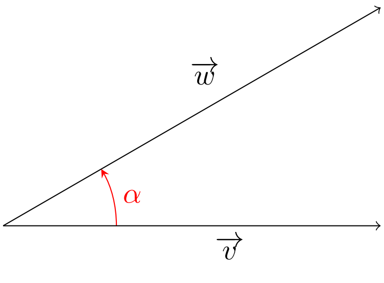
5.3.3 Angles orientés de deux vecteurs

Activité 5.5. *Soit $(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})$un couple de vecteurs non colinéaires X et Y les points du plan tels que $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{V}$ Désignons par M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX] et[OY] .avec le cercle de centre O ;*

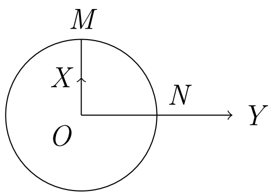
- *comparer les mesures des angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{NOM}$?*
- *que pouver vous en conclure et quel interprétation en faite vous*

SOLUTION *On a $\widehat{MON}$ et $\widehat{NOM}$ désigne le même angle, l'arc MN peut être parcouru de M vers N.*

Pour donc restituer cette situation ,on définit un nouveau type d'angle construit à partir des couples $(\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})$ et$(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$



qui sont considéré ici comme étant opposés.



Définition 5.7. *soient* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *un couple de vecteurs non nuls tels que* $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{v}$ *, M et N les point d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et[OY) .avec le cercle de centre O ;*

- *l'ensemble des couples* $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) dedeuxvecteursnoncolinairespourlesquelsl'arc\overline{MN}$ *garde la même mesure et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé angle orienté et noté* $\widehat{BAC}$
- *l'ensemble des couples (* $\overrightarrow{u}\overrightarrow{V}$ *)pour lesquels les vecteurs* $\widehat{u}$ *et* $\widehat{v}$ *sont colinéaires et de même sens , est l'angle orientés nul .*
- *l'ensemble des couples* $(\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}$ *)pour lesquels les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaireset de sens contraire est l'angle orienté plat.*

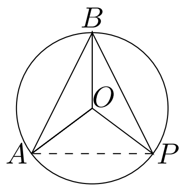
5.3.4 Mesure d'un angle

Radian

Activité 5.6. *Considérons le cercle de rayon l'unité dans le plan et de centre O. Que vaut le périmetre de ce cercle ? En définissant une nouvelle unité de mesure de l'angle sur le cercle de rayon 1 avec A et B deux points du cercle, quelle sera la mesure de l'angle* $\widehat{AOB}$ *qui est l'angle aux centre intercepté ?.*

SOLUTION.

Le périmètre de ce cercle est : 2× π *(figure)*



Soit A et B les deux points du cercle de centre O tels que le présente la figure ci-dessus. Etant donnée que l'arc $\overline{AB}$ *est intercepté par l'angle au centre* $\widehat{AOB}$ *, cet angle et l'arc intercepté auront même longeur.*

Définition 5.8. *La mesure en radian d'un angle* $\widehat{MON}$ *est égale à la longeur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon l'unité .*

On la note mes $\widehat{MON}$

Activité 5.7. *Déterminer en radian la mésure des angles suivant donnés en dégre* $60, 45, 30, 0, 180, 90, 0.$ *?*

Solution

Soit à determiner en radian la mesure des angles 60 ,45 ,30 ,0, 180 ,90, 0. donnés en degré.

On sait d'avance que comme le périmètre vaut 2π ; dans le cercle unité, on aura donc

$180^0 \longrightarrow \pi$

$y^0 \longrightarrow x$ *avec y la mesure en degré et x le résultat obtenu :*

$y^0 \times \pi = x \times 180 \Longrightarrow x = \dfrac{y^0 \times \pi}{180^0}$ *ceci à travers la règle de 3 et là on obtient les résultats mentionné dans le tableau de proportionnalité ci - dessous.*

x	*Mesure en degr*	180^0	90^0	60^0	45^0	30^0	0^0
y	*Mesure en radian*	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

5.4 Mesure principale d'un angle

Définition 5.9. *soient* $(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})$ *un angle orienté , M et N les points d'intersection respectifs des demi- droites [OX) et[OY) avec un cercle de centre O. On appelle mesure principale en radian de l'angle orienté*

$(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})$ *noté Mes*$((\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}))$*, le réel définie par :*

- *Si* $(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})$ *est l'angle nul,Mes* $(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}) = 0$;
- *Si* $(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})$ *est l'angle plat , Mes*$(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}) = \pi$;
- *Si* $(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})$ *n'est plat ni nul ,alors Mes*$(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}})=\widehat{XOY}$

lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc MN et Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}) = -\widehat{XOY}$ *lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc MN est indirect .*

Remarque 5.5. Les angles orientés sont égaux si et seulement si ils ont le même sens et la même mesure principale.

5.5 Travaux dirigés (angles orientés de vecteurs)

Activité 5.8. *Considérons 3 points A , B , C non alignés; g une application du plan dans lui même .A ',B' ,C' leurs images respectives par g , On a les résultats suivants.*

- *si g est une symétrie orthogonale, alors* $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ *sont opposés.*
- *si g est une symétrie centrale, alors* $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ *sont égaux.*

On peut donc généraliser en disant que : Les symétries orthogonales transforment les angles orientés en leur opposés et

les translations et les symétries centrales conservent les angles orientés.

Remarque 5.6. Les angles orientés de vecteurs forment un groupe

Somme d'angles orientés La somme est définie en tirant en arrière le long de la bijection S la composition dans SO(2). En confondant un représentant avec sa classe, cela donne :

$$(u,v)+(z,t):=S^{-1}[S(u,v)\circ S(z,t)]$$

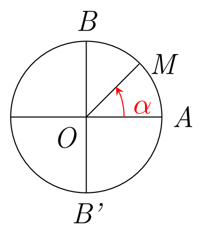
" Le groupe des angles orientés de vecteurs est commutatif, comme SO(2). " Avec T(u,v)oT(v,w)=T(u,w) on obtient pour les angles la relation de Chasles (u,v)+(v,w)=(u,w) " L'angle plein correspond à l'identité : (u,u) = 0 " (v,u)+(u,v) = (v,v) = 0 et donc (v,u) est l'opposé de (u,v) " L'angle plat est la moitié d'un plein : (-Id) o (-Id) = Id. L'angle plat s'écrit donc (u,-u). " Il y a deux angles droits, solution de 2(u,v)=(u,-u)[1].

5.6 Notion de trigonométrie

5.6.1 Cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé ($\overrightarrow{O}$, $\overrightarrow{I}$,$\overrightarrow{J}$)

Définition 5.10. *Un cercle trigonométrique est cercle de centre O et de rayon 1 et est orienté positivement dans le sens direct. on a OM=OA=1*



5.6.2 Utilisation du cercle trigonométrique

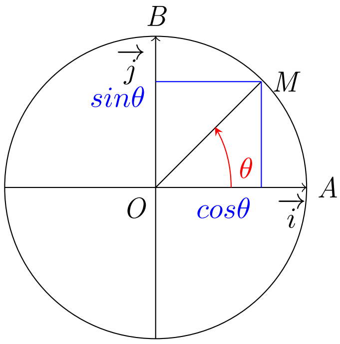
Sinus et Cosinus d'un angle orienté.

Remarque 5.7. Nous travaillerons dans une base orthonormée directe
($\overrightarrow{I}$,$\overrightarrow{J}$) , c'est-à dire que mes($\overrightarrow{I}$,$\overrightarrow{J}$) =($\frac{\pi}{2}$) (Dans une base indirecte),
on a
mes($\overrightarrow{I}$,$\overrightarrow{J}$) = -($\frac{\pi}{2}$). Soit θ un angle de vecteurs et M le point du cercle trigonométrique tel que($\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{OA}$) = θ

Par définition, on a :

cosθ=abscisse de M

sin θ= ordonnée de M



Remarque 5.8. Remarquons également que $\overrightarrow{OM}$ =($\cos\theta$) $\vec{I}$ + ($\sin\theta$) $\vec{I}$ On retrouve les définitions du sinus et du cosinus dans un triangle rectangle :

$cos\theta$=$\frac{cotadjacent}{hypothnuse}$ = *coté adjacent car OM =1.*

$sin\theta$=$\frac{cotoppos}{hypothnuse}$= *coté opposé car OM =1.*

Remarque 5.9. Si θ est une mesure (en radians) d ' un angle de vecteurs , alors toutes autre mésure : θ' =θ + k.2 π avec k dans Z Donc :

cos x=cos(x + k.2π) avec k dans Z

sin x = sin(x + k.2π) avec k dans Z

2. ***Formules essentielles***

$cos^2x + sin^2x = 1$

$-1x \leq 1$ $-1x \leq 1$

Activité 5.9.
- *Déterminer l'abscisse maximal et l'ordonné maximal de tous points situer sur le cercle trigonométrique ?*
- *placer x et x sur le cercle trigonométrique, que peut ont conclure.*
- *soit M(x ,x) calculer la norme du vecteur OM.*
- *conclure.*

5.6.3 Ligne trigonométrique d'un angle associé

1. Angles associés

cos(-x) = cos x

cos (π + x)= -cos x

cos(π- x) = -cos x

cos($\frac{\pi}{2}$ + x) =-sin x

$\sin(-x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

2. Formules d'addition

cos(a + b) = cos a.cosb - sin a.sin b

cos(a- b) = cos a.cosb + sin a.sin b

sin(a - b) = sin a.cosb - cos a.sinb

sin(a + b) = sin a.cosb + cos a.sinb

Remarque 5.10. On peut retrouver toutes les formules à partir de la 2ème formule (la plus simple) :

cos(a - b) = cos a.cosb + sina.sin b

Retrouvons cos(a + b) :

cos(a + b) = cos(a - (-b)) = cos a.cos(-b) + sin a.sin(-b)

cos(a + b) = cos a.cosb + sin a.(-sin b)

cos(a + b) = cos a.cosb - sin a.sin b

3. Formules de duplication

sin 2a = 2.sin a.cos a . Pour retrouver cette formule :

$$\begin{aligned} \sin 2a &= \sin(a + a) \\ &= \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a \end{aligned}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Pour retrouver la formule :

cos 2a = cos(a + a) = cos a.cos a -sina.sin a

=$cos^2 a$ *-* $sin^2 a$

=1- $2sin^2 a$

= $2\ cos^2 a$ *-1*

car $cos^2 a + sin^2 a = 1$

6 PROPRIETES

Activité 6.1. *Soit (c) un cercle de rayon R=5 et α la mésure de l'angle au centre. Déterminer la longueur de l'arc intercepté par cet angle.*

Propriété 6.1. *Sur un cercle de rayon R , la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure α en radian est $R\alpha$*

Activité 6.2. *Considérons un cercle de centre O et x la longueur d'un arc et θ la mesure de l'angle au centre qui l'intercepté .*

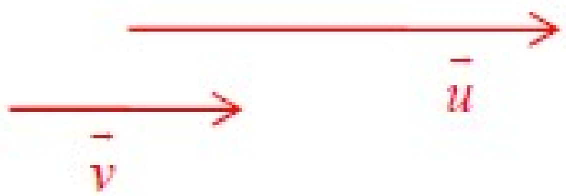
- *etablir une relation θ(mesure en dégreà) et la mésure en radian de cet angle.*
- *Exprimer x en fontion de R et θ*

Activité 6.3. *Soient θ=120degrés donner l'equivalent de cet angle en RADIAN, DEGRE ET GRADE ?*

Propriété 6.2. *En genéral on dira que les quatre unités principales de mesures d'angles sont :* ***le TOUR,LE RADIAN, LE DEGRE ET LE GRADE*** *on a :* ***1tour = 360 degrés = 2πradian = 400 grades***

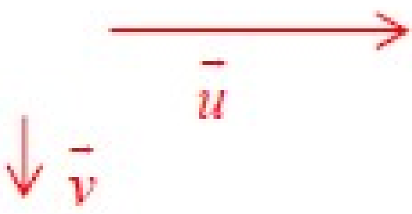
Propriété 6.3. *Quelques propriétés des angles orientés*

- *si $\overrightarrow{u}$et$\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens :* $(u, v) = 0 + k.2\pi$ *avec* $k \in Z$



- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraires* $(u, v) = \pi + k.2\pi$ *avec* $k \in Z$

- *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (\frac{\pi}{2}) + 2k\pi avec k \in Z$ *ou* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = (-\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ *avec* $k \in Z$ *ou bien* $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ $k \in Z$



Relation de Chasles *: La relation de Chasles pour les angles de vecteurs se définit ainsi :* $(\vec{u},\vec{w}) + (\vec{w},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$

Exemple :

Soient 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls et tels que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{7\pi}{6}$ et $\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\frac{4\pi}{3}$

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Solution :

D'après la relation de Chasles, on sait que : $\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)$

Donc $\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\frac{7\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi+8\pi}{6}=\frac{15\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$

$\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Activité 6.4. *soit α appartenant]-π,π] et une demi-droite (AB] démontrer qu'il existe une unique demi-droite (AC]telle que Mes*$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ $=\alpha$

Propriété 6.4. *Étant donné un nombre réel α appartenant]-π,π],*
et une demi-droite (OX],il existe une seule demi-droite (OY] telle que : Mes$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ $=\alpha$.

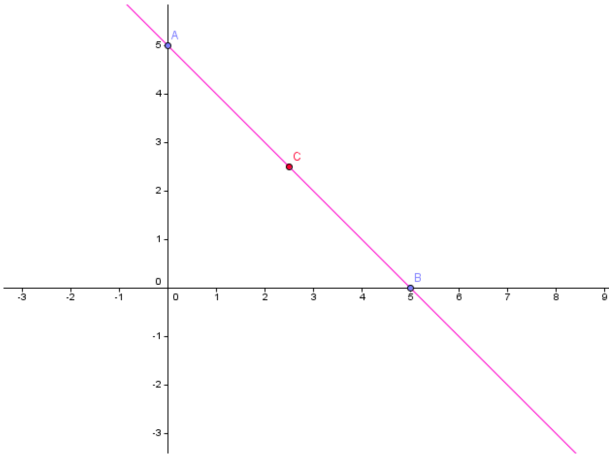
Activité 6.5.

- *tracer un cercle de centre O et placer les points M et N intersection de ce cercle avec les demi-droites (OX] et (OY] tel que Mes*$(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ $=\alpha$
- *Etudier les cas ou : α=0, α= π,*
- *Quand est t'il si $\alpha \in$ [0,π] ,si $\alpha \in$]-π,0].*

– *Que peut t'on conclure ?*

Propriété 6.5. *soient A, B et C 3 points distincts du plan complexe d'affixe respectives Z_A Z_B et Z_C .*

Si les points A , B , C sont alignés ; alors ont a mes$'\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv 0[\pi]$
et $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$



Propriété 6.6. *L'éspace est muni du repére orthonormé direct*
$(O\ ,\ \vec{I},\vec{J},\vec{K})$.
Soit A ,B ,C ; trois points de cet espace.

Pour démontrer que ces trois points sont alignés, on peut démontrer que

$(\ \vec{AB} \wedge \vec{AC}) = \vec{0})$

.

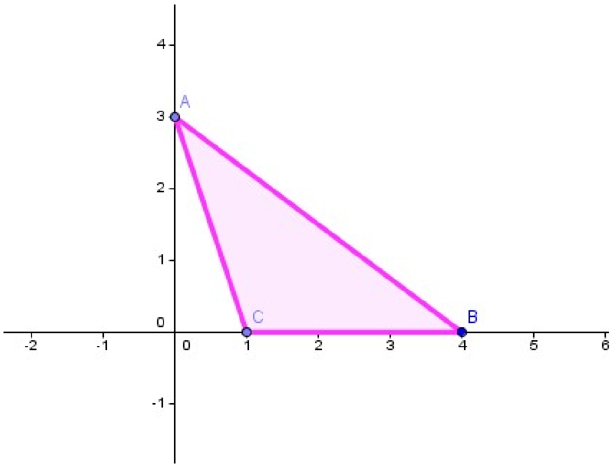
Propriété 6.7. *soient A, B , C 3 points distincts du plan complexe d'affixes respectives Z_A, Z_B , Z_C .*

- si (AB) est orthogonal à (AC) c'est -à -dire mes$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\ 2\ \pi]$ *alors on a* $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = bi,$

$(b \in R\ )$

- si ABC est un triangle isocèle de sommet A ;alors AB= AC et mes$\overrightarrow{A} = \alpha$ *et* $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ *ou bien* $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \exp i\alpha$ *ou* $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \exp -i\alpha$ *avec* $\alpha \neq k\pi\ (k \in Z\ )$

-si ABC est un triangle équilatéral ;alors AB= AC (= BC) et mes$\overrightarrow{A} = \frac{\pi}{3}$ *ou bien* $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \exp i\frac{\pi}{3}$ *ou* $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \exp -i\frac{\pi}{3}$



Activité 6.6. *le plan est muni d'un repére orthonormé (OIJ). soient quatres points du plan A(-1,1), B(-1,-1), C(1,-1) et D(1,1).*

- *placer ces points dans le repére.*
- *déterminer les distances OA OB OC et OD.*
- *que constater vous ?*
- *demontrer enfin les points A B C D appartiennent a un unique cercle.*

Propriété 6.8. ***Condition de cocyclicité :***

les points distints $A(a)$*,* $B(b)$*,* $C(c)$ *et* $D(d)$ *sont cocycliques si et seulement si :*

$$\frac{c-b}{c-a} \div \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}$$

Activité 6.7. *considéront A ,B, C ,D quatre points du plans appartenant a un cercle .*

1. *Montrons que mes*$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv$ *mes*$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ $[\pi]$.
2. *Demontrons que arg*$(\dfrac{Z_{CB}}{Z_{CA}} \div \dfrac{Z_{DB}}{Z_{DA}}) = K\pi)$.
3. *En déduire que* $(\dfrac{c-b}{c-a} \div \dfrac{d-b}{d-a}) \in \mathbb{R}$.

7 QUELQUES APPLICATIONS

7.1 ANGLE ORIENTE ET POSITION RELATIVE DES POINTS

Ici il est question de montrer à l'élève quelque applications des angles orientés dans le plan .

7.2 Cas des points alignés

Exercice 7.1. *soient* $A(-\frac{1}{3}\text{-}2i)$, $B(1+2i)$, $C(-\frac{7}{3}\text{-}2i)$ *trois points du plan complexe*

Démontrer que B est le milieu de [AC] en déduire que les points A,B,C sont alignés.

Solution

démontrons pour cela que $\frac{Z_C+Z_A}{2}=Z_B$. *On à :* $\frac{Z_C+Z_A}{2}=-\frac{7}{3}\text{-}2i+\text{-}\frac{1}{3}\text{-}2i_{\frac{}{2}}=\frac{6}{3}+4i_{\frac{}{2}}=1+2i=Z_B$

Donc le point B est le milieu de [AC] par consequent on a $mes'\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$ *D'ou les points ABC sont alignés.*

7.3 Cas des points non alignés

Exercice 7.2. *soient A(-1,1,2), B(1,1,-2), C(1, 2 ,3) trois points de l'espaces. verifier que les points A, B ,C ne sont pas alignés ?*

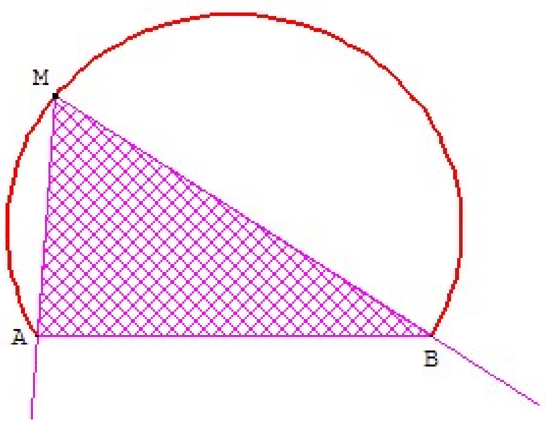
Solution

le produit vectoriel à pour coordonnées (4, -10 ,2) $\neq (0,0,0)$ *donc les points A ,B ,C ne sont pas alignés .*

7.4 ENSEMBLE DES POINTS : ARCS DE CERCLE CAPABLES

On montre dans cette partie à l'élève comment utiliser les angles orientés pour faire des transformations ponctuelles.

Activité 7.1. *A et B sont deux points distints donnés du plan. Le problème consiste à trouver l'ensemble L des points M du plan tels que l'angle* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ *soit égal à* β. *(*β *donné en degrés entre -180° et 180°).*



Construction de l'arc capable

Reporter l'angle a le long de [BC) et on trouve une tangente [AT) au cercle circonscrit. La perpendiculaire en B à cette tangente rencontre la médiatrice de [BC] en O centre du cercle. L'arc *capable AMB est situé sur le cercle de centre O passant par A. C'est le lieu des points M d'où l'on " voit " le segment [AB] suivant l'angle a.*

Définition 7.1. *Angle au centre et mesure d'un arc :*

On appelle Angle au centre L'angle géométrique $\widehat{BOC}$

(sa mesure n'excède pas 180°) dont le sommet est le centre O du cercle et intercepte l'arc BC. On parle également d'angle au centre interceptant la corde BC.

Définition 7.2. *On appelle arc capable de l'angle $\widehat{BMC}$ L'ensemble des points M du plan d'où l'on voit un segment [BC] sous un même angle, c'est à dire tel que $\widehat{BMC}$ garde une même mesure α.c' est un arc de cercle construit sur [BC].*

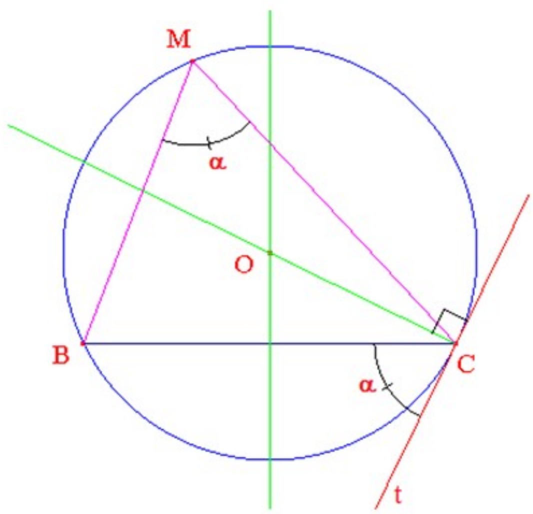
7.4.1 Programme de construction de l'arc capable $\widehat{BMC}$

1. On trace la médiatrice de [BC] ;

2. Soit $\widehat{BCT}$ de mesure α ;

3. On trace la perpendiculaire à (CT) passant par C ; elle coupe la médiatrice de [BC] en O ; T est la tangente au cercle en C

4. On trace le cercle de centre O passant par A ; L'arc capable de l'angle α est l'arc interceptant [BC] non contenu dans $\widehat{BCT}$ c'est -à- dire $\widehat{BOC}$.



7.5 COCYCLICITE, ANGLES ORIENTES, SIMILITUDES PLANES

L'objectif ici est d'utiliser les angles orientés pour démontrer certaines situations en géométrie.

7.6 Travaux dirigés sur la cocyclicité

Exercice 7.3. *soient A(-1+i), B(-1-i), C(2i) et D(2-2i) quatre points du plan complexe*

Démontrer que les points A, B , C, D appartiennent à un même cercle.

Solution

Pour cela vérifions si le rapport $\frac{Z_C - Z_B}{Z_C - Z_A} \div \frac{Z_D - Z_B}{Z_D - Z_A} \in \mathbb{R}$

On a :$\frac{2i - -1 - i}{2i - -1 + i} \div \frac{2 - 2i - -1 + i}{2 - 2i - -1 + i} = 3\frac{2i+4}{2i+4} \in \mathbb{R}$

D'ou les point A, B, C, D appartiennent à un même cercle.

7.7 Travaux dirigés sur les angles orientés et similitudes planes

Solution activité1

retourner à activité **??** *page***??**

8 EXERCICES CORRIGES

Exercice 8.1. *Soit (AB) une droite, C un point n'appartenant pas à (AB), C' le symétrique de C par rapport à (AB). Comparer les mesures des angles et* $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$*et* $(\widehat{\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}})$

1. Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ *à l'aide des angles* $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$ *et*

2. Comparer$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ *et*$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}})$ *d'une part et*$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ *et* $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}})$*d'autre part.*

3.Comparer alors $\widehat{\overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{C'B}}$ *et* $\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}$.

Exercice 8.2. *Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ;u ;v).*

L'unité graphique est de 3cm.

On considère les points B,C,D,E définissant le carré de sens direct BCDE,

d'affixes respectives : b=1-i ; c=-1-i ; d=-1-3i et e=1-3i .

1) Calculer |b|, |c|, |d| et |e|.

2) Soit $\urcorner$ *le cercle de centre O passant par B. Determiner une*

équation du cercle $\urcorner$ *.*

On considère Q un point de $\urcorner$ *distinct de B et C. L'affixe de Q est*

notée q=x+iy (avec x et y réels).

3) Soient F et G les points du plan tels que QBFG soit un carré de sens

direct, c'est-à-dire tels que $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QG}) = \frac{\pi}{2}$.

On pose $Z = \frac{(g-q)}{(b-q)}$ *où g est l'affixe du point G.*

Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En

déduire Z.

4) Prouver que $g = (1 + x + y) + i(1 - x + y)$. En déduire |g| en fonction de x et y.

5) En utilisant la question 2, exprimer |g| en fonction de y.

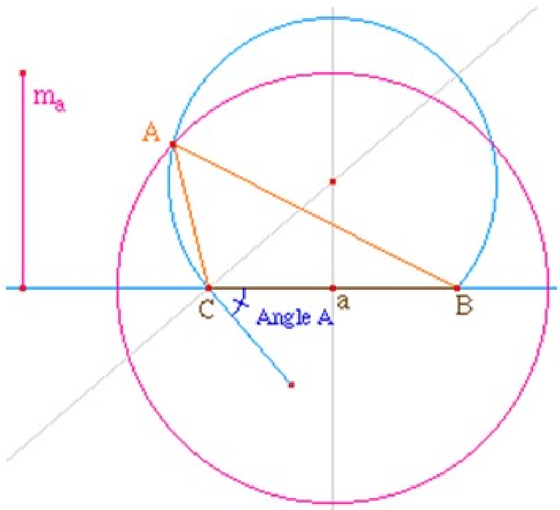
6) A l'aide de considérations géométriques, prouver que |f|=|g|, f étant l'affixe du point F.

7) Pour quelles valeurs de x et y les points E, D, G et F sont-ils sur un cercle de centre O ? Préciser le rayon de ce cercle.

Exercice 8.3. *(application immédiate des résultats) Construire un triangle ABC connaissant l'angle en A le côté a = BC et la médiane ma issue de A.*

Solution

On se donne deux points B et C. Il y a deux solutions, le point A ci-contre et son symétrique par rapport à la médiatrice de B et C.

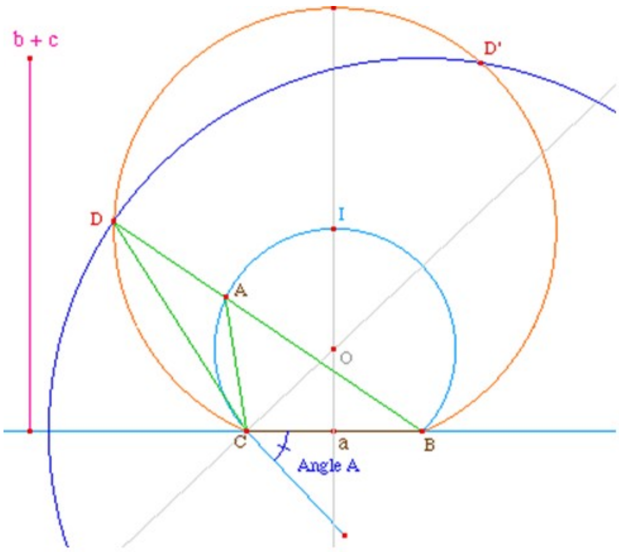


Exercice 8.4. *(sur la base d'une utilisation du précédent) Construire un triangle ABC connaissant l'angle en A le côté a = BC et la somme b+c des deux autres côtés (b = AC et c = AB).*

ANALYSE RAPIDE :

paragraphe 7.1 page 17

Supposons la figure faite (avec l'arc capable contenant le point A, à partir de [BC]). Si on prolonge sur [BA) le segment [BA] en D tel que BD = b + c, nécessairement DAC est isocèle, d'angle en D et C la moitié de l'angle A. Donc D est à l'intersection du cercle de centre B de rayon b+c et de l'arc capable d'angle moitié de A pasant par B et C, dont le centre et le point I intersection de la médiatrice de [BC] et de l'arc capable (déjà tracé) contenant le point A.



http://www.google.fr

Références

[1] Collection CIAM

[2] Collection Monge

Références

[1] bitmatm.com

[2] mathematique tles.com