APPLICATIONS AFFINES DU PLAN EN TERMINALE "C"

Rédigé par

Armel Yvan TOUNGAINBO SIGOMNOU, 06A0267.

En vue de l'obtention du

Diplôme Professionnel d'Enseignement Secondaire Deuxième Grade.

Dirigé par

Dr Alphonse MBA (Chargé de Cours).

M. Jean Pierre ADJABA BIWOLI (IPN).

M. Pascal Peguy TSOULEU (PLEG).

Yaoundé, le 17 juin 2013

♣♣ Dédicaces ♣♣

À ma maman ***Odette KUISSEU Epse SIGOMNOU***

Je te dédie ce travail.

♣♣ Remerciements ♣♣

Tout seul on ne peut arriver à bâtir. Sans vous je n'aurais jamais pu mener à terme ce travail.
Ma reconnaissance va tout d'abord à mon directeur de mémoire, Docteur Alphonse MBA, enseignent de géométrie à l'école normale supérieur de Yaoundé, pour le grand intérêt qu'il a porté à mon sujet de mémoire, pour sa sympathie, sa constante disponibilité, ses judicieux conseils et ses nombreuses idées constructives. Ses nombreuses relectures de mon manuscrit et ses ingénieuses idées m'ont permis d'améliorer mon mémoire. Je remercie les membres du jury qui ont bien voulu consacrer un peu de leur précieux temps à l'examen de ce mémoire, recevez ici toute ma gratitude et ma reconnaissance. Je remercie l'Université de Yaoundé I, l'école normale supérieur et le département de mathématique pour la disponibilité des infrastructures dont ils regorgent et qu'ils ont bien voulu mettre à ma disposition. Je remercie particulièrement M. Désiré Magloire FEUGUENG, pour m'avoir autorisé à utiliser les équipements du laboratoire de mathématique. Ma reconnaissance va aussi à mes enseignants du département de mathématiques pour leur disponibilité à me faire comprendre les notions importantes qui ont grandement facilité la construction de ce mémoire et façonné ma vision du monde. Sans oublier les inspecteurs M. ADJABA et M. POKAM, mon encadreur du lycée M. TSOULEU pour leur volonté à me faire comprendre les notions de pédagogie et didactique.
Un merci chaleureux à mes parents et à mon oncle Jacques Barnabé NANA, sans lesquels ce travail n'aurait pu avoir lieu. Vous m'avez tellement fait confiance pendant toutes ces années. Un grand merci à mes camarades du DI.P.E.S II Mathématiques de la promotion 2011/2012 plus particulièrement DEH, KAMBOU, KOUOMOGNE, YEPDJOUO. Je remercie également tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

♣♣ Résumé ♣♣

Les applications affines du plan ne font pas l'objet d'une étude explicite dans le livre programme du Cameroun([6]), néanmoins quelques applications affines du plan sont objet d'étude dans ce livre programme. Dans ce mémoire, nous élaborons d'abords un cours détaillé sur la notion d'application affine du plan ; dans cette partie nous montrerons que ces applications conservent le barycentre et le coefficient de colinéarité ; l'étude des propriétés de quelques applications affines du plan est consacrée à la dernière partie de ce cours. Ensuite, nous construisons une série de trente exercices sur ces applications affines du plan regroupés par objectif. Enfin une réflexion pédagogique sur la notion de marques d'une application affine du plan termine le mémoire ; premièrement il est présenté dans cette partie un constat sur les difficultés à résoudre par les élèves un type d'exercices ; deuxièmement une séquence d'enseignement sur la notion de marque d'une application affine du plan et troisièmement une résolution et une classification de quelques exercices à partir de la notion de marques sont proposées.

Mots clés : Affinité, applications affines, pédagogie, réflexion pédagogique, marque.

♣♣ Abstract ♣♣

The applications closely connected of the plan are not the object of an explicit study in the book programs of Cameroon ([6]), nevertheless some applications closely connected of the plan are object of study in this book programs. In this memory, we work out accesses a course detailed on the concept of application closely connected of the plan ; in this part we will show that these applications preserve the barycentre and the coefficient of colinearity ; the study of the properties of some applications closely connected of the plan is devoted to the last part of this course. Then, we build a series of thirty exercises on these applications closely connected of the plan gathered by objective. Finally a teaching reflection on the concept of marks of an application closely connected of the plan finishes the report ; firstly it is presented in this part a constact on the difficulties of solving by the pupils a kind of exercises ; secondly a sequence of teaching on the concept of mark of an application closely connected of the plan and thirdly a resolution and a classification of some exercises starting from the concept of marks are proposed.

Key Words : Affinity, applications closely connected, pedagogy, teaching refletion, mark.

♣♣ Table des matières ♣♣

♣♣ INTRODUCTION GÉNÉRALE ♣♣

Depuis des années, un ensemble de travaux de recherche et d'initiatives de terrain visent à proposer ou à utiliser des modèles, des méthodes et des outils pour concevoir, mettre en place, exploiter et analyser les séquences d'apprentissage. Sur le plan international, on peut citer en particulier les travaux menés par *Koper* et *Tattersall*, ([4]) portant sur les langages de modélisation pédagogique ainsi que ceux de *Paquette* ([5]) conduisant à développer une approche d'apprentissage tenant compte de l'environnement. Ces travaux ont contribué à faire émerger, au sein des communautés éducatives, le concept de séquence pédagogique comme un composant essentiel des systèmes d'apprentissage . Dans International Journal of Technologies in Higher Education([7]), la séquence pédagogique se définit comme l'organisation d'un ensemble d'activités d'apprentissage ; et la modélisation pédagogique est l'acte pédagogique par lequel les différentes activités, ressources et services pédagogiques sont regroupés de façon à offrir une solution de formation. Ceci est au cœur de la conception des processus d'apprentissage intégrant des technologies numériques. La séquence pédagogique représente alors un processus d'apprentissage qui se décline en un ou plusieurs cheminements possibles pour l'apprenant ou encore qui offre une collection d'activités et de ressources pédagogiques faiblement couplées. C'est alors aux acteurs de construire de façon dynamique le processus de parcours de ces activités.

Ce mémoire qui s'inscrit dans la perspective de faciliter l'acquisition des connaissances sur la notion des applications affines du plan, s'est principalement intéressé à trois grands objectifs. Nous proposons dans le chapitre un et deux, un cours sur les applications affines du plan ; le chapitre trois est consacré aux exercices liés à ce cours ; une réflexion pédagogique et didactique sur la notion de marque d'une application affine du plan est présente au quatrième chapitre. La conclusion de ce mémoire présente un résumé étendu du travail réalisé ainsi que des perspectives envisageables à ce travail.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

APPLICATION AFFINES DU PLAN

1.1 INTRODUCTION

En géométrie, une application affine est une application entre deux espaces affines compatible avec leur structure. Cette notion généralise celle de la fonction affine en analyse. C'est *EULER* en 1948 qui est à l'origine du terme « transformation affine », car dit-il deux courbes image l'une de l'autre par une telle transformation présente entre elles une certaine affinité. Les applications affines du plan ne font pas l'objet d'une étude explicite dans le livre programme du Cameroun([6]), néanmoins l'étude de quelques applications affines du plan telles que les translations, les homothéties, les rotations, les symétries orthogonales et les isométries du plan se trouvent dans le chapitre intitulé :" Géométrie plane " vu après le calcul barycentrique et avant les conique. Les objectifs pédagogiques opérationnels de cette leçon est de caractériser, reconnaître et utiliser les applications affines du plan, l'élève devra savoir que toutes les applications affines du plan conservent le coefficient de colinéarité. Cette leçon peut être vue avant les isométries et les similitudes directes du plan parce qu'elle peut être utile aux ressources isométries du plan, similitudes et coniques. Nous aurons besoins de la ressource sur les calculs barycentriques pour construire notre ressource. Comme pré-requis il faut connaitre les opérations sur les vecteurs de l'espace, les espaces vectoriels, les applications linéaires, les calculs barycentriques et la notion de matrice. Pour atteindre nos objectifs nous allons faire une ou plusieurs activités au début de chaque paragraphe.

1.2 RAPPELS SUR LES ESPACES AFFINES

On sait bien qu'une fois qu'on a choisi un repère, le plan s'identifie à $\mathbb{R}^2$ (respectivement l'espace de dimension 3 à $\mathbb{R}^3$). On pourrait donc se contenter de faire de la géométrie dans

$\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$. Cette identification repose pourtant sur le choix d'un repère. Or, se fixer un repère une fois pour toutes n'est souvent pas la meilleure solution : il est préférable, même quand on calcule en coordonnées, d'avoir la liberté de choisir un repère bien adapté au problème posé. Le cadre naturel de la géométrie élémentaire serait donc un espace homogène, dont aucun point ne serait privilégié, ce qui n'est pas le cas dans un espace vectoriel, où le vecteur nul joue un rôle particulier et tient naturellement lieu d'origine. Moralement, un espace affine n'est rien d'autre que cela : un espace vectoriel dont on aurait oublié où se trouve l'origine. Cette définition est naturellement beaucoup trop vague pour être utilisable telle quelle. Nous allons commencer par lui donner un sens précis.

Définition 1.2.1. *Soit $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel réel de dimension deux ou trois. Un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$ est un ensemble non vide E muni d'une application $(M;N) \mapsto \overrightarrow{E}$ de $E \times E$ dans $\overrightarrow{E}$ vérifiant :*
1) Pour tout triplet (M,N,P) de points de E : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (relation de Chasles) ;
2) Pour tout point O de E, l'application $M \mapsto \overrightarrow{MO}$ de E dans $\overrightarrow{E}$ est bijective.
Les éléments de E s'appellent des points, ceux de $\overrightarrow{E}$ des vecteurs. On appelle dimension de l'espace affine E la dimension de l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$

Exemple 1.2.1. *Tout espace vectoriel est muni d'une structure naturelle d'espace affine sur lui-même par l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} - \vec{v}$. Plus généralement, l'image par une translation d'un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ d'un espace vectoriel $\overrightarrow{E}$, est un espace affine de direction $\overrightarrow{F}$.*

1.3 GÉNÉRALITÉS

Activité 1.3.1. *Soit O un point du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $f : M \mapsto M'$ telle que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OM'}$.*
Soit G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1) \dots (A_n, \alpha_n)\}$ et $G' = f(G)$.
a-) Quelle est la traduction vectorielle de : G est le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$?
b-) Montrer que $2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$.
c-) Déduire d'après les questions précédentes que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$.
d-) Sachant que $A'_i = f(A_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ que représente le point G' pour le système $(f(A_i), \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

<u>Solution de l'activité :</u>

Soit G barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

a-) G barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *signifie que* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

b-) On a d'après la relation de Chasles $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i})$.

En multipliant membre à membre par 2, on obtient :

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} &= 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) \\
2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} &= 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OA_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-2\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{OA_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (-\overrightarrow{OG'} + \overrightarrow{OA'_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{G'O} + \overrightarrow{OA'_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}.
\end{aligned}$$

Donc $2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i}$

c-) Comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ *alors* $2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ *d'après la question b-).*

d-) On a $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'A'_i} = \vec{0}$ *et* $A'_i = f(A_i)$. *Ainsi* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{G'f(A_i)} = \vec{0}$.

Donc G'=f(G) est le barycentre du système $(f(A_i), \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

<u>Noté bien :</u> *On vient de montrer que si G est barycentre du système* $(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *alors G'=f(G) est barycentre du système* $(f(A_i), \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. *On dit alors que f« conserve »le barycentre. Ainsi une application ponctuelle f qui <u>conserve le barycentre</u> est appelée une <u>application affine</u> de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$.

Définition 1.3.1. *On appelle <u>application affine</u> de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$*, toute application qui conserve le barycentre.*

Théorème 1.3.1. *L'application ponctuelle f de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *est une <u>application affine</u> si et seulement si, f <u>conserve le barycentre</u> de tout système de deux points pondérés au moins.*

Exercice 1.3.1. *Soit O un point du plan* $\mathcal{P}$ *et g l'application de de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *définie par* $g : M \mapsto M'$ *telle que* $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM'}$ *avec* $k \in \mathbb{R}^*$.

Montrer que l'application g conserve le barycentre.

Remarque 1.3.1. *Une application affine bijective est encore appelée une transformation affine du plan.*

Définition 1.3.2. *Soit f une application affine. L'application linéaire Φ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de représentant (M,N) associe le vecteur $\Phi(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$ est appelée application linéaire associée à l'application affine f.*

Noté bien *: f est alors appelée application ponctuelle associée à ϕ.*

Définition 1.3.3. *Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soit (K,K') un couple de points homologues c'est-à-dire $f(K) = K'$. On appelle application vectorielle associée à f relativement au point K (relativement au couple de points homologues(K,K')) ; l'application linéaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $\phi_k : \vec{u} = \overrightarrow{KM} \mapsto \vec{u'} = \overrightarrow{K'M'} = \phi_k(\vec{u})$.*

1.4 PROPRIÉTÉS

1.4.1 Détermination d'une application affine du plan

Détermination analytique

Activité 1.4.1. *Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère $(O;I;J)$.*
$A(3;2)$; $B(1;1)$; $C(0;1)$ trois points non alignés de $\mathcal{P}$ d'images respectives $A'(6;6)$; $B'(3;3)$; $C'(2;1)$ par une application affine f. Soit $M(x;y)$ un point de $\mathcal{P}$ d'image $M'(x';y')$ par f. Soit Φ l'application linéaire associée à l'application affine f.
a-) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$.
b-) Sachant que $\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ et $\phi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, montrer que $\phi(\overrightarrow{OI}) = \overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OJ}$.
c-) Écrire $\phi(\overrightarrow{AM})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
d-) Sachant que $\phi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$, donner l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

Solution de l'activité :

a-) On a dans le repère (O,I,J) : $\overrightarrow{AB}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A'C'} \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{A'M'} \begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \end{pmatrix}$;

b-) On sait que $\begin{cases} \phi\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'} \\ \phi\left(\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{A'C'} \end{cases}$,

$$alors \left\{\begin{array}{rcl} -2\phi\left(\overrightarrow{OI}\right)-\phi\left(\overrightarrow{OJ}\right) &=& -3\overrightarrow{OI}-3\overrightarrow{OJ} * par\,(-1) \\ -3\phi\left(\overrightarrow{OI}\right)-\phi\left(\overrightarrow{OJ}\right) &=& -4\overrightarrow{OI}-5\overrightarrow{OJ} \end{array}\right.$$

$\phi\left(\overrightarrow{OI}\right)=\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}$. *On en déduit que* $\phi\left(\overrightarrow{OJ}\right)=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$.

c-) Puisque $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$ *dans le repère (O,I,J), on peut écrire*

$$\begin{array}{rcl} \phi\left(\overrightarrow{AM}\right) &=& \phi\left[(x-3)\,\overrightarrow{OI}+(y-2)\,\overrightarrow{OJ}\right] \\ &=& (x-3)\,\phi\left(\overrightarrow{OI}\right)+(y-2)\,\phi\left(\overrightarrow{OJ}\right) \\ &=& [(x-3)+(y-2)]\,\overrightarrow{OI}+[2\,(x-3)-(y-2)]\,\overrightarrow{OJ}. \end{array}$$

d-) Sachant que $\phi(\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{A'M'}$, *on a* $[(x-3)+(y-2)]\,\overrightarrow{OI}+[2\,(x-3)-(y-2)]\,\overrightarrow{OJ}=(x'-6)\,\overrightarrow{OI}+(y'-6)\,\overrightarrow{OJ}$.

$$Ainsi \left\{\begin{array}{rcl} x'-6 &=& x-3+y-2 \\ y'-6 &=& 2x-6-y+2 \end{array}\right. ,$$

$$c'est\text{-}à\text{-}dire \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x+y+1 \\ y' &=& 2x-y+2 \end{array}\right. .$$

Définition 1.4.1. *Soit* f *l'application de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{D}$ *définie par* $f: M\,(x) \mapsto M'\,(x')$.
f *est affine si x'=ax+b avec* $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition 1.4.2. *Soient* $\mathcal{P}$ *un plan muni d'un repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *et* f *l'application de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *définie par* $f: M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$f \text{ est affine si} \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& ax+by+c \\ y' &=& a'x+b'y+c' \end{array}\right. , \text{ où } a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.4.1. *Soit* $\mathcal{P}$ *un plan rapporté à un repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$. *L'application de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *définie par* $f: M(X) \mapsto M'(X')$ *est affine si X' = AX + B où X* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ *et* $A=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$.

La matrice de l'application linéaire ϕ *associée est* $A=M_\phi=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$.

Définition 1.4.3. *Une application affine est bijective si det* (M_ϕ) *est non nul.*

Remarque 1.4.2. *Une application affine f est entièrement déterminée par la donnée de l'application linéaire associée ϕ et d'un couple de points.*

Détermination par une application linéaire associée et un couple de points

Activité 1.4.2. *Soient $\mathcal{P}$ rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et ϕ l'application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ définie par $\phi(\vec{u}) = 2\vec{u}$.*
Soit l'application affine f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ d'application linéaire associée ϕ qui au point K(1 ;2) associe K'(3 ;-1).
a-) Sachant que $f(M) = M' \iff \phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}$, montrer que $\overrightarrow{K'M'} = \phi(\overrightarrow{KM})$;
b-) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Solution de l'activité :
a-) Soit M(x ;y) et M'(x' ;y') son image par l'application affine f.
On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{K'M'} &= \overrightarrow{K'O} + \overrightarrow{OM'} \\
&= -\phi(\overrightarrow{OK}) + \phi(\overrightarrow{OM}) \\
&= \phi(\overrightarrow{KO}) + \phi(\overrightarrow{OM}) \\
&= \phi(\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OM}) \\
&= \phi(\overrightarrow{KM}).
\end{aligned}$$

b-) Puisque f(M)=M', on a $\overrightarrow{K'M'} = \phi\left(\overrightarrow{KM}\right) = 2\overrightarrow{KM}$

Ainsi $\begin{pmatrix} x'-3 \\ y'+1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

Donc $\begin{cases} x' = 2x+1 \\ y' = 2y-5 \end{cases}$.

1.4.2 Image d'une droite, d'un plan par une application affine

Image d'une droite

Activité 1.4.3. *Soient $\mathcal{P}$ un plan muni d'un repère (O,I,J) et f l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$, f(A) et f(B) leurs images par f.*
a-) Quelle est l'ensemble des barycentre de A et B.

b-) Que représente l'image de la droite (AB) pour les points f(A) et f(B).

c-) Déterminer l'image par f de la droite (AB) pour les cas suivants :

- *f(A) est égale à f(B) ;*
- *f(A) est différent de f(B).*

Théorème 1.4.1. *L'image d'une droite (AB) par une application affine f est :*

- *La droite passant par $f(A)$ et $f(B)$, si et seulement si $f(A)$ est différent de $f(B)$;*
- *L'ensemble $\{f(A)\}$ si et seulement si $f(A)$ est égale à $f(B)$.*

Remarque 1.4.3. *L'image d'une droite par une transformation affine est une droite.*
Soient $(\mathcal{D})$ et (Δ) deux droites sécantes et p la projection sur $(\mathcal{D})$ parallèlement à (Δ).
- L'image par la projection p d'une droite parallèle à (Δ) est un singleton.
- L'image par la projection p d'une droite sécante à (Δ) est $(\mathcal{D})$.

Image d'un plan

Activité 1.4.4. *Soit f une application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$. Soient A, B, C trois points non alignés et A'=f(A), B'=f(B) et C'=f(C). On pose $\mathcal{P} = (ABC)$.*

1ercas : *Supposer que les points A', B' et C' sont non alignés.*

a-) Montrer que f est bijective.

b-) Déterminer l'image par f du plan (ABC).

2^{e}cas : *Supposer que les points A', B' et C' sont alignés et non tous confondus.*

a-) Montrer que la droite (A'B') est contenue dans $f(\mathcal{P})$;

b-) Montrer que $f(\mathcal{P})$ est contenu dans (A'B') et conclure.

3^{e}cas : *Supposer que A'=B'=C' et déterminer $f(\mathcal{P})$.*

Solution de l'activité :

Soient A,B,C trois points non alignés et A' = f (A), B' = (B), C' = f (C).

1ercas : *A', B' et C' sont non alignés.*

a-) (A',B',C') est un repère du plan ; donc f est bijective.

b-) L'image du plan (ABC) est le plan passant par f (A), f (B) et f (C).

2^{e}cas : *A', B' et C' sont alignés et non tous confondus.*

a-) Sans nuire à la généralité, supposons par exemple que A' et B' sont distincts. D'après *le premier cas, f(AB)=(A'B') ; donc la droite (A'B') est contenue dans* $f(\mathcal{P})$.

b-) L'image de tout point M du plan, considéré comme barycentre de A,B et C est un point M' barycentre de A', B' et C'; donc $f(\mathcal{P})$ *est contenue dans (A'B').*

On en déduit que $f(\mathcal{P}) = (A'B')$.

3^e cas : $A' = B' = C'$.

On a : $f(\mathcal{P}) = \{f(A)\}$.

Théorème 1.4.2. *L'image d'un plan* (ABC) *par une application affine* f *est :*

- *Le plan passant par* $f\,(A)$, $f\,(B)$ *et* $f\,(C)$ *si et seulement si les trois points* $f\,(A)$, $f\,(B)$, $f\,(C)$ *sont non alignés.*
- *La droite passant par* $f\,(A)$, $f\,(B)$ *et* $f\,(C)$ *si et seulement si* $f\,(A)$, $f\,(B)$ *et* $f\,(C)$ *sont alignés non tous confondus.*
- *Le singleton* $\{f\,(A)\}$ *si et seulement si* $f\,(A)$, $f\,(B)$ *et* $f\,(C)$ *sont confondus.*

1.4.3 Conservation du parallélisme

Activité 1.4.5. *Soient* $\mathcal{P}$ *un plan rapporté au repère (O,I,J) et A, B, C, D quatre points de* $\mathcal{P}$ *tels que les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *soient colinéaires.*

Soient $\overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{C'D'}$ *les images respectives des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *par l'application affine* f.

a-) Écrire le vecteur $\overrightarrow{CD}$ *en fonction du vecteur* $\overrightarrow{AB}$;

b-) Déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $\overrightarrow{C'D'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$;

c-) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ *est non nul ;*

d-) Déduire que les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles.

Noté bien : *On dit que l'application affine conservent le parallélisme.*

Théorème 1.4.3. *Si une application affine* f *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *transforme une droite* $(\mathcal{D})$ *en une droite* $(\mathcal{D}')$, *alors elle transforme toute droite parallèle à* $(\mathcal{D})$ *en une droite parallèle à* $(\mathcal{D}')$.

Remarque 1.4.4.

- En générale une application affine ne conserve pas l'orthogonalité, les distances, le rapport des distances.

- Les images par une transformation affine du plan de deux droites strictement parallèles

sont deux droites strictement parallèles.

- Les images par une transformation affine du plan de deux droites sécantes sont deux droites sécantes.

1.4.4 Points invariants par une application affine

Théorème 1.4.4.

• *On dit que qu'un point M est invariant par une application affine f si et seulement si $f(M) = M$.*

• *On dit qu'un ensemble E est globalement invariant par f si et seulement si $f(E) = E$. C'est-à-dire pour tout point M de E, $f(M)$ appartient à E.*

• *E est dit invariant point par point si pour tout point M de E, $f(M) = M$.*

Remarque 1.4.5.

- Dire que E est globalement invariant par f ne signifie pas que tous les points de E sont fixes par f;

- Un segment [AB] est globalement invariant par la symétrie centrale dont le centre est le milieu de [AB], mais seul le milieu de [AB] est un point fixe par cette application ;

- Une droite (AB) est globalement invariante par la translation de vecteur alors que cette application n'a aucun point fixe ;

- Tous les points sont invariants par l'application identité.

1.4.5 Composée de deux applications affines

Activité 1.4.6. *Soient f et g deux applications affines du plan.*

Soient A, B, C trois points du plan et λ un nombre réel tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

a-) Montrer que $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

b-) Montrer que $\overrightarrow{g(A')g(C')} = \lambda\overrightarrow{g(A')g(B')}$. où A'=f'(A), B'=f(B) et C'=f(C).

c-) Déduire que $g \circ f$ est une application affines du plan.

Théorème 1.4.5. *La composée de deux applications affines du plan est une application affine du plan.*

Chapitre Deux

ÉTUDE DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN

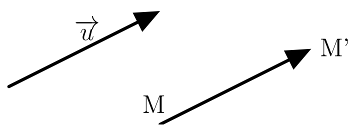
2.1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente l'étude de quelques applications affines telles que : les translations, les homothéties, les projections, les symétries et les rotations. Nous déterminerons l'expression analytique de toutes ces applications affines du plan et montrerons qu'ils conservent le barycentre, mais ne conservent pas généralement l'orthogonalité, les distances et le rapport des distances.

2.2 HOMOTHÉTIE-TRANSLATION

2.2.1 Translation

Définition 2.2.1. *On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée : $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M de $\mathcal{P}$ associe M' tel que : $t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.*



Points invariants par une translation

Théorème 2.2.1. *Si $\vec{u} = \vec{0}$, tout point est invariant ; sinon on a pas de points invariants.*

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une translation

Théorème 2.2.2. $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.$

Démonstration 2.2.1. *Soient M' et N' les images respectives de M et N par $t_{\vec{u}}$. On a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = -\vec{u} + \overrightarrow{MN} + \vec{u} = \overrightarrow{MN}$.*

Remarque 2.2.1. *La bijection réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{\vec{u}}^{-1} = t_{\vec{-u}}$, et $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.*

<u>Expression analytique d'une translation</u>

Activité 2.2.1. *Soient $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.*

a-) Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.

b-) En déduire l'expression analytique de l'application linéaire associée et sa matrice.

<u>Solution de l'activité :</u>

a-) Soit $M\,(x; y)$ un point de $\mathcal{P}$ et $M'\,(x'; y')$ son image par $t_{\vec{u}}$.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \text{ est l'expression analytique de } t_{\vec{u}}.$$

b-) L'application linéaire associée a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \text{ et sa matrice est } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrice unité.}$$

2.2.2 Translation et barycentre

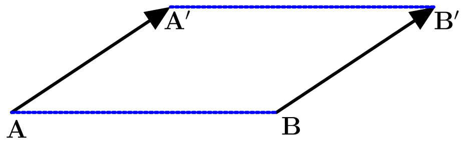
Théorème 2.2.3. *Une translation conserve le barycentre.*

Démonstration 2.2.2. *Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. Soient A', B', C' et G' les images respectives des points A, B, C et G par une translation de vecteur $\vec{u}$. On a : $\overrightarrow{G'A'} = \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{GC}$. Donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ et $(C'; c)$.*

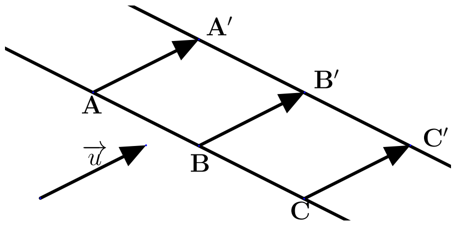
2.2.3 Translation, droites et segments

Théorème 2.2.4.

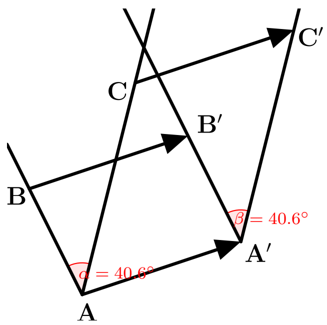
- *Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une translation, alors $AB = A'B'$ (conservation de la distance) ;*



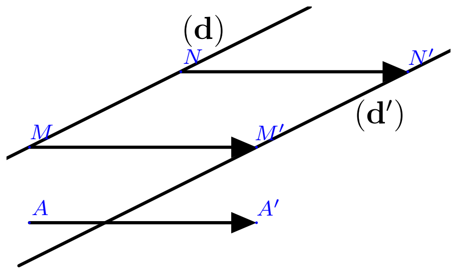
• *Si trois points A, B et C sont alignés, alors leurs images respectives A', B' et C' par une translation sont alignés dans le même ordre (conservation de l'alignement) ;*



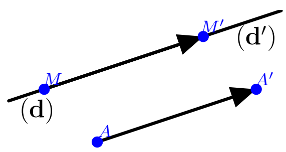
• *L'image d'un angle par une translation est un angle de même mesure ;*



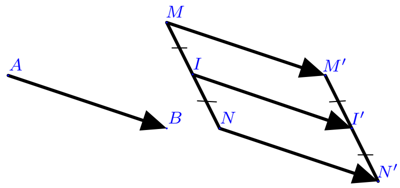
1ercas : *Si les droites (d) et (AA') ne sont pas parallèles ; Alors l'image (d') de la droite (d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est une droite qui lui est parallèle ;*



2^{e}cas : *Si les droites (d) et (AA') sont parallèles ; Alors l'image (d') de la droite (d) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est confondue à la droite (d).*



• *Par une translation, l'image d'un segment* $[MN]$ *est le segment* $[M'N']$ *où* M' *et* N' *sont les images de* M *et* N*. De plus, le milieu* I *de* $[MN]$ *a pour image le milieu* I' *de* $[M'N']$*.*



Démonstration 2.2.3. *La preuve de ce théorème est laissée en exercice aux élèves.*

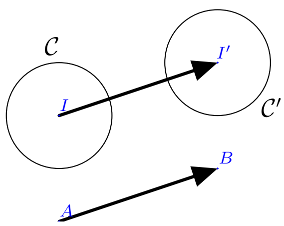
Conséquence 2.2.1.

• *Une translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;*

• *Une translation conserve les angles orientés de vecteurs ;*

• *Par une translation, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée ;*

• *Par une translation de vecteur* $\vec{u}$*, l'image d'un cercle* C *de centre* I *et de rayon* r *est un cercle* C' *de centre* I' *(image de* I *par translation) et de rayon* r *;*



2.2.4 Homothéties

Définition 2.2.2. *Soit* Ω *un point de* $\mathcal{P}$ *et* $k \in \mathbb{R}^*$*. On appelle homothétie de centre* Ω *et de rapport* k *l'application notée :* $h_{(\Omega;k)}$ *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *qui à tout point* M *associe le point* M' *tel que :* $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$*.*

Remarque 2.2.2.

- *Le centre d'une homothétie a pour image lui-même par cette homothétie ;*

- *Dans une homothétie, un point, son image et le centre sont alignés ;*

- *On a :* $\Omega M = |k|\Omega M'$ *;*

- $h_{(\Omega;1)}$ *est l'identité.*

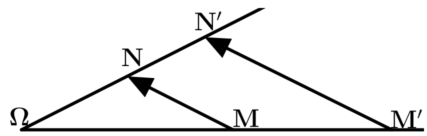
Points invariants par une homothétie :

Théorème 2.2.5. *Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$.*

- *Si $k = 1$, alors tout point est invariant ;*
- *Si $k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ alors Ω est le seul point invariant.*

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une homothétie

Théorème 2.2.6. *Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$* $\begin{cases} h(M) = M' \\ h(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



Démonstration 2.2.4. *Soit h une homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$. On a : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{\Omega N}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\Omega N'} - \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega N} - k\overrightarrow{\Omega M} = k\left(\overrightarrow{\Omega N} - \overrightarrow{\Omega M}\right) = k\overrightarrow{MN}$.*

Conséquence 2.2.2. *On a :*

- *$M'N' = |k|MN$;*
- *Une homothétie de rapport k multiplie donc les distances par le nombre positif $|k|$. Si, $|k| > 1$, cette homothétie est un agrandissement et si $|k| < 1$ c'est une réduction.*
- *Si les points M et N sont distincts, alors les points M' et N' images respectives par h de M et N sont aussi distincts et les droites (MN) et $(M'N')$ sont parallèles.*

Remarque 2.2.3. *La réciproque de $h_{(\Omega;k)}$ est $h^{-1}_{(\Omega;k)} = h_{(\Omega;\frac{1}{k})}$.*

Composée de deux homothéties

Activité 2.2.2.

1-) Homothétie de même centre Ω :

a-) Vérifier que $h_{(\Omega;k)} \circ h_{(\Omega;k')} = h_{(\Omega;kk')}$

b-) Si kk'=1, donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_{(\Omega;k)} \circ h_{(\Omega;k')}$

2-) Homothétie de centres différents :

Soient $h_1(A_1;k)$ et $h_2(A_2;k')$ deux homothéties de centres respectifs A_1 et A_2, avec $kk' \neq 1$. Supposons que h_1 transforme M en M_1, N en N_1 et h_2 transforme M_1 en M', N_1 en N'.

a-) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ *en fonction du vecteur* $\overrightarrow{MN}$.

b-) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 \circ h_1$.

Solution de l'activité :

1-a) Comme h_1 *transforme* M *en* M_1, N *en* N_1 *et* h_2 *transforme* M_1 *en* M', N_1 *en* N' *alors* $h_2 \circ h_1$ *transforme* M *en* M' *et* N *en* N'. *D'après la propriété vectorielle on a :*
$$\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} = k\overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{M'N'} = k'\overrightarrow{M_1N_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}.$$

b-) Si $kk' = 1$, *alors* $\overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}$, *d'où* $h_2 \circ h_1$ *est une translation.*

Déterminons son vecteur de translation $\vec{u}$. *Soit* A *un point du plan* $\mathcal{P}$ *tel que* $h_2(A_1) = A$. *On obtient* $h_2 \circ h_1(A_1) = h_2(A_1) = A$. *D'où* $\overrightarrow{A_1A} = \vec{u}$ *;*

2-a) Si kk'≠ 1, alors $\overrightarrow{M'N'} = kk'\overrightarrow{MN}$. *D'où* $h_2 \circ h_1$ *est une homothéties de rapport kk'.*

b-) Déterminons le centre Ω *de* $h_2 \circ h_1$. *Soient* B, C, D *trois points du plan* $\mathcal{P}$ *tels que* $h_2(C) = D$ *et* $h_1(B) = C$. *On a* $\overrightarrow{A_2D} = k'\overrightarrow{A_2C}$ *et* $\overrightarrow{A_1C} = k\overrightarrow{A_1B}$.

D'où $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2C} = k\overrightarrow{A_1B}$ *c'est à dire* $\overrightarrow{A_2C} = \overrightarrow{A_2A_1} + k\overrightarrow{A_1B}$. *On peut écrire que* $(h_2 \circ h_1)(B) = D$ *équivaut à* $\overrightarrow{A_2D} = k'(\overrightarrow{A_2A_1} + k\overrightarrow{A_1B})$. *Comme le centre* Ω *est invariant par* $h_2 \circ h_1$, *on a :*$\overrightarrow{A_2\Omega} = k'\overrightarrow{A_2A_1} + kk'\overrightarrow{A_1\Omega}$ *Équivaut à* $\overrightarrow{A_2\Omega} = k'\overrightarrow{A_2\Omega} + k'\overrightarrow{\Omega A_1} + kk'\overrightarrow{A_1\Omega}$.

Ainsi $(1-k')\overrightarrow{A_2\Omega} = k'(1-k)\overrightarrow{\Omega A_1}$ *; c'est-à-dire* $k'(k-1)\overrightarrow{\Omega A_1} + (k'-1)\overrightarrow{\Omega A_2} = \vec{0}$.

D'où le centre Ω *est le barycentre des points pondérés* $(A_2; (k'-1))$ *et* $(A_1; k'(k-1))$.

Expression analytique d'une homothétie :

Activité 2.2.3. *Soient* $\mathcal{P}$ *un plan muni d'un repère* $(O; I; J)$, Ω *de coordonnée* $(x_0; y_0)$ *un point de* $\mathcal{P}$ *et* k *nombre réel non nul.*

a-) Donner l'expression analytique de $h_{(\Omega;k)}$.

b-) En déduire l'expression analytique de son application linéaire associée puis sa matrice.

Solution de l'activité :

a-) Soient $M(x; y)$ *et* $M'(x'; y')$ *son image par* $h_{(\Omega;k)}$. *On a* $h_{(\Omega;k)}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. *C'est-à-dire* $\begin{cases} x' - x_0 = k(x - x_0) \\ y' - y_0 = k(y - y_0) \end{cases}$. *D'où* $\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$ *est l'expression analytique de* $h_{(\Omega;k)}$.

b-) L'application linéaire associée a pour expression analytique
$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$ *et sa matrice est M=* $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

2.2.5 Composée d'une homothétie et d'une translation

Théorème 2.2.7. *Soient $h_{(\Omega;k)}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k ; $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}$.*

• *Si $k = 1$, alors $t \circ h = h \circ t = t$.*

• *Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t \circ h = h \circ t = h$.*

• *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 1$, alors $t \circ h$ est une homothétie de centre O et de rapport k tel que : $\vec{u} = (1-k)\,\overrightarrow{\Omega O}$.*

• *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k \neq 1$, alors $h \circ t$ est une homothétie de centre O et de rapport k tel que : $\vec{u} = \frac{(1-k)}{k}\overrightarrow{\Omega O}$.*

Démonstration 2.2.5. *Laissée en exercice aux élèves*

2.2.6 Homothétie et barycentre

Théorème 2.2.8. *Une homothétie conserve le barycentre.*

Démonstration 2.2.6. *Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de $(A; a)$, $(B; b)$ et $(C; c)$. Soient A', B', C' et G' les images respectives des points A, B, C et G par une homothétie de rapport k. On a : $\overrightarrow{G'A'} = k\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = k\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{G'C'} = k\overrightarrow{GC}$. Donc $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} + ck\overrightarrow{GC} = k\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}\right) = \vec{0}$. Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ et $(C'; c)$.*

2.2.7 Homothétie, droites et segments

Théorème 2.2.9.

• *Si trois points A, B et C sont alignés, alors leurs images respectives A', B' et C' par une homothétie sont alignés dans le même ordre (conservation de l'alignement) ;*

• *L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle ;*

• *Par une homothétie, l'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ où A' et B' sont les images respectives de A et B). De plus, le milieu I de $[AB]$ a pour image le milieu I' de $[A'B']$.*

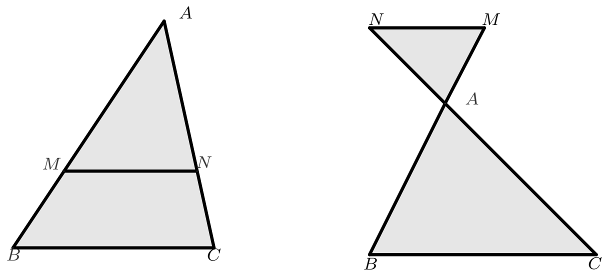
Conséquence 2.2.3.

• *L'image d'une droite est connue dès qu'est connue l'image d'un point de cette droite ;*

- *Si deux droites sont parallèles, alors leurs images sont parallèles ;*
- *Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires.*

2.2.8 Triangles homothétiques

Théorème 2.2.10. *Soient ABC et AMN deux triangles tels que $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(MN)//(BC)$. L'homothétie de centre A qui transforme B en M, transforme C en N.*



Démonstration 2.2.7. *Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M. Une homothétie conserve le parallélisme, donc h transforme la droite (BC) en la droite parallèle à (BC) et passant par M, c'est à dire (MN). Ainsi $h(C) \in (MN)$, de plus $h(C) \in (AC)$. Donc $h(C) = N$.*

Remarque 2.2.4. *Les triangles ABC et AMN sont homothétiques de sommet A.*

Théorème 2.2.11.

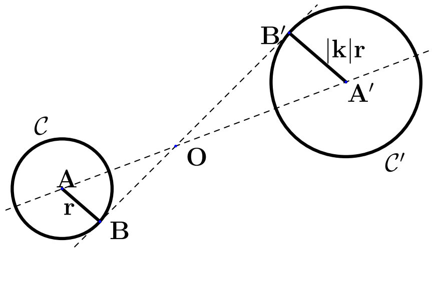
1- Une homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité ;

2- Une homothétie conserve les angles orientés de vecteurs ;

3- Par une homothétie, la nature des triangles (isocèle, équilatéral, rectangle) et des quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) est conservée ;

4- Par une homothétie de rapport k, l'image d'un cercle C de centre A et de rayon r est un cercle C' de centre A' (image de A par l'homothétie) et de rayon $|k|r$;

5- Une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2.



Démonstration 2.2.8. *Les questions 1-, 2- et 5- sont laissées en exercices aux élèves et la question 3- se fait à l'aide des théorèmes précédents sur la conservation des angles et des distances ;*

4- Nous montrons premièrement que tout point du cercle $\mathcal{C}$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}'$. Tout point B du plan a une image B' par l'homothétie h telle que $A'B' = |k|AB$. Si B est un point du cercle $\mathcal{C}$ alors $AB = r$, d'où $A'B' = |k|r$ ainsi B' est sur le cercle de centre A' et de rayon $|k|r$. Donc tout point du cercle $\mathcal{C}$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}'$.

Réciproquement, démontrons que tout point du cercle $\mathcal{C}'$ est image d'un point du cercle $\mathcal{C}$. Soit N' un point de $\mathcal{C}'$. k étant non nul, il existe un point N unique tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{AN'}$. Alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AN'}$ et N' est l'image de N par l'homothétie h, d'où $A'N' = |k|AN$ et comme N' est un point de $\mathcal{C}'$, on a $A'N' = |k|r$. On en déduit que $|k|AN = |k|r$, donc $AN = r$ ce qui prouve que N est sur le cercle $\mathcal{C}$. Donc tout point du cercle $\mathcal{C}'$ a son image sur le cercle $\mathcal{C}$. On a ainsi montré que les images des points de $\mathcal{C}$ par une homothétie sont sur $\mathcal{C}'$, et que tous les points de $\mathcal{C}'$ sont des images des points de $\mathcal{C}$ par cette homothétie. Donc l'image du cercle $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$.

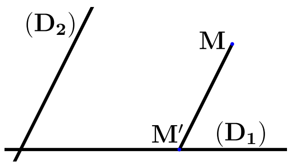
2.3 PROJECTION

Activité 2.3.1. *soient $(D) : 2x + 3y + 4 = 0$ et $(D') : 2x - 4y + 3 = 0$.*

1-) Donner l'expression analytique de la projection p sur (D) parallèlement à (D').

2-) Que peut-on dire de $p \circ p$?

Définition 2.3.1. *Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes du plan affine $\mathcal{P}$. Pour tout point M de $\mathcal{P}$, la droite (D) contenant M et parallèle à (D_2) est sécante à (D_1) en un point M' appelé projeté de M sur (D_1) parallèlement à (D_2).*



Remarque 2.3.1.

- Soit (D'_2) une droite parallèle à (D_2), le point M' est aussi la projection de M sur (D_1) parallèlement à (D'_2) ;

- Dans la définition du point M', la droite (D_2) n'intervient que par sa direction $\overrightarrow{D_2}$ c'est-à-dire la droite vectorielle associée à (D_2) ;

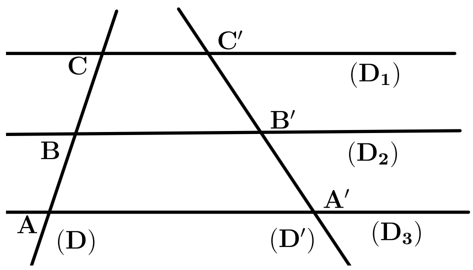
- On dit que M' est la projection de M sur (D_1) parallèlement à la droite vectorielle $\overrightarrow{D_2}$;
- La projection sur (D_1) parallèlement à (D_2) n'est définie que si (D_1) et (D_2) sont sécantes ;
- L'application p de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M fait correspondre sa projection M' sur (D_1) parallèlement à (D_2) est appelé projection de M sur (D_1) parallèlement à (D_2) ;
- (D_1) est la base de la projection, et la direction de (D_2) est la direction de la projection ;
- La projection est dite orthogonale lorsque (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.

Propriété 2.3.1.

• *Points invariants : $M \in (D_1)$ équivaut à $p(M) = M$. Donc (D_1) est invariante par p.*
La base de la projection est l'ensemble de points invariants.
• *p n'est pas injective. En effet, pour tout M de (D_1), l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $p(M) = M'$ est la droite contenant M' et parallèle à (D_2).*
p n'est pas surjective. Car l'image de $\mathcal{P}$ par p est la droite (D_1) c'est-à-dire $p(\mathcal{P}) = (D_1)$.
Donc une projection est une application affine non bijective.
• *Caractérisation d'une projection : La droite (D1) est invariante par p, donc pour tout point M de $\mathcal{P}$, si $p(M) \in (D_1)$ alors $p \circ p(M) = p[p(M)] = p(M)$.*
***p est une projection affine si et seulement si** $p \circ p = p$.*
• *$\overrightarrow{MM'}$ appartient à la direction de la projection p.*

Théorème 2.3.1. ***(de Thalès)*** *: Soient $\mathcal{P}$ un plan affine et deux droites (D) et (D') de $\mathcal{P}$. Étant donné trois droites parallèles (D_1), (D_2), (D_3) de $\mathcal{P}$, rencontrant (D) respectivement (D') en trois points distincts A, B, C respectivement A', B', C'. Alors : $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$*

Démonstration 2.3.1. *Soit $\overrightarrow{D}$ la droite vectorielle associée à (D_1), (D_2), (D_3). Considérons la projection p sur (D') parallèlement à $\overrightarrow{D}$. On a : $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$. De plus, A, B et C sont alignés : $\overrightarrow{AC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$. Il en est de même pour A', B' et C' : $\overrightarrow{A'C'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\overrightarrow{A'B'}$ Comme p est une application affine, on a : $\overrightarrow{p(A)p(C)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\overrightarrow{p(A)p(B)}$. C'est-à-dire $\overrightarrow{A'C'} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}\overrightarrow{A'B'}$. D'où $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$*



2.3.1 Expression analytique

Exercice 2.3.1. *Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{J})$.*

Soient la droite $(D_1) : x + 2y - 1 = 0$ et la droite (D_2) de vecteur directeur $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Définir analytiquement la projection p sur (D_1) parallèlement à (D_2).

Exercice 2.3.2. *Soit $\mathcal{P}$, un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{J})$. Considérons l'application p de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $p : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que : $\begin{cases} x' = -\frac{1}{5}(x + 2y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(3x + 6y + 2) \end{cases}$.*
Montrons que p est une projection et donner ses éléments caractéristiques.

2.4 SYMÉTRIES

2.4.1 Symétries centrales

Définition 2.4.1. *Soit $O\,(x_O; y_O)$ un point du plan $\mathcal{P}$. On appelle symétrie de centre O, l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ définie par $S_O : M\,(x; y) \mapsto M'\,(x'; y')$ telle que O est milieu du segment $[MM']$.*

Propriété vectorielle ou fondamentale d'une Symétries centrales

Théorème 2.4.1. $\begin{cases} S_O\,(M) = M' \\ S_O\,(N) = N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}.$

Démonstration 2.4.1. *Soient M' et N' les images respectives de M et N par S_O. On a : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{ON}$. Ainsi $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = -\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.*

Expression analytique d'une symétrie centrale

Activité 2.4.1. *Soient $\mathcal{P}$ un plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et M'(x';y'), l'image de M(x;y) par le symétrique de centre $O(x_0, y_0)$.*
1-) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MO}$;
2-) Déduire l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

Solution de l'activité :

1-) Comme $S_O(M) = M'$ alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}$.

2-) Puisque $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MO}$*, on obtient :* $\begin{cases} x' - x = 2\left(x_O - x\right) \\ y' - y = 2\left(y_O - y\right) \end{cases}$.

D'où $\begin{cases} x' = -x + 2x_O \\ y' = -y + 2y_O \end{cases}$ *est l'expression analytique de* S_O.

Théorème 2.4.2. *Le centre de la symétrie centrale* S_O *est le seul point invariant.*

2.4.2 Symétries centrales et barycentre

Théorème 2.4.3. *Une symétrie centrale conserve le barycentre.*

Démonstration 2.4.2. *Nous démontrons avec trois points pondérés mais la démonstration est identique pour le barycentre de n points pondérés. Soit G le barycentre de* $(A; a)$, $(B; b)$ *et* $(C; c)$.

Soient A', B', C' *et* G' *les images respectives des points* A, B, C *et* G *par une symétrie de centre* O*. On a :* $\overrightarrow{G'A'} = -\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{G'B'} = -\overrightarrow{GB}$ *et* $\overrightarrow{G'C'} = -\overrightarrow{GC}$*.Donc* $a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} + c\overrightarrow{G'C'} = -a\overrightarrow{GA} - b\overrightarrow{GB} - c\overrightarrow{GC} = -\left(a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}\right) = \vec{0}$.

Par conséquent G' est le barycentre de $(A'; a)$, $(B'; b)$ *et* $(C'; c)$.

Exemple 2.4.1.

Soit f *une application affine définie par son expression analytique* $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 2 \end{cases}$.

1-) Montrer que f *est une bijection ;*

2-) Déterminer les éléments caractéristiques de f *et en déduire sa nature.*

Solution :

1-) f *est bijective, car La matrice de l'application linéaire* ϕ *associée est* $M_\phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $det M_\phi = 1 \neq 0$ *;*

2-) L'ensemble des points invariants est le point $A\left(1; 1\right)$*, car* $f\left(A\right) = A$ *équivaut à* $x = 1$ *et* $y = 1$*. Donc* f *est la symétrie centrale de centre le point* A.

Remarque 2.4.1. *Une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport -1.*

2.4.3 Symétries centrales, droites et segments

Théorème 2.4.4.

1-) Si trois points A, B et C sont alignés, alors leurs images respectives A', B' et C' par

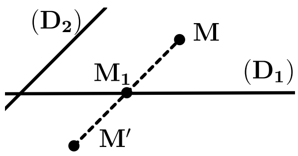
une symétrie centrale sont alignés dans l'ordre contraire (conservation de l'alignement) ;
2-) Par une symétrie centrale, l'image d'une droite est une droite parallèle ;
3-) Par une symétrie centrale, l'image d'un segment [AB] est le segment [A'B'] (où A' et B' sont les images de A et B). De plus, le milieu I de [AB] a pour image le milieu I' de [A'B'].

Conséquence 2.4.1.
1-) L'image d'une droite est connue lorsqu'on connait les images de deux points de cette droite ;
2-) Si deux droites sont parallèles, alors leurs images par une symétrie centrale sont parallèles (conservation du parallélisme) ;
3-) Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires par une symétrie centrale (conservation de l'orthogonalité).

2.4.4 Symétries axiales

Activité 2.4.2. *Soient (D) : $4x + 2y = 1$ et (D') : $2x + y = 3$.*
1- Donner l'expression analytique de la symétrie S par rapport à (D) parallèlement à (D').
2- Que peut-on dire de $S \circ S$?

Définition 2.4.2. *Soient (D_1) et (D_2) deux droites du plan $\mathcal{P}$.*
• *A tout point M on peut associer : M_1 projection de M sur (D_1) parallèlement à (D_2), puis le point M' tel que : $\overrightarrow{M'M_1} = -\overrightarrow{MM_1}$ c'est-à-dire M_1 est le milieu du segment [MM'].*
On dit que le point M' est le symétrique de M par rapport à la droite (D_1) parallèlement à la droite (D_2). (D_1) est la base et (D_2) la direction de la symétrie.
On remarque que (D_2) n'intervient que par sa direction.



• *L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M, fait correspondre son symétrique M' par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2) est la symétrie par rapport à (D_1) parallèlement à (D_2).*
• *Lorsque (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, la symétrie est dite orthogonale.*

Propriété 2.4.1.

- *Toute involution est une symétrie.*
- *Toute symétrie s est bijective.*

2.4.5 Expression analytique

Exercice 2.4.1. *Soient la droite* $(D_1) : x+y-2=0$ *et la droite* (D_2) *de vecteur directeur* $\vec{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à (D_1) *parallèlement à* (D_2).

Exercice 2.4.2. *Soit p l'application de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *définie par* $p : M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
telle que : $\begin{cases} x' &= -x+6y-4 \\ y' &= y \end{cases}$. *Montrer que s est une symétrie.*

2.4.6 Symétries orthogonales

Définition 2.4.3. *Soit* (D) *une droite du plan* $\mathcal{P}$. *On appelle Symétrie orthogonale d'axe* (D) *ou une réflexion d'axe* (D), *l'application* S_D *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *définie par* $S_D : M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ *telle que* (D) *est la médiatrice du segment* $[MM']$.

Expression analytique

Définition 2.4.4. *Soient une droite (D) :* $ax+by+c=0$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *un vecteur directeur de (D). M'(x';y') le symétrie de M(x;y) par* S_D *la Symétries orthogonales d'axe (D).* $S_D(M)=M' \iff \begin{cases} \overrightarrow{MM'}.\vec{u} &= 0 \\ \text{Le milieu } I \text{ de}[MM'] &\in (D) \end{cases}$.

Exercice 2.4.3. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé, déterminer l'expression analytique de la Symétrie orthogonale* S_D *d'axe la droite (D) :* $4x-2y+1=0$.

Ensemble de points invariants

Théorème 2.4.5. *L'ensemble des points invariants par la Symétrie orthogonale* S_D *est l'axe* (D).

Propriété 2.4.2.

• *Si* (D) *et* (Δ) *sont parallèles, alors* $S_D \circ S_\Delta$ *est une translation.*

• *Si* (D) *et* (Δ) *sont perpendiculaires, alors* $S_D \circ S_\Delta$ *est une symétrie centrale dont le centre est le point d'intersection de* (D) *et* (Δ).

2.5 ROTATION

Définition 2.5.1. *Soient un point* O *du plan* $\mathcal{P}$ *et un angle orienté* α. *On appelle rotation de centre* O *et d'angle* α *l'application de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathcal{P}$ *transformant* M *en* M' *telle que :*
Si $M = O$ *alors* $M' = O$, *sinon* $OM = OM'$ *et l'angle* $\widehat{\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)} = \alpha$.

Remarque 2.5.1.

- La rotation d'angle nul et de centre O *est l'identité ;*

- La rotation d'angle plat et de centre O *est une symétrie centrale de centre* O.

Théorème 2.5.1.

• *Si l'angle est non nul, alors l'ensemble des points invariants d'une la rotation est le centre* O *de cette rotation ;*

• *Une rotation est une application bijective ;*

• *La réciproque d'une rotation d'angle* α *est une rotation d'angle* $-\alpha$ *;*

• *La composée de deux rotations* $r(O;\alpha)$ *et* $r'(O;\alpha')$ *de même centre est une rotation d'angle* $\alpha + \alpha'$.

Propriété 2.5.1.

• *L'image d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation est respectivement une droite, une demi-droite, un segment et un cercle ;*

• *L'image d'un angle orienté par une rotation est un angle orienté de même mesure ;*

• *Deux points A et B, et leurs images respectives A' et B' par une rotation d'angle sont tels que :* $AB = A'B'$ *et* $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)} = \alpha$.

2.5.1 Expression analytique :

Théorème 2.5.2. *L'expression analytique d'une rotation* $r_{(O;\alpha)}$ *de centre* O *et d'angle* α *dans le repère* $(O; I; J)$ *qui à tout point* $M(x; y)$ *associe son image* $M'(x'; y')$ *est donnée* *par :*

$$\begin{cases} x' = (cos\alpha)\,x - (sin\alpha)\,y \\ y' = (sin\alpha)\,x + (cos\alpha)\,y \end{cases}.$$

Remarque 2.5.2. *Soit* $f{=}r_{(O;\alpha)} \circ r'_{(O';\alpha')}$

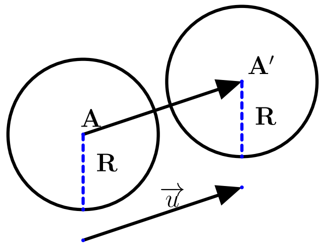
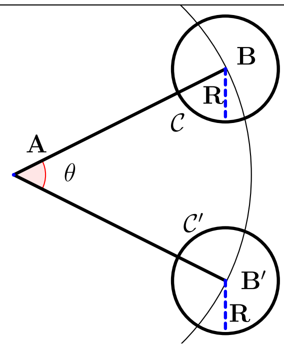
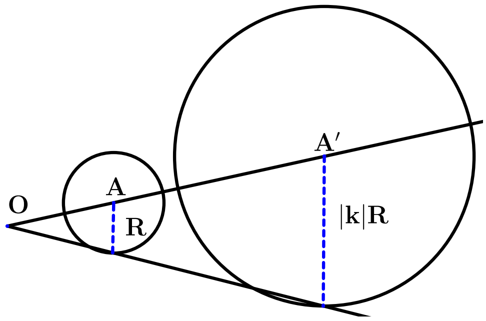
- Si $O = O'$*, alors* f *est une rotation de centre* O *et d'angle* $\alpha + \alpha'$

- Si $O \neq O'$ *et* $\alpha{+}\alpha' = 2k\pi$*, alors* f *est une translation de vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *; où* $f\,(M) = M'$*.*

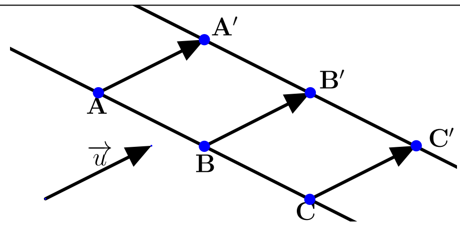
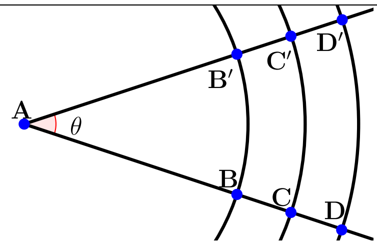
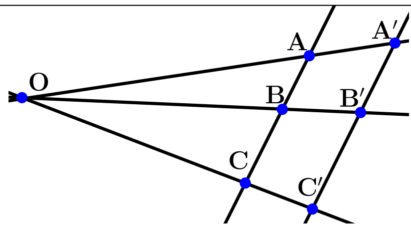
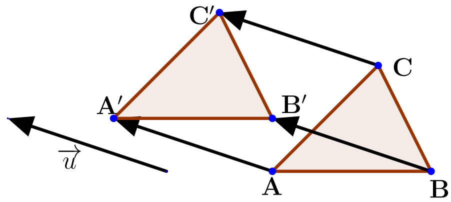
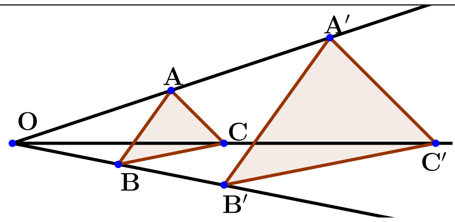
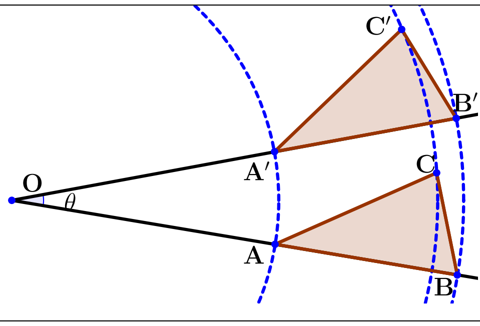
- Si $O \neq O'$ *et* $\alpha + \alpha' \neq 2k\pi$*, alors* f *est une rotation de centre le point invariant par* f *et d'angle* $\alpha + \alpha'$*.*

2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)

Voici le tableau qui récapitule notre étude dans le cas d'une translation, rotation et homothétie.

L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une translation est un cercle de centre A', image de A par la translation, et de rayon R.	
L'image d'un cercle de centre B et de rayon R par une rotation de centre A et d'angle θ est un cercle de centre B'(où B' est l'image de B par la rotation), et de rayon R.	
L'image d'un cercle de centre A et de rayon R par une homothétie de centre A et de rapport k est un cercle de centre A', image de A par l'homothétie, et de rayon $\lvert k\rvert R$.	

2.6 TABLEAU RÉCAPITULATIF DE QUELQUES APPLICATIONS AFFINES DU PLAN (FIGURES)

Translation de vecteur $\vec{u}$	
Rotation de centre A et d'angle θ	
Homothétie de centre O et de rapport k	
Les translations conservent les longueurs et les aires.	
Les homothétie de rapport k multiplient les longueurs par $\|k\|$ et les aires par k^2.	
Les rotations conservent les longueurs et les aires.	

Chapitre Trois

EXERCICES

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons présenter trente exercices sur les applications affines du plan, répartis par centre d'intérêt. Certains sont inspirés des livres "CIAM Terminale SM" et "Majors en mathématiques Terminales C-E" ([8, 9]). La première partie propose les exercices sur l'expression analytique d'une application affine ; les trois autres parties suivantes sont consacrées respectivement à la détermination, l'utilisation, la composée des applications affines. La dernière partie présente trois exercices de recherches qui amènerons les élèves à comprendre la totalité des notions développées sur les applications affines du plan dans le cadre de ce mémoire.

3.2 EXPRESSIONS ANALYTIQUES ET APPLICATIONS AFFINE

Exercice 3.2.1. *Le plan affine P est muni du repère $(O;I;J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ définie par :*

$$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x \end{cases}.$$

1-) *Montrer que f est une application affine du plan ;*

2-) *Quel est l'ensemble des points invariants par f.*

Exercice 3.2.2. *Le plan affine P est muni du repère $(O;I;J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ définie par :*

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}.$$

1-) *Montrer que f est une application affine du plan ;*

2-) *Montrer que f admet un seul point invariant ;*

3-) *Quel est la nature géométrique de l'application $f \circ f$?*

Exercice 3.2.3. *Le plan affine P est muni du repère $(O; I; J)$, soit f l'application définie de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par :*
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

1-) *Montrer que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant ;*

2-) *Étudier l'ensemble des points invariants par f ;*

3-) *Reconnaître la nature de l'application f.*

Exercice 3.2.4. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$, soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ définir par :*
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}.$$

1-) *Déterminer l'ensemble D des points invariants par f ;*

2-) *Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D ;*

3-) *Montrer que le milieu de $[MM']$ appartient à D ;*

4-) *Reconnaitre f.*

Exercice 3.2.5. *Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :* $\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = -\frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}.$

1-) *Quelle est la nature de f ?*

2-) *Donner les éléments caractéristiques de f.*

Exercice 3.2.6. *Dans le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, soient les droites (D) et (D_1) d'équations respectives $x + y - 1 = 0$ et $2x - y + 2 = 0$.*

1-) *Définir analytiquement les symétries s par rapport à (D) parallèlement à (D_1) et s' par rapport à (D_1) parallèlement à (D).*

2-) *Étudier $s \circ s'$ et $s' \circ s$.*

Exercice 3.2.7. *Dans le plan affine euclidien P d'un repère orthonormé on considère l'application f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :* $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$.

1-) *Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f ;*

2-) *Montrer que si M n'est pas invariant la droite (MM') garde une direction indépendante de M que l'on précisera ;*

3-) *Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et (E) ;*

4-) *Reconnaitre f et donner sa construction géométrique de M'.*

Exercice 3.2.8. *Dans le plan affine euclidien d'un repère orthonormé, on considère l'application f qui au point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :* $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ y' = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$.

1-) *Montrer qu'il s'agit d'une application affine bijective. Définir son application réciproquef^{-1} ;*

2-) a) *Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite D_0 que l'on précisera ;*

b) *Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe et que le symétrique de M par rapport à M' appartient D_0 ;*

c) *En déduire une construction simple de M' connaissant le point M,*

3-) *Soit (E) la courbe d'équation :*$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 10x + 6y - 11 = 0$.

a) *Déterminer une équation de l'image de (E) par f ;*

b) *Quelle est la nature de cette courbe image.*

3.3 DÉTERMINATION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.3.1. *Le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.*

1-) *Donner l'expression analytique de :*

i-) *La translation t de vecteur $\overrightarrow{u}(1; 2)$;*

ii-) *L'homothétie h de centre $(2; 3)$ et de rapport 5 ;*

iii-) *La symétrie par rapport à la droite (D) d'équation : $2x + 3y + 1 = 0$, parallèlement à la droite (D') d'équation : $4x - 3y + 2 = 0$;*

iv-) *la projection p sur la droite (D) d'équation : $2x+y+1=0$, parallèlement à la droite (D') d'équation : $x-3y+2=0$.*

2-) *Parmi les applications affines ci-dessus, lesquelles sont des transformations affines.*

Exercice 3.3.2. *Le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O;I;J)$, soient $A(1;1)$, $B(0;2)$, $C(-1;2)$, $A'(1;1)$, $B'(1;-1)$, $C'(0;3)$.*

1-) *Montrer qu'il existe une unique application f de P dans P telle que $f(A)=A'$, $f(B)=B'$, $f(C)=C'$;*

2-) *Déterminer la matrice de application associée ;*

3-) *Calculer les coordonnées x' et y' du point M' image du point $M(x;y)$ par l'application affine f.*

Exercice 3.3.3. *Considérons l'application affine f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :*
$f(0;0)=(1;2)$;
$f(1;1)=(2;4)$;
$f(0;1)=(0;3)$.
Calculer l'image par f du point $A(-1;-1)$.

Exercice 3.3.4. *On considère deux droites sécantes D_1 et D_2 en A, et deux directions d et d' distinctes et ne contenant ni D_1, ni D_2. Soit p la projection de D_1 sur D_2 parallèlement à d, et soit p' la projection de D_2 sur D_1 parallèlement à d'. A tout point M de D_1, on associe les points : $M_1=p(M)$ et $M'=p'(M_1)$. Trouver la relation entre les abscisses de M et M' dans un repère donné de D_1.*

Exercice 3.3.5. *Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé, on donne la droite (D) d'équation $2x+3y+5=0$.*

1-) *Déterminer l'expression de la symétrie orthogonale s d'axe (D) ;*

2-) *Déterminer l'expression de la projection orthogonale p sur la droite (D) ;*

3-) *Déterminer l'expression de l'affinité f d'axe (D) dont la direction est orthogonale à celle de la droite (D) et de rapport 5. On pourra remarquer que $\ll \overrightarrow{p(M)f(M)} = \overrightarrow{5p(M)M} \gg$ équivaut à $\ll$le barycentre de $(f(M);1)$ et $(M;-5)$ appartient à $(D) \gg$.*

Exercice 3.3.6. *Dans le plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, on considère l'application ponctuelle f de P dans P qui au point M de coordonnées $(x;y)$*

fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = -xcos(2\alpha) - ysin(2\alpha) + 2cos(\alpha) \\ y' = -xsin(2\alpha) + ycos(2\alpha) + 2sin(\alpha). \end{cases}.$$

1-) *Déterminer l'ensemble des points double de f.*

2-) *En déduire la nature géométrique de f.*

Exercice 3.3.7. *Soit (ABC) un triangle équilatéral de sens direct du plan affine euclidien P rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On donne $Z_A = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z_B = 2$, l'affixe des points A et B respectivement.*

1-) *Déterminer l'affixe du centre G du triangle (ABC) ;*

2-) *Donner la nature, l'expression complexe et les éléments géométriques de l'application affine $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$.*

3.4 UTILISATION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.4.1. *Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A de coordonnées $(0; 1)$ et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distinct de O. Soit (C') le cercle de centre B passant par A.*

1-) *On appelle ψla mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$, appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Exprimer en fonction de l'abscisse de B et le rayon du cercle (C').*

2-) a) *Déterminer les deux homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties ;*

b) *Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.*

Exercice 3.4.2. *Soient $A; B; C$ trois points distincts et non alignés du plan (P), Soit a un réel. On considère l'application f_a qui à tout point M de (P) associe le point M' de (P) tel que : $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.*

1-) *Déterminer a pour que f_a soit une translation, dont on précisera le vecteur. On note a_0 la valeur obtenue.*

2-) *a est différent de a_0 dans toute la suite de l'exercice.*

a) *Montrer que f_a admet un seul point invariant, noté Ω_a ;*

b) *Déterminer et représenter l'ensemble des points Ω_a, lorsque a décrit $\mathbb{R} \setminus \{a_0\}$.*

3-) *Montrer que, si plus a est distinct de 1, f_a est une homothétie dont on déterminera les éléments caractéristiques. Que peut-on dire de f_1 ?*

Exercice 3.4.3. *On donne deux points distincts A et B du plan affine et un réel k non nul. Soit M_1 l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport k ; soit M' le barycentre des points B et M_1 affectés respectivement des coefficients α et 1, α étant un réel distinct de -1. Soit f l'application qui à tout point M du plan affine associe M'.*

1-) *Montrer que pour tout point M du plan affine on a : $(\alpha+1)\overrightarrow{MM'} = (1-k)\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$;*

2-) *Montrer que si $k = \alpha + 1$ alors f est une translation dont on déterminera le vecteur ;*

3-) *Montrer que si $k \neq \alpha + 1$, il existe un unique point invariant G par f.*

Montrer alors que f est une homothétie de centre G dont on définira le rapport.

Exercice 3.4.4. *Soit k un réel différent de 0 et de 1. On considère trois points A, B et C, deux à deux distincts, tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ et les cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$. Une droite Δ non perpendiculaire à (AB) et distincte de (AB), passant par A, recoupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en M et N.*

1-) a) *Quelle est la position relative de droites (BM) et (CN) ?*

b) *Pour quelle valeur de k les droites (BN) et (CM) sont-elles parallèles ?*

2-) *On suppose désormais k fixé et différent de -1. Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (CM).*

a) *Soit h l'homothétie de centre P telle que $h(B) = N$. Démontrer que $h(M) = C$. Calculer le rapport de l'homothétie h en fonction du réel k (on pourra se servir des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{NC}$).*

b) *Déterminer le réel α tel que : $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BN}$. Quel est le lieu géométrique du point P lorsque Δ varie ? En se plaçant dans le cas où $k = 2$ et où la distance AB est égale à 6cm, donner les éléments géométriques remarquables du lieu géométrique L de P, et faire une figure soignée.*

Exercice 3.4.5. *On donne trois droites D, D' et D'' concourantes en A. A tout point M de D, on associe le point M_1 de D' tel que (MM_1) soit parallèle à D'', puis le point M_2 de D'' tel que (M_1M_2) soit parallèle à D.*

a) *Peut-on déterminer une direction* d *telle que, pour tout* M *de* D*, la droite de direction* d *passant par* M_2 *coupe* D *au milieu de* $(A;M)$ *?*

b) *Question analogue, mais* M_1 *est défini sur* D' *par* $(MM_1) \in d'$*,* d' *étant une direction donnée. La direction* d *dépend-elle de* d' *?*

c) *Construire une figure où les directions* d *et* d' *sont les mêmes. (On pourra se donner* D*,* D'*, puis construire* D'' *pour obtenir la figure voulue).*

Exercice 3.4.6. *Soit un parallélogramme* $ABCD$ *et un point* I *non situé sur les côtés du parallélogramme.*

Soit $\{E\}$ *l'intersection des droites* (IB) *et* (CD).

Soit $\{F\}$ *l'intersection des droites* (IB) *et* (AD).

Soit $\{G\}$ *l'intersection des droites* (ID) *et* (BC).

Soit $\{H\}$ *l'intersection des droites* (ID) *et* (AB).

a) *Montrer que* (FH) *et* (GE) *sont parallèles ;*

b) *Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie* h *qui transforme* E *en* F *;*

c) *Montrer que* I*,* C*,* C' *sont alignés en utilisant* h.

Exercice 3.4.7. *On donne un triangle* ABC*. Soit* P *un point de la droite* (BC)*,* Q *un point de la droite* (CA) *et* R *un point de la droite* (AB)*. Ces points* P*,* Q*,* R *sont distincts de* A*,* B *et* C.

1-) *Montrer que* P*,* Q*,* R *sont alignés si et seulement si,* $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$

2-) *Montrer que* (PA)*,* (QB)*,* (RC) *sont parallèles si et seulement si,* $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$

3.5 COMPOSITION DES APPLICATIONS AFFINES

Exercice 3.5.1. *Soient* A*,* M*,* O*,* I *quatre points du plan affine.*

1-) *Construire les points* A' *et* M' *images respectives des points* M *et* A *par le symétrique de centre* O (S_O) *;*

2-) *Construire les points* A" *et* M" *images respectives des points* M' *et* A' *par le symétrique de centre* I (S_I) *;*

3-) *Monter que les segments* $[AM'']$ *et* $[A''M]$ *ont le même milieu, et* $\overrightarrow{AA''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM''}$ *;*

4-) *Reconnaitre la nature des applications affines* $S_O \circ S_I$ *et* $S_I \circ S_O$.

Exercice 3.5.2. *Démontrer que :*

1-) *La composée de deux symétries centrales (ou de deux translations) est une translation ;*

2-) *La composée d'une translation et d'une symétrie centrale est une symétrie centrale ;*

3-) *Les compositions précédentes sont-elles commutatives ?*

4-) *Que peut-on dire de la composée d'une suite de transformations qui sont, soit des translations, soit des symétries centrales ?*

Exercice 3.5.3. *Le plan* P *est rapporté au repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. *On considère l'application affine* f *qui à tout point* M *de* P, *de coordonnées* x *et* y, *associe la point* M' *de coordonnées* x' *et* y' *données par :* $\begin{cases} x' = x - 2y + 2 \\ y' = -2x + 4y - 1 \end{cases}$.

1-) *Déterminer l'ensemble des points invariants par* f *;*

2-) *Montrer que l'image de* P *par* f *est une droite* D *;*

3-) *Montrer que* $f = h \circ p$, *où* h *est une homothétie qu'on déterminera et* p *la projection orthogonale sur la droite* D.

Exercice 3.5.4. *Le plan* P *est rapporté au repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1-) *On considère l'application affine* f *qui à tout point* M *de* P, *de coordonnées* x *et* y, *associe la point* M_0 *de coordonnées* x' *et* y' *données par :* $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

a) *Montrer que, pour tout point* M, *le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *est colinéaire à un vecteur constant ;*

b) *Étudier l'ensemble des points invariants par* f *;*

c) *Reconnaître la nature de l'application affine* f.

2-) *Soit* g *l'application affine de* P *dans lui-même qui, au point* $M(x;y)$, *associe le point* $M''(x'';y'')$ *défini par :* $\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{cases}$.

a) *Montrer que* g *peut s'écrire* $h \circ f$ *où* h *est une application de* P *dans lui-même que l'on précisera ;*

b) *Sans calcul, vérifier que :* $h \circ f = f \circ h$.

Exercice 3.5.5. *(P) désigne un plan affine rapporté à un repère. Soit $a \in \mathbb{R}$. considérons l'application affine $f_a : P \longrightarrow P$ qui au point $M(x;y) \longmapsto M'(x';y')$ telle que :*
$$\begin{cases} x' = ax + a - 1 \\ y' = (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{cases}.$$

1-) *Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie, dont on précisera le centre et la rapport ;*

2-) *Existe-t-il a tel que f_a soit involutive ? Montrer qu'alors f_a est une symétrie que l'on précisera ;*

3-) *Déterminer avec précision $f_a(P)$ suivant les valeurs de a.*

On suppose $a = 0$. Soit t la translation de vecteur $3\overrightarrow{j}$.

Montrer qu'il existe une projection p que l'on déterminera telle que : $f_0 = t \circ p = p \circ t$.

3.6 RECHERCHES

Exercice 3.6.1. *On donne un parallélogramme $ABCD$.*

a) *I étant un point quelconque de la diagonale $[BD]$, une droite Δ passant par I coupe (AB) en E et (CD) en F. Une autre droite Δ' passant par I coupe (BC) en G et (DA) en H. Montrer que (EG) est parallèle à (HF) ;*

b) *Une droite δ coupe (AD) en H' et (CD) en F'. Une droite δ' parallèle à δ coupe AB en E' et BC en G'. Montrer que les droites $(E'F')$ et $(G'H')$ se coupent en général sur la diagonale $[BD]$.*

Exercice 3.6.2. *$C_1, C_2, \cdots, C_n, A, B$ désignent $n+2$ points (par exemple $n = 3$ ou $n = 4$).*

a) *Construire les symétriques respectifs A_1, B_1 de B, A par rapport à C_1, puis les symétriques A_2, B_2 de B_1, A_1 par rapport à C_2, etc... enfin les symétriques A_n, B_n de B_{n-1}, A_{n-1} par rapport à C_n ;*

b) *Peut-on trouver un point C qui soit simultanément le milieu de $(A; B_n)$ et de $(B; A_n)$?*

Commentaires : *A l'occasion de la construction de parallélogrammes, il s'agit d'expérimenter les propriétés de la symétrie centrale, de la relation d'équipollence de bipoints et de la notion de translation. On remarquera l'importance de la parité de n. Cette manipulation pourra se prolonger par une investigation libre : les élèves sont invités à se poser des questions à propos de ce dessin et à ajouter de nouveaux éléments à la figure.*

Exercice 3.6.3. *Soit le plan affine euclidien* P *rapporté à un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. *On considère l'application ponctuelle* f *de* P *dans* P *qui au point* M *de coordonnées* $(x; y)$ *fait correspondre le point* M' *de coordonnées* $(x'; y')$ *telles que :*
$\begin{cases} x' = k(xcos(\alpha) + ysin(\alpha)) + 1 \\ y' = k(xcos(\alpha) - ysin(\alpha)) + 1 \end{cases}$ *, où* k *et* α *sont les constantes données (on suppose* $k > 0$ *et* $0 < \alpha < 2\pi$*).*

PARTIE A

1-) *Étudier suivant les valeurs de* k *et de* α *l'ensemble des points invariants par* f.

2-) *Cet ensemble peut-il être une droite ? peut-il être vide ?*

PARTIE B

On suppose maintenant d'étudier f *dans le cas où* $k = 1$ *et* $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

1-) *Quel est l'ensemble des points invariants par* f *?*

2-) a) *Quelle est l'image par* f *de la droite dont d'équation est :* $x - \sqrt{3}y = 0$ *?*

b) *Quelle est l'image* Δ' *par* f *de la droite* Δ *passant par le point* $I(\frac{3+\sqrt{2}}{8}; \frac{1+\sqrt{2}}{8})$ *et dirigée par le vecteur* $\overrightarrow{u}(1; \sqrt{3})$ *? Former les équations de* Δ *et de* Δ'.

3-) *On considère l'application linéaire* ϕ *associée à* f.

a) *Démontrer que l'application linéaire* ϕ *est une bijection du plan vectoriel* $\overrightarrow{P}$ *associé à* $\overrightarrow{P}$ *dans lui même ; étudier* $\phi \circ \phi$.

b) - *Démontrer qu'il existe deux droites vectorielles globalement invariant par* ϕ *;*

- *Démontrer que* $\overrightarrow{e_1}(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ *est une base normée de l'une de ces droites (que l'on appellera* (D_1)*) ;*
- *Déterminer une base normée* $\overrightarrow{e_2}(b; c)$ *de l'autre droite (que l'on appellera* (D_2)*), avec* $b > 0$.

c) - *Quelles sont les transformés par* ϕ *respectivement des vecteurs de* (D_1) *et de* (D_2) *?*

- *Écrire dans la base* $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *la matrice de* ϕ *;*
- *En déduire l'expression analytique de* f *dans le plan* P *rapporté cette fois au repère* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

d) *Démontrer que* f *est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite que l'on précisera et une translation dont le vecteur est colinéaire à la direction de l'axe de symétrie.*

⋆ ⋆ Chapitre Quatre ⋆ ⋆

RÉFLEXIONS PÉDAGOGIQUES SUR LA NOTION DE MARQUE D'UNE APPLICATION AFFINE DU PLAN

4.1 INTRODUCTION

Ce chapitre illustre, grâce à des exemples précis, une conception active de la pédagogie des mathématiques. Il a été inspiré des travaux *M.SANGARÉ*([2]). Pour l'écrire, on a constamment imaginé et observé de jeunes élèves aux prises avec certains exercices de mathématiques proposés sur les applications affines, et on a relevé plusieurs difficultés rencontrées par ces élèves. Nous pouvons donc se poser la question à savoir : quelle est la méthode la plus appropriée pour la résolution de ces types d'exercices ? Nous établissons premièrement les résultats d'une enquête menée sur les difficultés de résoudre certains exercices sur les applications affines du plan, après nous construisons une séquence d'enseignement sur la notion de "marque d'une application affine du plan", et pour terminer le chapitre nous proposons une classification et une résolution de quelques types d'exercices qu'on peut résoudre en utilisant les propriétés de cette notion. Nous souhaitons dans cette réflexion donner d'autres approches de résolution des exercices sur les application affines.

4.2 ORIGINE ET MOTIVATIONS

La situation qui est à l'origine de cette expérience dans une classe de terminale scientifique est relative à l'élément d'enseignement intitulé, " Géométrie plane ". Elle est libellée de la façon suivante :

Activité : Le triangle ABC est isocèle en A. La rotation d'angle représenté par θ transforme ABC en XYZ dans cet ordre. Ce triangle-image a été effacé sauf le point X.

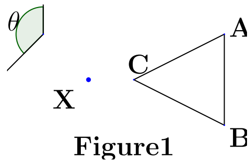


Figure1

Peux-tu reconstruire le triangle XYZ ? Explique ta construction.
On vous demande d'effectuer les tâches suivantes :
(T_1) : Résoudre l'exercice ; on décrira à chaque fois la technique de construction et les propriétés géométriques utilisées dans chacune de ces constructions.
(T_2) : On suppose que l'utilisation du centre de la rotation considérée n'est pas autorisée pour la construction du triangle XYZ. Pouvez-vous identifier deux points possibles de blocage dans la résolution de cet exercice ? Justifiez à chaque fois votre réponse.

4.2.1 Objectifs et Stratégies de résolution de l'activité

a-) Objectifs :

L'objectif de l'activité était double : il s'agissait d'abord de tester les compétences des élèves dans une tâche de construction géométrique à l'aide d'instruments, puis les inciter lorsque cela est nécessaire, à utiliser les propriétés de conservation pour construire le triangle image XYZ.

b-) Stratégies de résolution de l'activité :

Deux stratégies de résolution notées respectivement (S_1) et (S_2) sont proposées :
- La stratégie (S_1) est fondée sur la détermination préalable du centre de la rotation. La construction des points Y et Z s'effectue par des techniques utilisant uniquement le centre et l'angle de la rotation en jeu.
- La stratégie (S_2) n'utilise pas le centre de la rotation, elle se fonde uniquement sur les autres propriétés de conservation de la rotation (distance, angle orientée, etc. . .).

4.2.2 Synthèse des résultats de l'activité

a-) Résumé des comportements des élèves

Nous avons douze participants ; les deux tâches ont été exécutées de façon individuelle. Les tableaux ci-dessous, donnent un résumé des types de réponses données respectivement à la tâche (T_1) et à la résolution de l'activité par la stratégie (S_2) dans la tâche (T_2).

(S_1)	(S_2)	Réponses Erronées
4	0	8

Tableau 1 (T_1)

(S_2)	Réponses Erronées	Pas de Réponse
2	5	5

Tableau 2 (T_2)

b-) Quelques difficultés révélées à l'issue de cette activité

L'analyse des résultats ci-dessus montrent que certaines connaissances géométriques et d'autres non géométriques nécessaires à la résolution de cet exercice, n'étaient pas disponibles chez la plupart de ces élèves.
- Les résultats de type « Pas de Réponse » du tableau 2 (T_2), sont dus essentiellement à l'échec des intéressés à construire par exemple, le point Y tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{XY}}) = \theta$ sans utiliser le centre et l'angle de la rotation en jeu.
- Un second type de difficultés est relatif à l'utilisation des propriétés géométriques des applications (leur effet sur les longueurs, les angles, le parallélisme, l'orthogonalité, etc...) comme outils de construction de figures. Par exemple, « comment utiliser l'orientation de l'angle θ de la rotation en jeu pour anticiper sur la position du centre de rotation à partir de la figure par rapport aux deux demi-plans de frontière la droite (AX) ? » Or, les programmes de terminale C ([6]) stipulent que : « l'on présentera quelques situations où interviennent les applications pour démontrer une propriété, construire une figure, rechercher un ensemble de points ». Nous avons aussi constaté, une assez bonne maîtrise des connaissances mathématiques exigibles sur le chapitre intitulé, " géométrie plane ". Cependant, le réinvestissement de ces acquis n'est effectif que dans le domaine de la géométrie analytique. Or ces élèves de classes sont appelés à acquérir les compétences telles que : formuler les propriétés géométriques d'une application affine, établir une classification des applications affines et caractériser une application affine.

4.3 LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

4.3.1 Présentation

Nous présentons la séquence, par une description des différentes situations de formation, par la formulation des objectifs visés et par un bref résumé des comportements d'élèves. Rappelons que les élèves au nombre de douze, ont l'habitude de travailler selon une organisation suivante : travail individuel puis travail par petits groupes, ensuite bilan et enfin synthèse (ce qui est à retenir de la situation). Chaque groupe est composé de trois personnes.

4.3.2 Expérience 1 : Première rencontre avec la notion de marque

Définition 4.3.1. *Nous appelons marque d'une application([2]), tout segment [MM'] qui joint un point M de la figure-objet à son transformé M' sur la figure-image.*

a-) Énoncé :

Pour chacune des applications affines du plan enseignées en classe de terminale scientifique (projection, symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie), effectuer les tâches ci-dessous :

(1) Choisir et représenter le(s) élément(s) caractéristique(s) de chacune d'elles.

(2) Dessinez un quadrilatère convexe non particulier et non aplati $ABDC$ puis construire son transformé $A'B'C'D'$ par celle-ci.

(3) Construire les marques associées aux sommets $A, B, C,$ et D du quadrilatère objet.

(4) Formuler si possible les propriétés géométriques à partir des marques uniquement.

b-) Objectifs :

Nous avons deux principaux objectifs visés par cette situation :

- Faire construire par les élèves un modèle de application affine du plan au niveau de la classe de terminale scientifique à partir des marques.
- Leur faire établir les premières propriétés géométriques du modèle.

c-) Nos attentes

Les tâches (1) et (2) nous permettent d'avoir au niveau des élèves, un bref aperçu sur leur maîtrise des constructions géométriques avec les instruments, selon les pratiques habituelles de classe. En effet,la construction de l'image d'une figure donnée à partir de (ou des) élément(s) caractéristique(s) de l'application en jeu, est une tâche classique en début de lycée. Le travail en groupe permet à ceux qui ont des lacunes d'y remédier.Les tâches (3) et (4) ne sont pas familières, elles rompent avec les tâches (1) et (2). Cette rupture offre l'occasion d'initier le futur étudiant à l'élaboration d'objets d'enseignement. Une telle démarche permet à l'élève d'éviter de tomber, dans des pratiques tendant à appliquer strictement des recettes tirées de n'importe quelle ressource pédagogique. Ainsi on peut espérer sur les résultats ci-dessous.

Projection

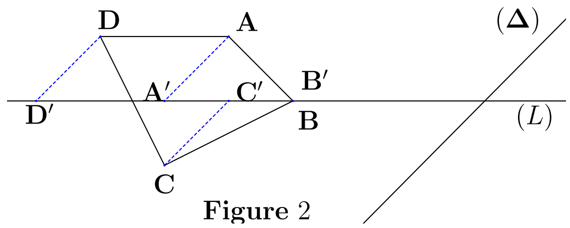


Figure 2

Il s'agit ici d'une projection sur la droite (L) parallèlement à la droite (Δ) (Figure 2). On peut formuler les propriétés suivantes pour une projection :

1-) Les droites-supports des marques sont parallèles.

2-) La direction de la projection est celle de la droite-support de toute marque non ponctuelle.

Symétrie Orthogonale

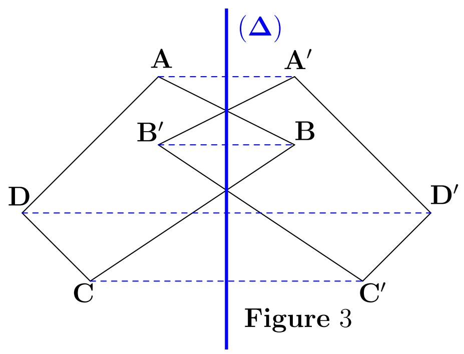


Figure 3

Il s'agit ici, d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ) (Figure 3). On peut formuler certaines propriétés ci-dessous :

1-) Les droites-supports des marques sont parallèles.

2-) Les marques non ponctuelles ont même médiatrice qui est l'axe de symétrie.

Rotation

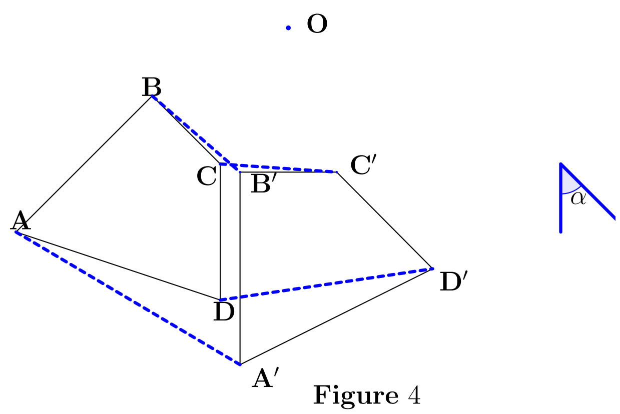


Figure 4

Le point O est le centre de la rotation en question (Figure 4). En observant la figure, il apparaître très peu d'indices sur les propriétés de l'application en jeu. Cependant, avec des tracés supplémentaires sur le modèle, (donc une reconfiguration au sens de Duval, [3]) nous pouvons émettre pour une rotation :

1-) Les médiatrices des marques sont concourantes.

2-) Le point commun des médiatrices des marques est le centre de rotation.

3-) L'angle de rotation est l'angle sous lequel on "voit toute marque non ponctuelle à partir du centre de rotation".

L'homothétie de rapport négatif

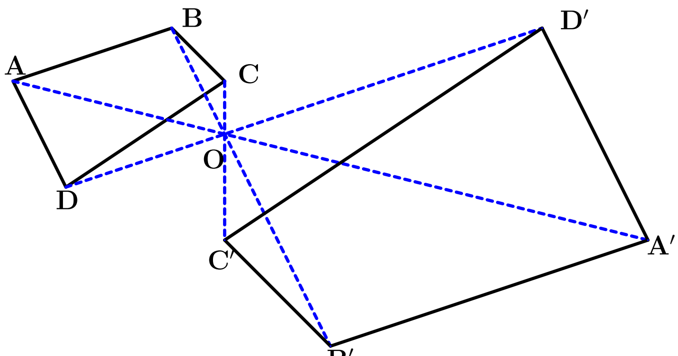


Figure 5

Nous avons ici une homothétie de rapport négatif (Figure 5). En observant cette figure, nous pouvons constater, les propriétés suivantes d'une homothétie de rapport négatif :

1-) Les marques sont concourantes.

2-) Le point commun à toutes les marques est le centre de l'homothétie.

3-) Le centre d'une homothétie de rapport négatif, partage en mesure algébrique, chaque marque dans le même rapport que celui de l'homothétie.

Translation

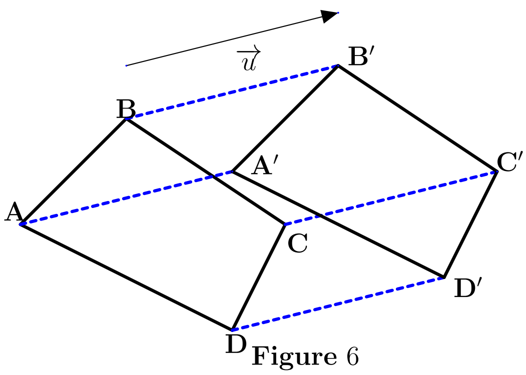


Figure 6

Nous avons une translation de vecteur $\vec{u}$ (Figure 6). En regardant la figure, nous pouvons émettre à partir des marques, les propriétés suivantes d'une translation de vecteur $\vec{u}$:

1-) Les marques sont parallèles.

2-) Les marques ont une même longueur égale à la norme du vecteur de translation $\vec{u}$.

Symétrie centrale

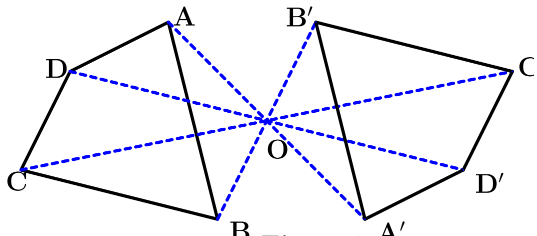


Figure 7

Soit O le centre de la symétrie (Figure 7). Après analyse de la figure, nous pouvons donner à partir des marques, les propriétés suivantes d'une symétrie de centre O :

1-) Les marques sont concourantes.

2-) Le point commun à toutes les marques est le centre de la symétrie centrale.

3-) Le centre de la symétrie centrale est le milieu de chaque marques.

d-) Un résumé des comportements d'élèves

Les résultats obtenus par les différents groupes ont été conformes dans l'ensemble à nos attentes à l'exception de deux cas. Le premier est relatif à la formulation des propriétés d'une homothétie de rapport positif : les marques sont très peu fonctionnelles alors que leurs droites-supports respectives le sont. Le second cas est lié à la rotation ; il faut apporter des modifications à la figure des marques par des tracés supplémentaires, pour faire remarquer certaines propriétés de la rotation. Ces deux types de lacune relèvent de notre point de vue du fait que les connaissances exigibles pour la conversion entre deux registres (ici figures et texte) ne sont pas disponibles ([1], p.54).

4.3.3 Expérience 2 : Classification de quelques applications affines

a-) Énoncé : On veut établir à partir de la notion de marque, une classification des six applications étudiées dans l'expérience 1. A cet effet deux variables sont retenues.

La première variable notée (V_1) est liée à la longueur des marques ; elle prend deux valeurs :

- $(V_{1.1})$: " les marques ont même longueur " ;

- $(V_{1.2})$: " les marques n'ont pas même longueur ".

La deuxième variable notée (V_2) est liée à la position relative des marques ; elle prend trois valeurs :

- ($V_{2.1}$) : " les marques sont parallèles " ;
- ($V_{2.2}$) : " les marques sont concourantes " ;
- ($V_{2.3}$) : " les marques sont non parallèles et non concourantes ".

On vous demande d'établir cette classification sous forme de tableau.

b-) Objectifs :

Faire établir par les élèves une classification des applications affines considérées.

c-) Nos attentes

Les isométries sont considérées comme applications ponctuelles du plan dans lui-même ; ceci a comme conséquence l'abandon de tout usage des configurations géométriques usuelles au profit de techniques relevant de la géométrie analytique. Or ces techniques ne sont pas suffisamment maîtrisées par les élèves en début de lycée ; de plus, aucune autre méthode s'appuyant sur les figures ne leur est proposée. Aussi, le modèle des marques est une alternative pour combler ce vide : il offre la possibilité d'une classification fondée à la fois sur des propriétés spatiales (comme la perception visuelle de l'intersection ou non de marques) et sur des propriétés géométriques (comme l'égalité des longueurs de marques ou le parallélisme de leurs droites-supports ...). Le tableau ci-dessous propose un regroupement de ces applications selon les valeurs des deux variables retenues.

	$V_{1.1}$	$V_{1.2}$
$V_{2.1}$	Translation	Projection parallèle ; Symétrie orthogonale
$V_{2.2}$		Symétrie centrale ; Homothétie de rapport négatif
$V_{2.3}$		Rotation ; Homothétie de rapport positif

Tableau 3

En particulier, on peut déduire de ce tableau, une classification des isométries enseignées en terminale scientifique à savoir, la symétrie orthogonale, la symétrie centrale, la translation et la rotation : ces quatre isométries se distinguent les unes des autres à partir des marques puisque dans le tableau (Tableau 3), chacune occupe une et une seule cellule.

4.3.4 Expérience 3 : Caractérisation des isométries du plan

a-) Énoncé :

On se propose d'étudier en particulier les quatre isométries du plan enseignées (symétrie

orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) dans une classe de terminale scientifique, en utilisant uniquement le modèle des marques.
1-) Formuler une « propriété caractéristique » de chacune de ces isométries, en utilisant uniquement les marques, les droites ou les demi-droites supports des marques, à l'intention de vos camarades élèves en classe de terminale scientifique.
2-) Y-a-t-il un lien entre cette caractérisation des isométries du plan fondée sur le modèle des marques avec les connaissances apprises sur le cours relatif aux applications affines du plan. Si oui lequel ?

b-) Objectifs :

- Établir une caractérisation des isométries affines à partir des marques.
- Étudier l'existence d'un lien entre une caractérisation selon le modèle des marques, et les caractérisations possibles reçues en classe.

c-) Nos attentes

Les configurations liées au modèle des marques, pourraient susciter l'appréhension de nouvelles propriétés de la figure. Par exemple, lorsque f est une isométrie du plan, (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé par f en le triplet (X', Y', Z'), alors la configuration géométrique obtenue par les trois marques $[XX']$, $[YY']$, $[ZZ']$ peut être caractéristique de l'isométrie en jeu. C'est ainsi qu'on pourrait énoncer les « propriétés caractéristiques» ci-dessous.

Propriété 4.3.1. *Soit (X, Y, Z) un triplet de points non alignés transformé en un triplet de points (X', Y', Z') par une isométrie inconnue f. Dire que :*
i-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même médiatrice équivaut à dire que f est une symétrie orthogonale.
ii-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même milieu équivaut à dire que f est une symétrie centrale.
iii-) Les marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ ont même longueur, que les demi-droites $[XX')$, $[YY')$, $[ZZ')$ sont parallèles et de même sens, équivaut à dire que f est une translation.
iv-) Les médiatrices des marques $[XX']$, $[YY']$ et $[ZZ']$ sont concourantes en un point I et que ces trois marques sont vues sous le même angle orienté θ, à partir de I (c'est-à-dire $(\widehat{\overrightarrow{X'I}, \overrightarrow{X'X}}) = (\widehat{\overrightarrow{Y'I}, \overrightarrow{YY'}}) = (\widehat{\overrightarrow{Z'I}, \overrightarrow{Z'Z}}) = \frac{\pi-\theta}{2}$), équivaut à dire que f est une rotation.

Ces « propriétés caractéristiques » peuvent être considérées comme des connaissances scolaires ; elles peuvent être admises ou vérifiées à l'aide des matériels et instruments scientifique par les élèves d'une classe de terminale scientifique. Leur usage s'avère approprié dans des problèmes de reconnaissance d'isométries du plan enseignées à ce niveau scolaire.

4.4 RÉSOLUTION ET CLASSIFICATION DE QUELQUES EXERCICES AVEC LA NOTION DE MARQUES

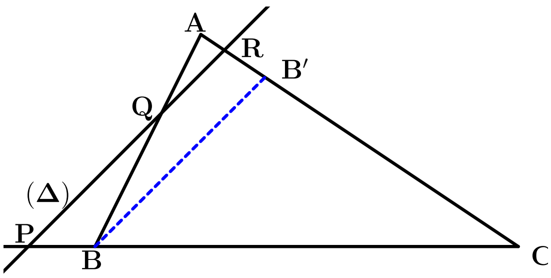
4.4.1 Résolution de quelques exercices

Activité :

Nous allons utiliser uniquement la propriété 1.3.1.iv pour résoudre le problème 1. Premièrement, traçons la médiatrice de la marque $[AX]$; et parce que les trois marques sont vues sous le même angle orienté θ à partir du centre de rotation O, on construit le point O tel que $(\widehat{\overrightarrow{XO}, \overrightarrow{XA}}) = \frac{\pi-\theta}{2}$. La détermination des deux autres points Y et Z se fait facilement connaissant le centre et l'angle de la rotation. On a ainsi reconstruit le triangle XYZ à partir de la notion de marque d'une application affine du plan.

Exercice 3.4.7 :

1-) Supposons les points P, Q, R alignés, calculons le produit : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$.



Soit (Δ) la droite portant les points P, Q, R. D'après le tableau 3, considérons la projection p de la droite (BC) sur la droite (AC) suivant la direction de la droite (PQ). Notons B', l'image du point B par la projection p. Alors $B' \neq Q$.

On a $p(B) = B'$, $p(P) = Q$ et $p(C) = C$, on en déduit que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}$. (1)

Considérons aussi la projection q de la droite (AB) sur la droite (AC) suivant la direction de la droite (PQ).

On a $q(B) = B'$, $q(A) = A$ et $q(R) = Q$, on en déduit que $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB'}}$. (2)

En multipliant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$ c'est-à-dire $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.

4.4.2 Classification des types d'exercices

Types d'exercices	Style de questions posées
Constructions	• Détermination des éléments caractéristiques de l'application ; • Construction d'une image connaissant de l'application affine.
Démonstrations	• Prouver que les points sont alignées ; • Montrer que les droites sont parallèles ; • Établir les égalités de la forme : $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \pm 1$.
Identifications	• Reconnaitre l'application affine à partir d'une figure donnée.

4.5 CONCLUSION

Les résultats sont partiels, mais nous avons été convaincu qu'une maitrise suffisante des mathématiques scolaire ne suffit pas pour exécuter les tâches pédagogiques du moins, celles liées à l'analyse des tâches. Nous sommes à présent conscient que le passage d'une géométrie académique ponctuelle, où les figures sont des parties anonymes du plan, à une géométrie du compas et de la règle s'appuyant sur des figures familières, constitue un élément pertinent de formation pour nos élèves. Par ailleurs, le décalage temporel dans l'exécution du cours intitulé, " Géométrie dans l'espace, Géométrie vectorielle et Géométrie affine " ne suffit pas, une étude sur d'éventuels liens entre leurs contenus respectifs nous paraît nécessaire. Notons enfin, que les tâches des élèves à analyser peuvent être construites à condition qu'elles soient conformes aux apprentissages visés par les programmes d'enseignement en vigueur. Le modèle des marques se situe dans cette perspective.

♣♣ CONCLUSION GÉNÉRALE ♣♣

Nous voici arrivé au terme de notre travail. Il était question pour nous de proposer premièrement une leçon complète sur la notion d'application affine du plan ; deuxièmement une série de trente exercices regroupée par centre d'intérêt et troisièmement une réflexion pédagogique sur la notion de marques d'une application affine du plan. Le contenu de ces chapitres, témoignent de tout la richesse de ce mémoire. L'un des objectifs était de proposer une méthode pour faciliter la résolution et la compréhension de certains exercices difficiles à résoudre par les élèves de classe de terminale scientifique ; la notion de marque est l'une des solutions les plus appropriées. nous avons aussi étudié les applications affines qui sont les applications qui conservent le barycentre et le coefficient de colinéarité. La présence de l'espace vectoriel sous-jacent permet d'associer à une telle application une application linéaire. Une question essentielle était alors l'existence de points fixes pour une application affine. En effet, en présence de points fixes, l'application affine est déterminée par sa partie linéaire : c'est essentiellement une application linéaire. C'est pourquoi on cherche toujours d'abord si une application affine possède un point fixe et dans ce cas on la comprend comme une application linéaire et on peut lui appliquer les techniques bien connues d'étude. C'est d'ailleurs essentiellement ce qu'on a fait dans le cas, des translations, des homothéties, des symétries, etc...

En perspective, on pourrait étudier l'impact de l'apprentissage des applications affines sur un espace affine sans connaitre la structure de cet espace affine. on peut donc se poser la question à savoir : quelles sont les propriétés de cet espace affine ?

♣♣ Bibliographie ♣♣

[1] DUVAL R., (2003). Décrire, visualiser ou raisonner : quels " apprentissages premiers " de l'activité mathématique ? Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Volume 8/2003. IREM de Strasbourg.

[2] SANGARÉ M. (2006). La marque d'une transformation géométrique : un exemple de modélisation didactique, Educacão Mathemàtica Pesquisa, Educ. Math. Pesqui, São Paulo, v.8, n.2, pp.225-266.

[3] DUVAL R. (1995).Sémiosis et pensée humaine ? Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels, Peter Lang.

[4] Koper, R. et Tattersall, C. (dir.). (2005). Learning design. A handbook on modelling and delivering networked education and training. Berling Heidelberg : Springer-Verlag.

[5] Paquette, G. (2006). Introduction à la spécification IML-LD d'une perspective d'ingénierie pédagogique. http ://www.idld.org/Methodology/tabid/174/Default.aspx

[6] ARRETE $N°53/D/43/MINEDUC/SG/IGP/ESG$ portant définition des programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement secondairegénérale.

[7] International Journal of Technologies in Higher Education (2007),4(2). WWW.profetic.org/revue.

[8] SALIOU TOURE et les autres, Collection Inter Africaine de Mathématique Terminale (CIAM) SM, EDICEF, 11/2004.

[9] CHARLES MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.