SIMILITUDES DIRECTES PLANES

MOUNTOUMJOU ABDEL AZIZ

le 11 octobre 2012

Table des matières

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES OPERATIONNELS

Au terme de cette ressource, l'apprenant doit être capable de :

1. Définir les similitudes
2. Déterminer la forme réduite des similitudes directes planes
3. Donner les éléments géométriques d'une similitude directe
4. Maitriser la composée des similitudes directes planes
5. Construire les images des figures simples
6. Déduire une image à l'aide des similitudes directes
7. Utiliser les similitudes directes planes pour construire, rechercher les lieux géométriques et démontrer les propriétés

PLACE DE LA RESSOURCE DANS LE PROGRAMME

Les similitudes directes devraient s'enseigner après les leçons sur les nombres complexes et les isométries.

PRE-REQUIS

L'apprenant doit connaitre :

1. La notion de distance entre deux points et ses propriétés
2. La notion d'application et de composition des applications
3. La notion de barycentre et ses propriétés
4. Les homothéties et leurs utilisations
5. Les isométries du plan et leurs utilisations
   (a) Composition (symétries-translations, rotations-translations)
   (b) Classification des isométries (déplacements, antidéplacements et leurs compositions)
6. Les nombres complexes
   (a) Formes algébriques et opérations
   (b) Conjugué et module

(c) Forme trigonométrique

(d) Notation exponentielle

(e) Résolution des équations dans $\mathbb{C}$ et des systémes d'équations à deux inconnues

(f) L'expression complexe d'une transformation du plan

(g) Caractérisations des configurations du plan à l'aide des nombres complexes

HISTORIQUE ET MOTIVATION

Les notions d'homothétie et de rotation sont connues depuis les classes de Troisième et celles de similitudes en classe de Premières scientifiques. Les applications de cette dernière transformation en physique sont d'une grande importance comme en optique physique. Plus couramment, deux objets sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude. Plus généralement, une similitude agrandit ou réduit la taille de l'image d'un objet.

UTILISATIONS FUTURES

Les similitudes directes du plan nous permettent de résoudre plus facilement certains problèmes de mathématiques physiques liés à la pratique dans la vie courante.

1 INTRODUCTION

2 GENERALITES

En classe de Première, les similitudes sont définies comme la composée d'une isométrie et d'une homothetie. Ici, la notion sera plus apprfondie. L'utilisation des nombres complexes facilitera l'étude des éléments caractéristiques de cette transformation géométrique.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

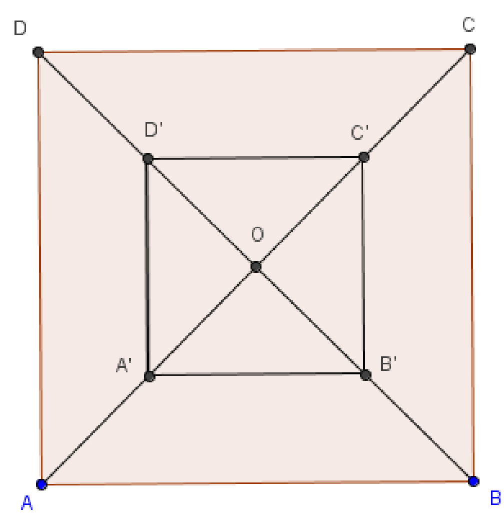
3 DEFINITIONS

3.1 Similitudes planes

Activité. *Soit $ABCD$ un carré direct de centre O ; A', B', C' et D' les milieux respectifs des côtés $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$. Soit f l'application du plan dans lui même qui transforme les points A, B, C, D respectivement en A', B', C' D' et conservant le barycentre de deux points.*

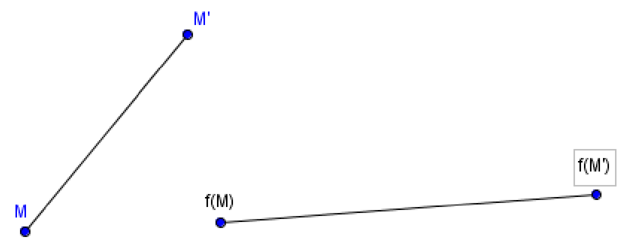
1. *Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CD) et $(C'D')$, (AD) et $(A'D')$ sont parallèles.*
2. *Démontrer que $A'B' = \frac{1}{2}AB$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$, $C'D' = \frac{1}{2}CD$ et $A'D' = \frac{1}{2}AD$.*
3. *(a) Quelle conjecture peut faire pour l'application f ?*

   (b) Montrer que si M est un point du plan, M est le barycentre des points A, B et C. Déduire que $\forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = \frac{1}{2}MN$.



Aziz/FIG 1.PNG

Définition 1. *On appelle similitude plane toute application f du plan dans lui-même telle que :* $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall\ M,\ N \in \mathcal{P},\ f(M)f(N) = kMN$. *$k$ est le rapport de la similitude f.*

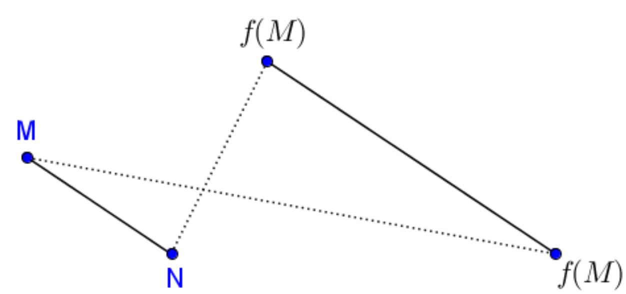


Aziz/FIG 2.PNG

Exemple 1. *1. Toute homothétie h de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ est une similitude plane de rapport $|k|$.*

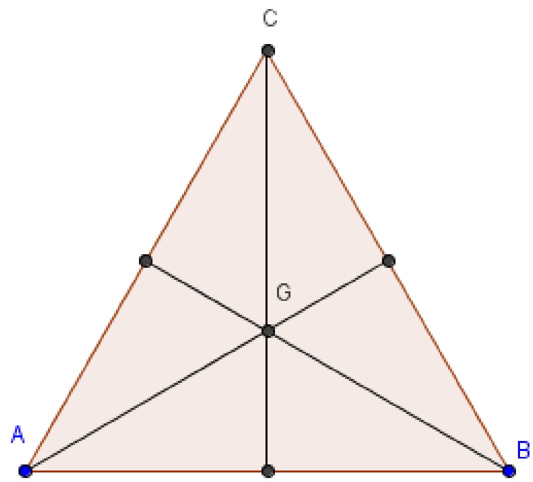
En effet, $\forall\ M,\ N \in \mathcal{P}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h(M)h(N)} = k\overrightarrow{MN} &\implies \|h(M)h(N)\| = \|kMN\| \\ &\implies \|h(M)h(N)\| = |k|\|MN\| \\ &\implies h(M)h(N) = |k|MN.\end{aligned} \tag{2}$$



Aziz/FIG 3.png

2. *Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre G et s la réflexion d'axe (AG). On a : $s(A) = A$, $s(B) = C$ et $s(G) = G$, c'est-à-dire que $s(AB) = s(A)s(B) = AC = AB$ et $s(GB) = s(G)s(B) = GC = GB$. Donc s conserve le rapport des distances. Ainsi s est une similitude plane.*



Aziz/FIG 4.PNG

3. *Toute isométrie du plan est une similitude plane de rapport* 1.
   En effet, soit f une isométrie du plan ; $\forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = MN \Longrightarrow f(M)f(N) = kMN$ avec $k = 1$.

Remarque 1. 1. *Une homothétie conserve les angles orientés. Si h est une homothétie, alors $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{h(C)h(D)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.*

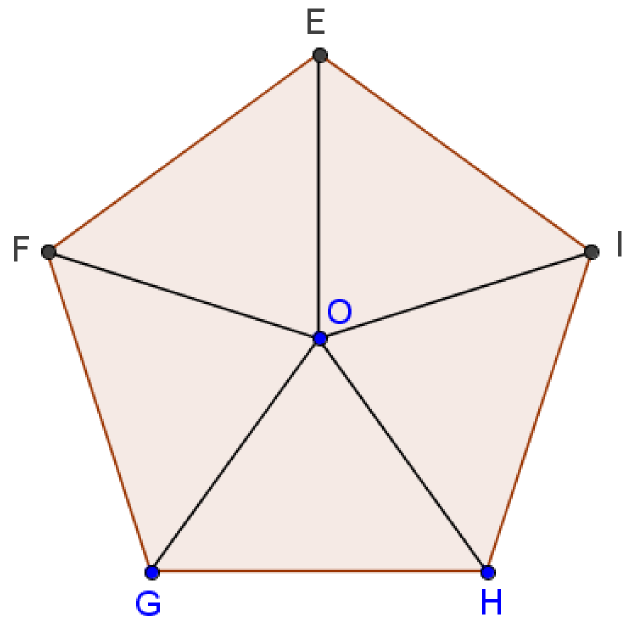
2. *Une réflexion conserve les angles orientés. Si s est une réflexion, alors $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{s(A)s(B)}, \overrightarrow{s(C)s(D)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.*

Les similitudes conservent les angles géométriques.

3.2 Similitudes directes planes

Activité. *Soit $EFGHI$, un pentagone régulier direct de centre O et f l'application du plan dans lui même qui transforme les points E, F, G, H, I respectivement en F, G, H, I, E et conservant le barycentre des points.*

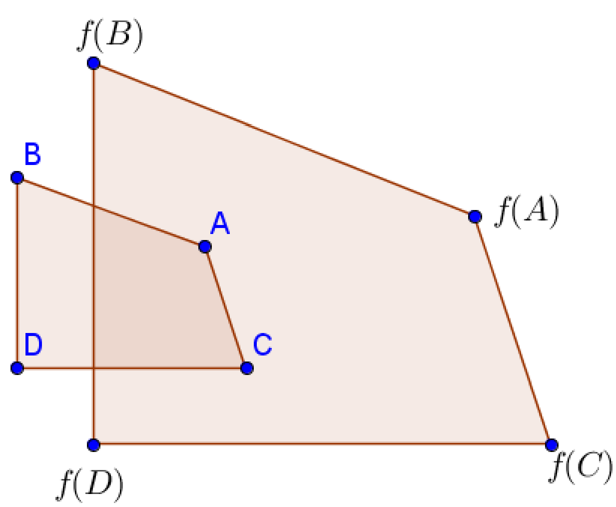
1. *Que peut-on dire des angles $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}}), (\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}}), (\widehat{\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}}), (\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OI}})et(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}})$.*
2. *Démontrer que : $mes(\widehat{\overrightarrow{f(O)f(E)}, \overrightarrow{f(O)f(F)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{f(O)f(F)}, \overrightarrow{f(O)f(H)}} = mes(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}})$.*



Aziz/FIG 5.png

3. *Que peut-on conjecturer pour* $mes(\widehat{\overrightarrow{f(M)f(N)}, \overrightarrow{f(M')f(N')}}), \forall M, N, M', N' \in \mathcal{P}$ *?.*

Définition 2. *Une similitude directe plane est une similitude plane f qui conserve les angles orientés c'est-à-dire que* $\forall ABCD \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.



Aziz/FIG 6.PNG

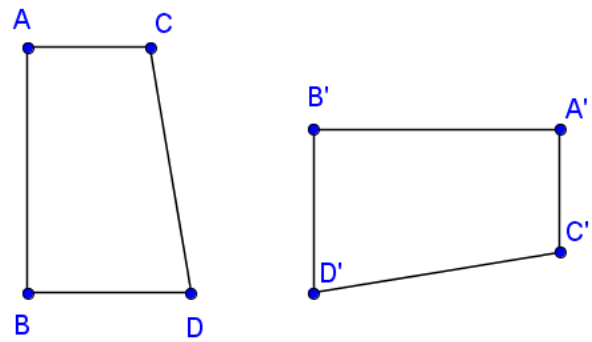
Note

Toute similitude directe plan qui n'est pas directe est dite indirecte ou rétrograde.

Exemple 2. *1. Toute homothétie est une similitude directe plane. En effet, si h est une similitude, alors* $\forall M, N, M', N' \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{h(M)h(N)}, \overrightarrow{h(M')h(N')}}) = mes(\widehat{MN, M'N'})$.

2. *Toute rotation est une similitude directe plane. En effet, si r est une rotation, alors*

$$\forall M, N, M'N' \in \mathcal{P},\ on\ a : \begin{cases} r(M')r(N') = M'N' \\ r(M)r(N) = MN \\ mes(\widehat{\overrightarrow{r(M)r(N)}, \overrightarrow{r(M')r(N')}}) = mes(\widehat{MN, M'N'}). \end{cases}$$

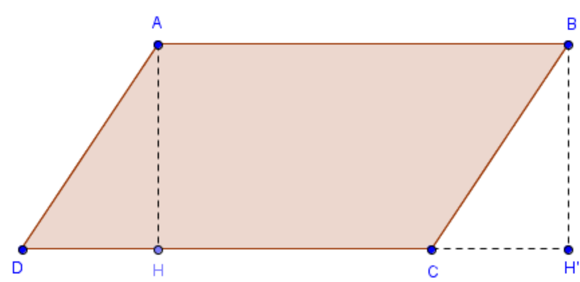


Aziz/FIG 7.PNG

3. *Soit $ABCD$ parallélogramme de sens direct, H et H' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite (DC). On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On a :$t(A) = B$, $t(D) = C$ et $t(H) = H'$ c'est-à-dire que $t(ADH) = BCH'$. Ainsi,*

$$mes(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AH}) = mes(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH'})$$
$$mes(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH}) = mes(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CH'})$$
$$mes(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HD}) = mes(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})$$

Donc t conserve les rapports les angles orientés : c'est une similitude directe plane.



Aziz/FIG 8.PNG

Proposition 1. *Une similitude directe est la composée d'un déplacement (translation ou rotation) et d'une homothétie.*

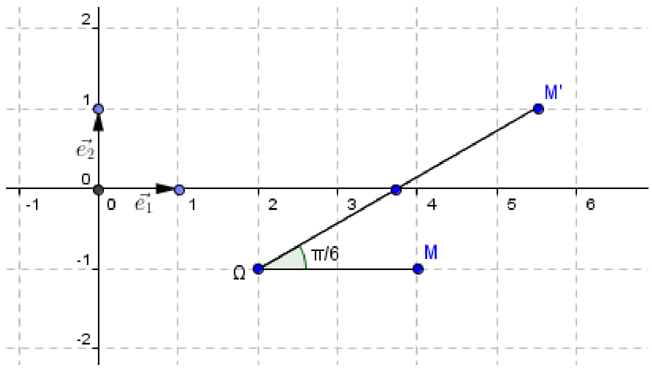
4 FORME REDUITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité.

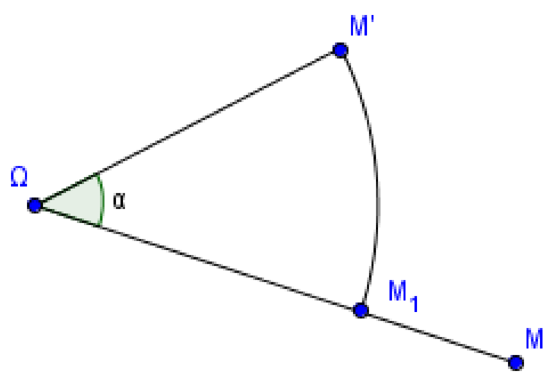
Proposition 2. *: Soient k un réel strictement positif et f une similitude directe plane de rapport k.*

- *Si f n'a pas de point invariant, alors f est une translation du plan de vecteur non nul.*

Aziz/FIG 9.PNG



- *Si f a au moins un point invariant Ω , alors il existe un unique angle α tel que l'on ait $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$.*



Aziz/FIG 11.PNG

Si f n'est pas l'identité du plan, et si f admet au moins un point invariant Ω, alors ce point est le seul point invariant.

L'application f est déterminée par la donnée de Ω, k et α. On dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α et on note souvent $s(\Omega, k, \alpha)$.

La décomposition $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$ ou tout simplement $h \circ r$ est appelée forme réduite de f.

5 EXPRESSION COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. *Soit f une similitude directe de rapport k. Elle est composée d'un déplacement g et d'une homothétie h de rapport k.*

1. *Démontrer que l'expression complexe de g est : $g(z) = az+b$ où a est un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe quelconque.*
2. *Démontrer que l'expression complexe de h est $h(z) = kz + d$ où k est le rapport le rapport de l'homothétie (donc un nombre réel non nul) et d un nombre complexe quelconque.*
3. *En Déduire l'expression complexe de f.*

Théorème 1. *Soit f une similitude directe (de rapport k et d'angle θ). Alors, f admet une expression complexe de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$.*

Démonstration. *Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ. Il est à remarquer que si f a une expression complexe de la forme $z^{'} = az + b$, alors O a pour image $O^{'}$ d'affixe b.*
Appelons donc b l'affixe de O' image de O par f et soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par f.
Alors $O'M' = kOM$, donc $\mid z' - b \mid = k \mid z - 0 \mid$, soit $\mid \frac{z'-b}{z} \mid = k$.
De plus, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'} = \theta$.
Donc $\arg(z' - b) - \arg(z - 0) = \theta$, soit $\arg(\frac{z'-b}{z}) = \theta$.
$\frac{z'-b}{z}$ est le nombre complexe de module k et d'argument θ,donc $\frac{z'-b}{z} = ke^{i\theta}$.
D'où f s'écrit $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $k \neq 0$ donc $a \neq 0$.

Activité. *Soit s une application du plan dans lui-même dont l'expression complexe est de la forme $z^{'}az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.*

1. *Montrer que si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.*
2. *Montrer que si $a \neq 1$, alors l'écriture complexe de de s est $z^{'} - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$ où ω est la solution de l'équation $z = az + b$, k le module de a et α un argument de a. En déduire que $s = h \circ r = r \circ h$.*

Théorème 2 (Réciproque)**.** *Soient a et b deux nombres complexes.*
Toute transformation f admettant une expression complexe de la forme $az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe de rapport $k =\mid a \mid$ et d'angle $\theta = \arg a$.

Démonstration. *Soient M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par f.*

On a $z_{N'} = az_N + b$ *et* $z_{M'} = az_M + b$.

Alors $z_{N'} - z_{M'} = a(z_N - z_M)$.

D'où $\mid z_{N'} - z_{M'} \mid = \mid a \mid\mid z_N - z_M \mid$.

Donc $M'N' = \mid a \mid MN$ *et* $a \neq 0$.

Donc f *est une similitude de rapport* $\mid a \mid$.

De plus, comme $a \neq 0$,*son argument existe et* $\arg(z_{N'} - z_{M'}) = \arg a + \arg(z_N - z_M)$.

Donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{MN})$.

D'où $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \arg a$.

f *est une similitude et l'angle entre un vecteur et son image est constant.*

Donc f *est une similitude directe et son angle vaut cette constante :* $\arg a$.

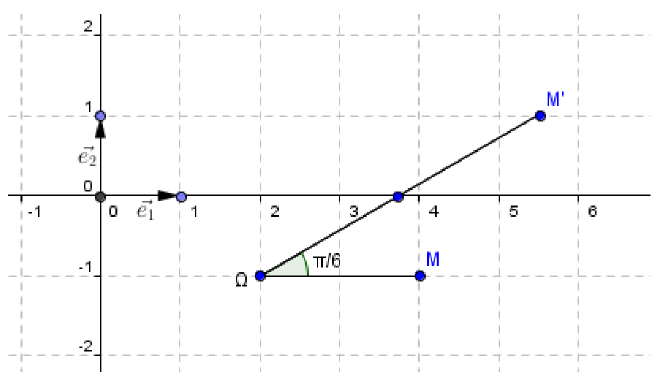
Définition 3. *Les nombres réels* k *et* θ *sont appelés respectivement* ***rapport*** *et* ***angle*** *de la similitude directe* f.

Le point Ω *est appelé* ***centre*** *de la similitude directe* f.

Une similitude directe qui n'est pas une translation est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés ***éléments caractéristiques*** *de cette similitude.*

Exemple 3. 1. *Donner l'expression complexe de la similitude* s *de centre* $\Omega(2; -1)$ *de rapport* 2 *et d'angle* $\frac{\pi}{6}$.

Aziz/FIG 9.PNG



2. *Etudier la transformation* f *définie par*

$$\begin{aligned} f : C &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i \end{aligned} \tag{3}$$

(5)

Solution. *1. La similitude directe s a pour point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - i$.*

On a : $z' = az + b$

$\Rightarrow \omega = a\omega + b$

$\Rightarrow b = \omega(1 - a)$

$\Rightarrow z' = az\ \omega(1 - a)$

$\Rightarrow z' = az + \omega(1 - a)$.

Donc

$$\begin{aligned} z' &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}(z - 2 + i) + 2 - i \\ &= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(z - 2 + i)) + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)(z - 2 + i) + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)z - 2\sqrt{3} - 1 - 2i + i\sqrt{3} + 2 - i \\ &= (\sqrt{3} + i)z + 1 - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3). \end{aligned} \tag{7}$$

2. *L'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = az + b$, donc f est une similitude directe.*

L'équation $z = (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i$ *a pour solution*

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{-1 + i}{1 - 1 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{-1 + i}{i\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + i}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \tag{9}$$

. De plus, $(1 + i\sqrt{3}) = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On en déduit que f est une similitude directe de centre $\Omega(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$ *de rapport 2 et d'angle* $-\frac{\pi}{3}$.

Méthode. *Pour déterminer les équations caractéristiques d'une similitude directe s d'expression complexe $z^{'} = az + b$ $(a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}, b \in \mathbb{C})$,*

1. *Résoudre l'équation $z = az + b$, on obtient le centre de s.*
2. *Calculer le module de a, on obtient le rapport de s.*
3. *Déterminer un argument de s, on obtient l'angle de s.*

Cas particuliers

Les translations sont des similitudes de rapport 1 et d'angle nul.

Une homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe de rapport k et d'angle nul.

Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe de rapport $-k$ et d'angle π.

Une rotation d'angle θ est une similitude directe de rapport 1 et d'angle θ

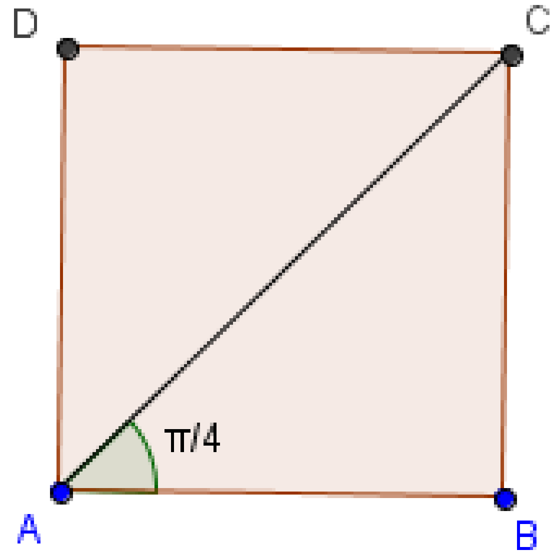
6 PROPRIETE CARACTERISTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. *Soit s une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α. En utilisant l'expression complexe de s, démontrer que $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k$ et $mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha$.*

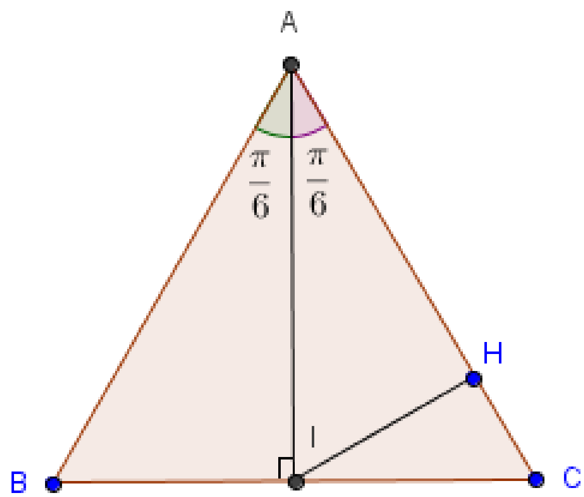
Proposition 3. *Soit s la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α.*
$\forall M, M^{'} \in \mathcal{P}$, on a :

$$s(M) = M^{'} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M^{'} = k\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M^{'}}) = \alpha \end{cases}$$

Exemple 4.
1. *Soit $ABCD$ un carré direct. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C.*
2. *Soit ABC un triangle équilatéral direct. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et H, le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).*
   (a) *Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe $s^{'}$ de centre A qui transforme B en I.*
   (b) *Démontrer que cette similitude directe transforme I en H.*



Aziz/FIG 12.PNG



Aziz/FIG 13.PNG

Solution. *1. On a :* $\frac{AB}{AC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *et* $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Donc, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

C'est-á-dire que $\begin{cases} AC = \sqrt{2}AB \\ mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Nous en déduisons que s est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$.

2. (a) *On a :* $\frac{AI}{AB} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ *et* $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

Donc, $\frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

C'est-á-dire que $\begin{cases} AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB \\ mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Il s'en suit que s' *est la similitude directe de centre A, de rapport* $\sqrt{3}2$ *et d'angle* $\frac{\pi}{6}$.

(b) *On montre de la même façon que* $\begin{cases} AH = \frac{\sqrt{3}}{2}AI \\ mes(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AH}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$.

Donc $s^{'}(I) = (H)$.

7 EXISTENCE ET UNICITE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Activité. *Soit* s *une similitude directe plane, Soit* A, B, $A^{'}$, *et* $B^{'}$ *quatre points du plan tels que* $A \neq B$ *et* $A^{'} \neq B^{'}$.

On suppose qu'il existe une similitude directe s *telle que* $s(A) = A^{'}$ *et* $s(B) = B^{'}$. *Elle a pour écriture complexe* $z^{'} = az + b$.

(a) *Montrer que* $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ *et* $b = z_{A'} - az_A$.

(b) *Conclure.*

1. *On suppose que* s *est une similitude directe dont l'expression complexe est* $z^{'} = az + b$ *avec* $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ *et* $b = z_{A'} - az_A$.
   (a) *Montrer que* a *est bien définie.*
   (b) *Montrer que* a *est non nul et que* s *est bien définie.*
   (c) *en déduire que* $s(A) = A^{'}$ *et* $s(B) = B^{'}$.
   (d) *Conclure.*

Théorème 3. *Soit* A, B, $A^{'}$, *et* $B^{'}$ *quatre points du plan tels que* $A \neq B$ *et* $A^{'} \neq B^{'}$. *Alors, il existe une unique similitude directe* s *telle que* $s(A) = A^{'}$ *et* $s(B) = B^{'}$.

Démonstration. *Si une telle similitude* s *existe, alors il existe* a *et* b *complexes, avec* $a \neq 0$ *tels que :* $z_{A'} = az_A + b$ *c'est-à-dire que* $b = z_{A'} - az_A$ *et* $z_{B'} = az_B + b$.
Alors $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$ *c'est-à-dire* $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, *auquel cas :* $b = z_{A'} - az_A$.
Si s *existe, alors le couple* $(a; b)$ *est unique et* s *est donc elle aussi unique.*
Soit s *dont l'expression complexe est* $z^{'} = az + b$ *avec* $a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ *et* $b = z_{A'} - az_A$.
B *étant différent de* A, a *est défini.*
$zA^{''} = az_A + b$ *et* $z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A$.
Donc $z_{B'} = az_B - az_A + z_{A'}$.
De plus, comme $A^{'} \neq B^{'}$, a *est non nul et* s *est donc définie.*
D'où : $s(A) = A^{'}$ *et* $s(B) = B^{'}$.
Une similitude directe qui transforme A *en* $A^{'}$ *et* B *en* $B^{'}$ *existe et est donc unique.*

Remarque 2. – *s a pour rapport : $k = \frac{A'B'}{AB}$ et pour angle $\theta = \left(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{AB}\right)$.*

– *Il est nécessaire d'avoir $A \neq B$ et $A' \neq B'$, mais il est possible d'avoir $A = A'$ et $B = B'$ auquel cas, les points sont invariants par s.*

8 EXPRESSION ANALYTIQUE D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Soit f est une similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$.

Posons $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $a = \alpha + i\beta$ et $b = m + in$ avec x, x', y, y', α, β, $m, n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{z}' = az + b \quad &\Longleftrightarrow \quad x' + iy' = (\alpha + i\beta)(x + iy) + m + in \\
&\Longleftrightarrow \quad x' + iy' = \alpha(x + iy) + i\beta(x + iy) + m + in \\
&\Longleftrightarrow \quad x' + iy' = \alpha x + i\alpha y + i\beta x - \beta y + m + in \\
&\Longleftrightarrow \quad x' + iy' = \alpha x - \beta y + m + i(\alpha y + \beta x + n) \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} {}' = \alpha x - \beta y + m \\ y' = \alpha y + \beta x + n \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

Le système obtenu est l'expression analytiques de la similitude directe f.

Exemple 5. *1. Déterminer l'expression analytique de la similitude directe s définie par $z' = (1 - 2i)z - 3 + i$.*

2. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les élements caractéristiques de la similitude directe dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$

Solution. *1. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors,*

$$\begin{aligned}
x' + iy' &= (1 - 2i)(x + iy) - 3 + i \\
&= x + iy - 2ix + 2y - 3 + i \\
&= x + 2y - 3 + i(-2x + y + 1)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned}
z\text{'=}x\text{'+}iy\text{'} &= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}) \\
&= x(1 + i\sqrt{3}) + y(-\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\
&= \frac{z + \overline{z}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{z + \overline{z}}{2}(-\sqrt{3 + i}) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\
&= (\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3} + i}{2i})z + (\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3} + i}{2i})\overline{z} + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\
&= (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}
\end{aligned} \tag{15}$$

L'équation $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ a pour unique solution $\frac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = 1 - 2i$. De plus, $1 + i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc f est une similitude directe de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

9 ELEMENTS GEOMETRIQUES D'UNE SIMILITUDE DIRECTE PLANE

Etudions l'ensemble des points invariants de la similitude directe f définie par l'écriture complexe : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b$.

Soit M un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z. On a

$$\begin{aligned}
\text{f(M)=M} &\iff f(z) = z \\
&\iff az + b = z \\
&\iff (1 - a)z = b.
\end{aligned} \tag{17}$$

Il faut donc distinguer les 2 cas suivants : $a = 1$ et $a \neq 1$.

Cas où $a = 1$

Activité. *Soit* f *la une similitude directe* $d_{efiniepar:}\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + b,\ b \in \mathbb{C}.$

1. *Démontrer que si* $b = 0$*, alors* $f = id_{\mathcal{P}}$*.*
2. *Démontrer que si* $b \neq 0$*, alors* f *n'admet pas de point invariant.*

Théorème 4. *Soit* b *un nombre complexe et* f *la transformation de* $\mathbb{C}$ *définie par :* $\forall z \in \mathbb{C}$*,* $f(z) = z + b$*. La similitude directe associée à* f *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{w}$ *d'affixe* b*.*

Démonstration. *Soit* $\overrightarrow{w}$ *le vecteur d'affixe* b*. Démontrons que* f *est la translation de vecteur* $\overrightarrow{w}$*. On a :* $\forall z \in$*,* $f(z) = z + b$ *c'est-à-dire* $f(z) - z = b$ *et par suite,* $\forall M \in \mathcal{P}$*,* $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{w}$*.*

Exemple 6. *L'application* f *définie par :* $\forall z \in \mathbb{C}$*,* $f(z) = z - 1 + 3i$ *est une translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *d'affixe* $-1 + 3i$*.*

Cas où $a \neq 1$

Activité. *Soit* f *la similitude directe définie par :* $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b,\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}.$

1. *Démontrer que* f *admet un unique point invariant* Ω*. Préciser son affixe* z_0*.*
2. *Démontrer que l'écriture complexe de* f *est donc* $z' - z_0 = a(z - z_0)$*.*
3. *On suppose que* $z \neq z_0$*. En déduire de ce qui précède que* $\begin{cases} \Omega M' = a\Omega M \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = arga. \end{cases}$.

Théorème 5. *Soient* (a, b) *un élément de* $(anglethbbC^* - \{1\}) \times \mathbb{C}$ *et* f *la transformation de* $\mathbb{C}$ *définie par :* $\forall z \in \mathbb{C}$*,* $f(z) = az + b$*. La similitude directe* f *admet un unique point invariant* Ω *d'affixe* $\frac{b}{1-a}$*.*

Définition 4. f *est appelée la similitude directe de centre* Ω*, de rapport* $\mid a \mid$ *et d'angle* $\arg a$*. On dit aussi, par abus de langage que* f *est la similitude directe de centre* Ω *de rapport* $\mid a \mid$ *et d'angle* $\arg a(2\pi)$*.*

Soient k un réel non nul et θ un réel quelconque.
Soit f la similitude de centre Ω de rapport k et d'angle $\theta(2\pi)$. On a donc : $\forall (M, M') \in (\mathcal{P} - \{\Omega\})^2$, M'= f(M) $\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M'}\| = k\|\overrightarrow{\Omega M}\| \\ mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = arga. \end{cases}$.

Exemple 7. *Soit* g *l'application définie par :* $\forall z \in \mathbb{C}$*,* $g(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 3$*.*
$1 - i\sqrt{3} \neq 1$ *donc* g *admet un unique point invariant* Ω *d'affixe* $\omega = \frac{3}{1-(1-i\sqrt{3})} = -i\sqrt{3}$*.*
g *est donc une similitude directe de rapport* $|1 - i\sqrt{3}| = 2$ *et d'angle* $arg(1 - i\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}(2\pi)$*.*

Remarque 3. *Si $k = 1$ et $\theta = 0$, on a alors $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ c'est-à-dire que $M' = M$. L'application f est donc l'identité.*

Cas particuliers

1^{er} cas :$a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

Activité. *Soit f la transformation du plan définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.*

Théorème 6. *Soient a un élément de $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et b un élément de $\mathbb{C}$; soit f la transformation définie de lmentdeCpar :$\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.*
La similitude directe f est l'homothétie de rapport a dont le centre est le point Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$.

Remarque 4. *Si $a = -1$, alors f est une symétrie centrale.*

Exemple 8. *Considérons la similitude directe plane d'écriture complexe $z^{'} = 2z + 3 + 2i$.*
On a : $2 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $\frac{3+2i}{1-2} = -3 - 2i$. Cette similitude est donc de rapport 2 et de centre $\Omega(-3; -2)$

2^e cas :$a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $|a| = 1$ Soit f la transformation du plan définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $|a| = 1$ et $b \in \mathbb{C}$.
Démontrer que f est la rotation de centre Ω d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle non nul $Arga$.

Théorème 7. *Soient a un élément de $C^* \setminus \{1\}, demodule 1 et b un lment de C.$*
$Soit f la transformation de C dfinie par$:$\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$, et soit Ω le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$.
La similitude directe f est la rotation de centre Ω et d'angle $Arga$.

Remarque 5. *Si $a = \pi(2\pi)$ c'est-á-dire si $a = -1$, alors f est la symétrie centrale.*

Exemple 9. *Considérons la similitude directe plane définie par $z^{'} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + 3 + i\sqrt{3}$.*
On a : $| - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ et $arg(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$.
D'autre part, $\frac{3+i\sqrt{3}}{1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(3+i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} = \frac{2(3+i\sqrt{3})^2}{3^2+3} = \frac{2(6+6i\sqrt{3})}{12} = 1 + i\sqrt{3}$.
Cette similitude directe est donc la rotation d'angle $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et de centre $\Omega(1; \sqrt{3})$.

10 COMPOSITION DE SIMILITUDES DIRECTES PLANES

Activité. *Soient s et $s^{'}$ deux similitudes directes planes d'expressions complexes respectives $z^{'} = ke^{i\alpha}z + b$ et $z^{'} = k^{'}e^{i\alpha^{'}}z + b^{'}$.*

1. *Déterminer l'expression complexe de la similitude $s \circ s^{'}$. En d'éduire le rapport et l'angle de cette similitude.*
2. *Déterminer l'expression complexe de la similitude s^{-1}. En d'éduire le rapport et l'angle de cette similitude.*

Théorème 8. *Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle α et s' une similitude directe de rapport k' et d'angle α'.*
Alors,

- *la composée $s' \circ s$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.*
- *la réciproque de s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.*

L'ensemble des similitudes directes du plan est donc un groupe de transformations.

Démonstration. *Soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et s' la similitude directe d'expression complexe $z' = k'e^{i\alpha'}z + b$.*
L'expression complexe de $s' \circ s$ est $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$, donc $s \circ s'$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
L'expression complexe de s^{-1} est $z' = \frac{1}{k}e^{-i\alpha}z + \frac{1}{k}e^{-i\alpha}b$, donc s^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

Exemple 10. *On considère les similitudes directes $s_1 : z^{'} = 2iz+1-2i$ et $s_2 : z^{'} = (1-i)z+1+i$. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les élements caractéristiques de le similitude $s_2 \circ s_1$ et de s_1^{-1}.*

Solution. *s_1 a pour expression complexe $z^{'} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z + 1 - 2i$. Donc elle a pour rapport $k_1 = 2$ et d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.*
s_2 a pour expression complexe $z^{'} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + i$. Donc elle a pour rapport $k_2 = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.
La composée $s_2 \circ s_1$ est donc une similitude directe de rapport $k = k_1k_2 = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. La réciproque s_1^{-1} de s_1 est une similitude directe de rapport $k^{'} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{2}$ et d'angle $\theta^{'} = -\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$.

Attention. *$s \circ s'$ et $s' \circ s$ ne sont pas égales.*

En effet :

$s' \circ s$ a pour expression complexe : $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$

$s \circ s'$ a pour expression complexe : $z' = kke^{i(\alpha+\alpha')}z + (ke^{i\alpha}b' + b)$ A moins que $k'e^{i\alpha'}b + b'$ soit égale à $ke^{i\alpha}b' + b$, $s' \circ s$ et $s \circ s'$ ne sont pas égales.

En particulier

Si $kke^{i(\alpha+\alpha')} \neq 1$, $s \circ s'$ et $s' \circ s$ possèdent chacune un centre mais leurs centres peuvent être distincts.

Remarque 6. *Si deux similitudes directes ont même centre, alors $s' \circ s = s \circ s'$, c'est-á-dire composées d'homothéties et de rotations de même centre.*

11 SIMILITUDES DIRECTES ET CONFIGURATIONS DU PLAN

Activité. *Soit s une similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, A et B deux points du plan d'images respectives $A^{'}$ et $B^{'}$.*

1. *Démontrer en utilisant la propriété caractéristique que les images de trois points alignés sont trois points alignés. En déduire que :*
   (a) *une droite a pour image une droite.*
   (b) *s conserve les intersections.*
   (c) *le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A^{'}B^{'}]$ de longueur kAB.*
2. (a) *En utilisant la définition 1, démontrer que le milieu du segment $[AB]$ a pour image le milieu du segment $[A^{'}B^{'}]$.*
   (b) *Plus généralement, démontrer que le barycentre des points A et B a pour image le barycentre des points $A^{'}$ et $B^{'}$ affectés des mêmes coefficients.*
3. *En utilisant la définition 2, démontrer que :*
   (a) *des droites orthogonales ont pour images des droites orthogonales.*
   (b) *des droites paralléles ont pour images des droites paralléles.*
4. *Démontrer que le cercle de centre O et de rayon r a pour image le cercle de centre $s(O)$ et de rayon kr.*

5. *s miltiplie les aires par k^2.*

Théorème 9. *Soit s une similitude directe de centre Ωe, de rapport k et d'angle θ, A et B deux points du plan d'images respectives $A^{'}$ et $B^{'}$. s possède les propriétés suivantes.*

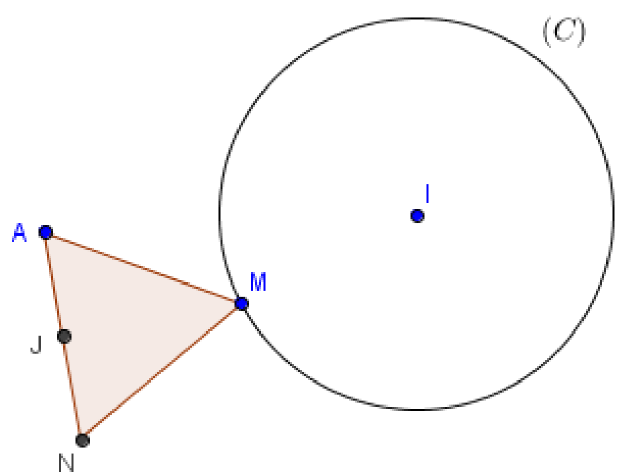
1. *s conserve l'alignement, donc :*
   - *l'image d'une droite est une droite.*
   - *s conserve les intersections.*
   - *l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A^{'}B^{'}]$ de longueur kAB.*
2. *s conserve de plus, par définition, les rapport de distances donc s conserve le milieu et plus généralement le barycentre.*
3. *s conserve les angles góemétriques donc s conserve l'orthogonalité et le parallélisme.*
4. *L'image du cercle de centre O et de rayon r est le centre de centre $s(O)$ et de rayon kr.*

12 UTILISATION DES SIMILITUDES DIRECTE PLANES

On peut utiliser les similitudes directes pour rechercher les lieux géométriques, démontrer les propriétés et construire.

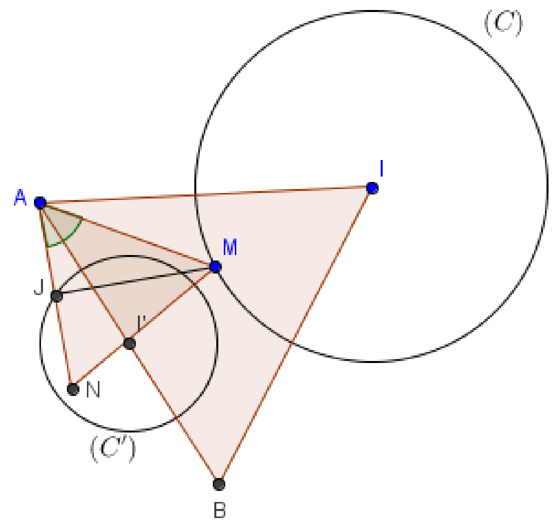
12.1 Rechercher les lieux géométriques

Enoncé 1. *Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et A un point du plan. M étant un point de $(\mathcal{C})$, on désigne par AMN le triangle équilatéral de sens direct.*
Déterminer le lieu géométrique du milieu J du segment $[AN]$, lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.



Aziz/FIG 15.PNG

Solution. *On a* $AN = \frac{1}{2}AM$ *et* $mes(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AN}){=}\frac{\pi}{3}$. *Donc* J *est l'image de* M *par la similitude directe* s *de centre* A, *d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *et de rapport* $\frac{1}{2}$. *Comme* M *décrit* $(\mathcal{C})$, *alors le lieu de* J *est l'image de* $(\mathcal{C})$ *par* s, *c'est-á-dire le cercle* $(\mathcal{C}^{'})$ *de centre* $I^{'}$ *image de* $(\mathcal{C})$ *par* s *de* I *qui passe par* J.



Aziz/FIG 16.PNG

12.2 Problèmes de construction

Enoncé 2. *Soit* s *la similitude directe d'écriture complexe :* $z' = (1-i)\,z + 2 - i$.

1. *Déterminer les éléments caractéristiques de* s.
2. *Déterminer et construire l'ensemble des points* M *d'affixe* z *tels que :*

   $\mid (1-i)\,z + 2 - i \mid = 4$
3. *Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.*

Solution. 1. *Soit* $M(z)$. *On a* $s(M) = M \Longrightarrow z = (1-i)z + 2 - i \Longrightarrow [1-(1-i)]z = 2 - i$

$iz = 2 - i \Longrightarrow z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i$.

Par ailleurs $1 - i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donc s *est la similitude de centre* $\Omega(-1;-2i)$ *de rapport* $\sqrt{2}$ *et d'angle* $-i\frac{\pi}{4}$.

2. *On a :* $|(1-i)z + 2 - i| = 4 \Longrightarrow |z^{'}| = 4 \Longrightarrow |1-i||z + \frac{2+i}{1-i}| = 4 \Longrightarrow |z + \frac{(2-i)(2+i)}{2}| = \frac{4}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow |z + \frac{3+i}{2}| = 2\sqrt{2} \Longrightarrow \Longrightarrow AM = 2\sqrt{2}$ *avec* $A(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$. *Donc* M *décrit* $\mathcal{C}(A;2\sqrt{2})$.

3. *Retrouvons ce rśultat par une méthode algébrique.*

Posons $z = x + iy$ *et* $z^{'} = x^{'} + iy^{'}$.

On a : $|(1-i)z+2-i| = 4 \Longrightarrow |(1-i)(x+iy)+2-i| = 4 \Longrightarrow |x+y+2+i(-x+y-1)| = 4 \Longrightarrow$

$(x+y+2)^2+(-x+y-1)^2 = 16 \Longrightarrow x^2+y^2+4+4x+4y+2xy+x^2+y^2+1+2x-2y-2xy = 16$

$\Longrightarrow 2x^2+2y^2+6x+2y+5 = 16 \Longrightarrow x^2+y^2+3x+y+\frac{5}{2} = 8 \Longrightarrow (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+\frac{5}{2} = 8$

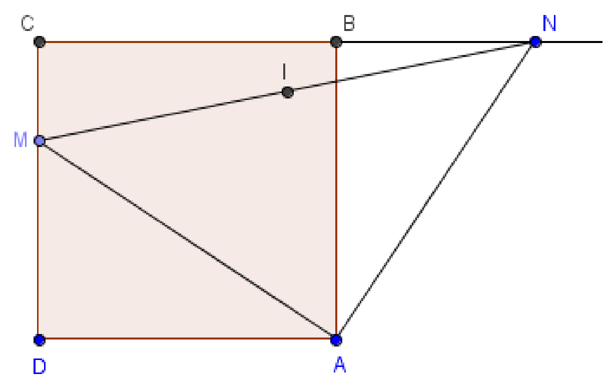
$\Longrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 8.$

Donc M décrit $\mathcal{C}(A; 2\sqrt{2})$.

12.3 Démonstration des propriétés

Enoncé 3. *Soit $ABCD$ un carré M un point de la droite (DC), la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la droite (BC) en N.*

Démontrer que AMN est un triangle rectangle isocèle.



Aziz/FIG 17.PNG

Solution. *On considère la similitude directe s de centre A et d'angle $\theta = mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD})$.*

On a $s(D) = M$ et $s(B) = N$. Donc, $\begin{cases} AD = kAM \\ mes(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = \theta \end{cases}$. *et* $\begin{cases} AB = kAN \\ mes(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}) = \theta \end{cases}$.

Or $AB = AD$, donc $AM = AN$. D'où, le triangle AMN est isocèle.

De plus, $(AM) \perp (AN)$. Il en résulte que le triangle AMN est rectangle isocèle.

13 EXERCICES ET PROBLEMES

Le plan est rapporté á un repère orthonrmé directe $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e^1}, \overrightarrow{e^2})$

Exercice 1. *Déterminer dans chacun des cas suivants les caractéristiques de similitude directe d'écrture complexe donnée :*

1. $z^{'} = iz + 1$
2. $z^{'} = (1 - i)z + 2$
3. $z^{'} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}z + 3i$
4. $z^{'} = -z + 5i$
5. $z^{'} = z - 2 + i$
6. $z^{'} = -\sqrt{3}z$

Exercice 2. *Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de rapport k et d'angle α.*

1. $\Omega(5 - 4i)$, $k = \sqrt{3}$ *et* $\alpha = \frac{\pi}{6}$
2. $\Omega(-2)$, 2 *et* $\alpha = \frac{\pi}{4}$
3. $\Omega(3i)$, $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\frac{2\pi}{3}$
4. $\Omega(\frac{1}{2} + i)$, $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Exercice 3. *M, P et Q sont trois points du plan complexe d'affixe respectives i, 1, $2 + i$. Déterminer la similitude directe f telle que l'on ait : $f(M) = P$ et $f(O) = Q$. On donnera le centre le rapport et l'angle de f.*

Exercice 4. *Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z^{'} = 3iz + 9 + 3i$*

1. *Déterminer les éléments caractéristiques de s*
2. *Déterminer l'image par s : A*
   (a) *du cercele $(\mathcal{C})$ de centre $I(3 - i)$ et de rayon 1.*
   (b) *de la droite d'équation $y = 2x - 5$.*

Exercice 5. *Soient A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives $1 + 3i$, $4 + 3i$, $4 - 2i$, $1 - 2i$.*

1. *Montrer qu'il existe une similitude directe s telle que $s(A) = C$ et $s(B) = D$.*

2. *Déterminer* $s(C)$ *et* $s(D)$

3. *Démontrer que l'isobarycentre des points* A, B, C, D *est invariant par* s. *En déduire les éléments caractéristiques de* s.

Exercice 6. *Soit* A *le point d'affixe* i *dans le plan complexe. Soit* f *l'application du plan dans lui-même qui á yout point* M *d'affixe* z, *associe le point* $M^{'}$ *d'affixe* Z *d'éfinie par :* $Z = iz$.

1. *Déterminer les éléments gémétriques de* f.

2. *Déterminer l'ensemble des points* m *tels que les trois points* m, M A *soient alignés.*

Exercice 7. *Soient* A *et* B *les points de cooordonnées respectives* $(2, 1)$ *et* $(0, 3)$ *dans* $\mathcal{R}$. *On désigne par* h *l'homothétie de centre* A *et de rapport* $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, *par* r *la rotation de centre* B *et d'angle* $-\frac{\pi}{4} modulo 2\pi$ *et par* t *la translation de vecteur* $\overrightarrow{BO}$.
Déterminer le point C, *image de de* O *par l'application* $t \circ r \circ h$.
Donner les éléments caractéristiques de cette application ; on pourra utiliser les nombres complexes ou toute autre méthode.

Exercice 8. *Soit* ABC *et* $A^{'}B^{'}C^{'}$ *deux triangles tels que les droites* (AB) *et* $(A^{'}B^{'})$, (BC) *et* $(B^{'}C^{'})$, (CA) *et* $(C^{'}A^{'})$ *soient parallèles.*
Démontrer qu'il existe une similitude directe f *telle que l'on ait :* $f(A) = A^{'}$, $f(B) = B^{'}$, $f(C) = C^{'}$.
Les triangles ABC *et* $A^{'}B^{'}C^{'}$ *sont dits* ***directement semblables.***

Exercice 9. *Soit* ABC *un triangle . On désigne par* $A^{'}$, $B^{'}$ *et* $C^{'}$ *les milieux respectifs des côtés* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$.
Démontrer que les triangles ABC *et* $A^{'}B^{'}C^{'}$ *sont directement semblables ; on donnera le centre et l'angle de la similitude.*

Exercice 10. *Soient* M *et* $M^{'}$ *deux points d'affixes respectives* z *et* $z^{'}$ *tels que l'on ait :* $z^{'} = (1 + i)z + 1$

1. *Calculer le module et un argument de* $1 + i$.

2. *Déterminer les éléments caractéristiques de la trasformation du plan complexe qui á tout point du plan complexe qui, á tout point* M *d'affixe* z *associe* $M^{'}$ *d'affixe* $z^{'} = (1 + i)z + 1$.

3. *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan complexe tels que les vecteurs* $\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{OM^{'}}$ *aient la même norme.*

Exercice 11. *On considère l'application qui á tout point M du plan dáffixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (1+i)z - i$.*

1. *Déterminer les éments géométriques de f ; on appellera A son centre.*
2. *On suppose que M est distinct de A. Calculer une détermininination en radian de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'})$.*
3. *Déterminer l'ensemble des points M' image des points du cercle de centre O et de rayon 1.*

Exercice 12. *Soit f l'application du plan qui á tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' définie par : $z' = (1-i)z + 2 + i$.*

1. *Déterminer les éléments géométriques de f.*
2. *Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2.*
3. *Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait $|(1-i)z + 2 - i| = 2$.*
   (On pourra donner deux méthodes).

Exercice 13. *Soit f la transformation du plan complexe qui á tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3(1-i)}$.*

1. *Démontrer que f admet un unique pointinvariant I ; déterminer l'affixe de I.*
   Caractériser géométriquement f.
2. *Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement des coefficients $3, 2, 1$.*
   Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.
3. *On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y = x$.*
   Quel est l'ensemble décrit par G ?

Exercice 14. *Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $1-2i$, $-3+i$ et $7+6i$. Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en A.*

1. *Donner l'écriture complexe de s.*
   En déduire les éléments géométriques de s.
   Démontrer que le centre de s appartient á la droite (BC).
2. *Quelle est la transformée (D), dans la similitude s, de la droite $(O, \overrightarrow{e_1})$?*
   Quel point a pour transformée l'intersection de (D) et de (AB) ?

Exercice 15. *Soit f l'application du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui á tout point M de coordonnée (x, y) dans $\mathcal{R}$ associe le point M' de coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}$ définie par :* $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y + 1 \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$

Démontrer que f est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 16. *Soit f la transformation du plan complexe qui á tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = 2(1 + i\sqrt{3})z + 3$.*

1. *Quelle est la nature de f ? Préciser les éléments géométriques.*
2. *Soit (D) la droite d'équation : $x - y\sqrt{3} = 0$. Quelle est l'équation de l'image $f(D)$ de la droite (D) ?*
3. *Quelle est l'image par f du cercle de centre le point d'affixe $2i$ et de trayon 2 ?*

Exercice 17. *Soient $A, BetC$ les points d'affixes respectives $i, 1 + iet2 + 2i$.*

1. *Déterminer l'affixe du barycentre G des points $A, BetC$ affectés respectivement des coefficients $2, -2et1$.*
2. *Démontrer que la similitude directe s qui transforme A en B, B en C a pour centre le point G.*
3. *Déterminer l'angle et le rapport de s.*

Exercice 18. *Soit $ABCD$ un losange de sens directe, de centre I et tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$.*
On consieére la similitude directe s_c de centre C, qui tranforme A en B.

1. *Démontrer que l'image I' du point I par s_c est le milieu du segment $[BC]$.*
2. *Démontrer que l'image D' de D par s_c appartient á la droite (AC) et que les droites $(D'I')$ et (BC) sont perpendiculaires.*

   En déduire une construction du point D'.

Exercice 19. *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$. M étant un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B, on désigne par N et P les points d'intersection de la droite (BM) et du cercle de centre M passant par A.*
Déterminer les lieux géométriques des points N et P lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privée de A et B.

Exercice 20. *Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point n'appartenant pas á $\mathcal{D}$. M étant un point de $\mathcal{D}$, on désigne par N le point de $\mathcal{D}$ tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}}) = \frac{\pi}{6}$, par H_M et H_N les pieds des* *hauteurs issues de M et N dans le triangle AMN.*

Déterminer et construire les lieux géométriques des points H_M et H_N lorsque M décrit $\mathcal{D}$.

Exercice 21. *ABC est un triangle de sens direct. I, J et K sont les points tels que les triangles IBC, JAC et KBA sont de sens direct, rectangles et isocèles.*

1. *Déterminer :*
   - *(a) l'angle et le rapport de la similitude directe s_1 de centre A, qui transforme C en J.*
   - *(b) l'angle et le rapport de la similitude directe s_2 qui trasforme A en K et C en I.*
2. *En déduire que $IJAK$ est un parallélogramme.*

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

WEBOGRAPHIE