SIMILITUDES DIRECTES PLANES

Nom de l'étudiant: **MOUNTOUMJOU Abdel Aziz**

Nom de l'encadreur de l'ENS: **M. NNANG Hubert**, MC, UY1

Nom de l'inspecteur: **M. TCHOUTIO Moise**

Nom de l'encadreur du Lycée: **M. FOTSING Joseph**

Yaoundé, le 5 août 2014

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction ♣

En classe de Première, les similitudes directes planes sont définies comme la composée d'une homothétie et d'un déplacement (rotation ou translation) qui sont vus en classe de Troisième. Ici, la notion sera plus approfondie. L'introduction des nombres complexes facilite l'étude des éléments caractéristiques de cette transformation géométrique.

Les objectifs de l'étude des similitudes directes planes sont variés. D'abord, comme transformations affines du plan, elles admettent une expression affine (complexe) ce qui facilite l'étude des transformations du plan. Par exemple, dans le plan complexe, on peut facilement étudier toute transformation ayant pour expression complexe $z' = az + b$ avec a, b, z, $z' \in \mathbb{C}$, a non nul et également, passer à l'expression analytique. Elles nous permettent en plus de rechercher les lieux géométriques comme l'ensemble des images d'un point qui décrit un cercle et de démontrer les propriétés comme l'orthogonalité.

Les similitudes directes planes trouvent leurs applications en physique dans la fabrication des lentilles, des lunettes optiques puisque les similitudes directes planes ont pour but de transformer une figure en une figure qui lui est directement semblable. Aussi dans l'architecture, les similitudes directes planes sont utilisées dans la réalisation des plans avant la mise en oeuvre sur le terrain. Les architectes utilisent de ce fait l'échelle d'une carte qui représente le rapport de la similitude.

Chapitre Un

LE COURS DE SIMILITUDES DIRECTES PLANES

1.0.1 Objectifs pédagogiques

A la fin de ce chapitre, l'élève sera capable de :

1. définir une similitude directe plane ;
2. déterminer la forme réduite d'une similitude directe plane ;
3. caractériser les similitudes directes planes ;
4. construire les images des figures simples ;
5. appliquer les similitudes directes planes à la résolution géométrique des problèmes.

1.0.2 Pré-requis nécessaires

L'apprenant doit connaître :

1. la notion de distance entre deux points et les propriétés des distances ;
2. la notion d'application et de composition des applications ;
3. la notion de barycentre et ses propriétés ;
4. la notion d'angles orientés ;
5. les homothéties et leurs utilisations ;
6. les isométries du plan et leurs utilisations ;
7. les nombres complexes ;
8. les généralités sur les similitudes (Ressource $n^o 15$).

Ces pré-requis sont dans les livres de Mathématiques des collections CIAM et MONGE de classe de Terminale C.

1.0.3 Liens avec les autres parties du programme

Les similitudes directes planes devraient s'enseigner après les leçons sur les nombres complexes et les isométries. Elles utilisent les nombres complexes pour leur étude dans le plan complexe.

1.0.4 Plan de la ressource

1. Introduction
2. Articulations en liens avec les objectifs spécifiques
3. Exercices

1.0.5 Test de pré-requis

1. Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne $A(-3; 2)$ et $B(-4; 5)$. Calculer la distance AB.
2. Définir application, application surjective, application injective et application bijective. Donner un exemple pour chaque notion.
3. Définir le barycentre G de deux points $(A, 2)$ et $(B, -5)$ et calculer ses coordonnées pour A et B définis en 1).
4. Définir homothétie et donner sa propriété caractéristique.
5. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O. Déterminer la mesure principale des angles orientés $mes(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}})$, $mes(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$
6. – Définir isométrie du plan.
   – Citer les différentes isométries du plan et leurs caractérisations.
   – Faire une classification des isométries du plan.
7. On donne le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   – Calculer son inverse, son module et son argument et donner sa forme exponentielle.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1.1 Généralités

Définition 1.1. Une **transformation** f du plan $\mathcal{P}$ est une application bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$\forall M' \in \mathcal{P}, \exists! M \in \mathcal{P} \text{ tel que } M' = f(M).$$

Définition 1.2. Une **transformation affine** f du plan $\mathcal{P}$ est une transformation du plan $\mathcal{P}$ qui conserve le barycentre de deux points c'est-à-dire :

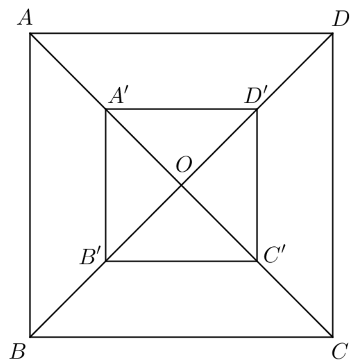
$$G = bar\{(M,\alpha);(N,\beta)\} \Longleftrightarrow f(G) = bar\{(f(M),\alpha);(f(N),\beta)\}.$$

1.2 Définitions

1.2.1 Similitudes planes

Activité 1.1. Soit $ABCD$ un carré direct de centre O ; A', B', C' et D' les milieux respectifs des segments $[OA]$, $[OB]$, $[OC]$ et $[OD]$. Soit f la transformation affine du plan dans lui même qui transforme les points A, B, C, D respectivement en A', B', C' D'.

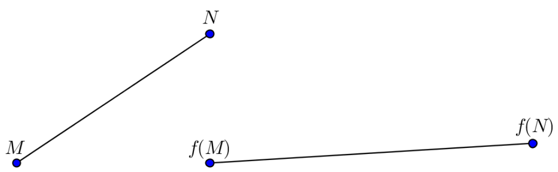
1. Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CD) et $(C'D')$, (AD) et $(A'D')$ sont parallèles.
2. Démontrer que $A'B' = \frac{1}{2}AB$, $B'C' = \frac{1}{2}BC$, $C'D' = \frac{1}{2}CD$ et $A'D' = \frac{1}{2}AD$.
3. Soient M et N deux points quelconques du plan. Compare MN et $f(M)f(N)$ et conclure.



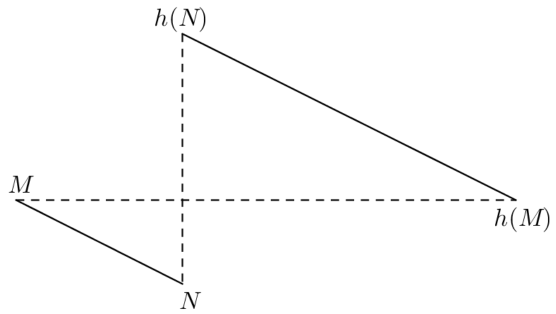
Définition 1.3. On appelle **similitude plane** toute transformation affine f du plan qui multiplie les distances par un nombre réel strictement positif c'est-à-dire :

$$\exists! k \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, M, N \in \mathcal{P},\, f(M)f(N) = kMN.$$

k est le **rapport** de la similitude f.

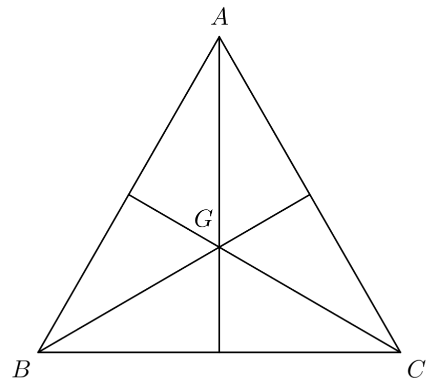


Exemple 1.1. 1. Toute **homothétie** h de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est une similitude plane de rapport $|k|$.



2. Toute **isométrie** du plan est une similitude plane de rapport 1.
   En effet, soit f une isométrie du plan ;
   $\forall M, N \in \mathcal{P}, f(M)f(N) = MN \Longrightarrow f(M)f(N) = kMN$ avec $k = 1$.
   f multiplie les distances par un nombre réel strictement positif : c'est donc une similitude pane. ■

3. Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre G et s la **réflexion** d'axe (AG). On a : $s(A) = A$, $s(B) = C$ et $s(G) = G$, c'est-à-dire que $s(A)s(B) = AC = AB$ et $s(G)s(B) = GC = GB$. Donc s multiplie les distances par un nombre réel strictement positif. Ainsi s est une similitude plane. ■



Remarque 1.2.1. 1. Toute homothétie conserve les angles orientés. Si h est une homothétie, alors $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{h(A)h(B)}, \overrightarrow{h(C)h(D)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

2. Toute réflexion transforme un angle orienté en son opposé. Si s est une réflexion, alors $\forall A, B, C, D \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{s(A)s(B)}, \overrightarrow{s(C)s(D)}}) = -mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

N.B : Les similitudes planes conservent les angles géométriques.

Les similitudes planes sont classé en deux catégories :

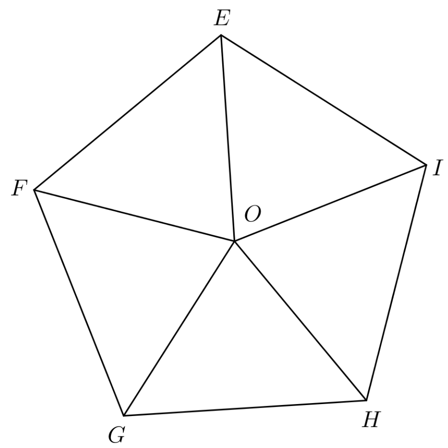
- ♢ les similitudes directes planes ;
- ♢ les similitudes indirectes planes.

Notre étude est focalisée sur la première catégorie.

1.2.2 Similitudes directes planes

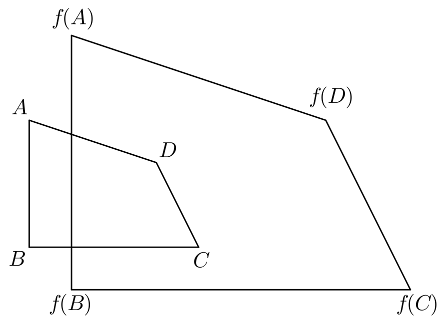
Activité 1.2. Soit $EFGHI$ un pentagone régulier direct de centre O et f la transformation affine du plan dans lui-même qui transforme les points E, F, G, H, I respectivement en F, G, H, I, E en laissant le point O invariant.

1. Comparer les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OE}})$.
2. Démontrer que : $mes(\widehat{\overrightarrow{f(O)f(E)}, \overrightarrow{f(O)f(F)}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{f(O)f(F)}, \overrightarrow{f(O)f(H)}} = mes(\widehat{\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OH}})$.
3. Comparer $mes(\widehat{\overrightarrow{MN}), \overrightarrow{M'N'}}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{f(M)f(N)}, \overrightarrow{f(M')f(N')}}$, $\forall M, N, M', N' \in \mathcal{P}$ et conclure.



Définition 1.4. Une **similitude directe plane** est une similitude plane f qui conserve les angles orientés c'est-à-dire que

$$\forall A,B,C,D \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}} = mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}). \text{ (cf. [7])}$$



Exemple 1.2.

1. Toute **homothétie** est une similitude directe plane.

   En effet, si h est une homothétie, alors

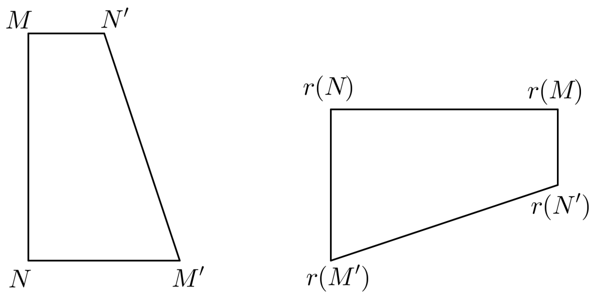
   $$\forall M,N,M',N' \in \mathcal{P}, mes(\widehat{\overrightarrow{h(M)h(N)}, \overrightarrow{h(M')h(N')}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}).$$

   Donc h conserve les angles orientés. De plus, h multiplie les distances par un nombre réel strictement positif (voir exemple 3.2.1). Ainsi, h est une similitude directe plane. ■

2. Toute **rotation** est une similitude directe plane. En effet, si r est une rotation, alors

   $$\forall M,N,M',N' \in \mathcal{P}, \text{ on a : } \begin{cases} r(M)r(N) = MN \\ r(M')r(N') = M'N' \\ mes(\widehat{\overrightarrow{r(M)r(N)}, \overrightarrow{r(M')r(N')}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}). \end{cases}$$

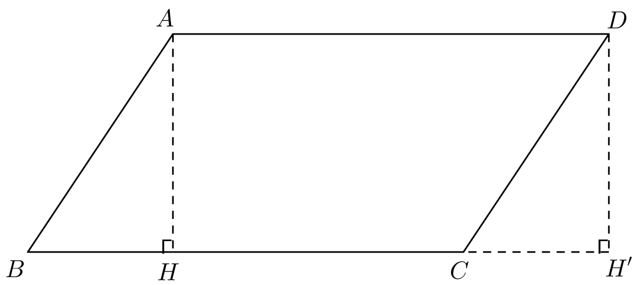
   Donc r multiplie les distances par un nombre réel strictement positif et conserve les angles orientés : c'est une similitude directe plane. ■



3. Soit $ABCD$ parallélogramme de sens direct, H et H' les projetés orthogonaux respectifs des points A et D sur la droite (BC). On considère la **translation** t de vecteur $\overrightarrow{AD}$. On a : $t(A) = D$, $t(B) = C$ et $t(H) = H'$donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DH'}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CH'}$, soit $AB = DC$, $AH = DH'$ et $BH = CH'$.
Ainsi, t multiplie les distances par un nombre réel strictement positif. De plus on a :

$$mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH'}})$$
$$mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CH'}})$$
$$mes(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}}) = mes(\widehat{\overrightarrow{H'D}, \overrightarrow{H'C}})$$

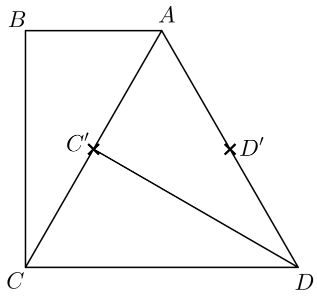
Donc t conserve les angles orientés. On conclut que t est une similitude directe plane. ■



1.3 Forme réduite d'une similitude directe plane

Activité 1.3. Soit $ABCD$ un trapèze rectangle direct tel que le triangle ACD soit équilatéral direct, C' et D' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AD]$. On considère f la transformation du plan $\mathcal{P}$ telle que : $f(B) = C$ et $f(C') = D$ en laissant le point A invariant.

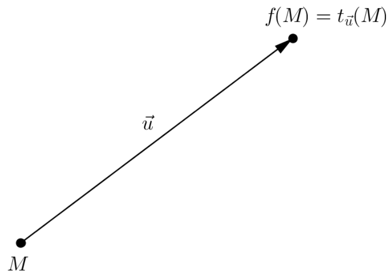
1. Montrer en revenant à la définition que f est une similitude directe plane.
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Montrer que $h \circ f$ est une rotation.
3. En déduire que $f = h' \circ g$ où g est un déplacement et h' une homothétie que l'on déterminera.



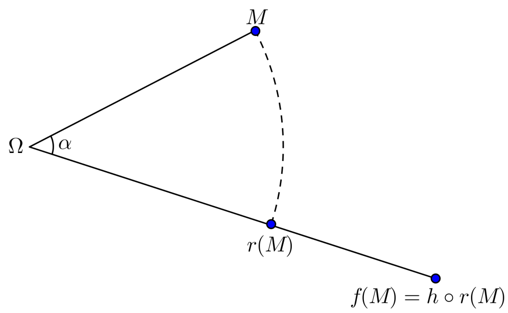
Proposition 1.1. Toute similitude directe plane est la composée d'un déplacement (translation ou rotation) et d'une homothétie. (cf. [2])

Proposition 1.2. Soient k un réel strictement positif et f une similitude directe plane de rapport k. (cf. [4])

– Si f n'a pas de point invariant, alors f est une translation du plan de vecteur non nul.



– Si f a au moins un point invariant Ω , alors il existe un unique angle α tel que l'on ait $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$.



Remarque 1.1. Si f n'est pas l'identité du plan, et si f admet au moins un point invariant Ω, alors ce point est le seul point invariant.

L'application f est déterminée par la donnée de Ω, k et α. On dit que f **est la similitude directe de centre** Ω**, de rapport** k **et d'angle** α et on note souvent $s(\Omega, k, \alpha)$.

Définition 1.5. La décomposition $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \alpha)$ ou tout simplement $h \circ r$ est appelée **forme réduite de** f .

Remarque 1.2. Comme h et r ont le même centre, alors $h \circ r = r \circ h$.

Cas particuliers

◊ Les translations sont des similitudes planes de rapport 1 et d’angle nul.

◊ Une homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe plane de rapport k et d’angle nul.

◊ Une homothétie de rapport $k < 0$ est une similitude directe plane de rapport $-k$ et d’angle π. (cf. [7])

◊ Une rotation d’angle θ est une similitude directe plane de rapport 1 et d’angle θ.

1.4 Expression complexe d’une similitude directe plane

Activité 1.4. Soit f une similitude directe plane de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$. Elle est la composée d’un déplacement g et d’une homothétie h de rapport k.

1. Démontrer que l’expression complexe de g est $g(z) = az+b$ où a est un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe quelconque.
2. Démontrer que l’expression complexe de h est $h(z) = kz + d$ où k est le rapport de l’homothétie (donc un nombre réel non nul) et d un nombre complexe quelconque.
3. En Déduire l’expression complexe de f.

Théorème 1.1. Soit f une similitude directe plane (de rapport k et d’angle θ) avec $k, \theta \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$. Alors, f admet **une expression complexe** de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$. (cf. [7])

Preuve : Soit f une similitude directe plane de rapport k et d’angle θ.
Il est à remarquer que si f a une expression complexe de la forme $z' = az + b$, alors O a pour image O' d’affixe b.
Appelons donc b l’affixe de O' image de O par f et soit M' l’image de $M(z)$ par f.
Alors $O'M' = kOM$, donc $\mid z' - b \mid = k \mid z - 0 \mid$, soit $\mid \dfrac{z' - b}{z} \mid = k$.
De plus, $mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}}) = \theta$. Donc $\arg(z' - b) - \arg(z - 0) = \theta$, soit $\arg(\dfrac{z' - b}{z}) = \theta$.
$\dfrac{z' - b}{z}$ est le nombre complexe de module k et d’argument θ, donc $\dfrac{z' - b}{z} = ke^{i\theta}$.
D’où f s’écrit $z' = az + b$ avec $a = ke^{i\theta}$ et $k \neq 0$ donc $a \neq 0$. ■ (cf. [7])

Activité 1.5. Soit s une application du plan dans lui-même dont l’expression complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d’affixe b.
2. Montrer que si $a \neq 1$, alors l’écriture complexe de s est $z' - \omega = ke^{i\alpha}(z - \omega)$ où ω est la solution de l’équation $z = az + b$, k le module de a et α un argument de a. En déduire que $s = h \circ r = r \circ h$ où r est la rotation d’angle α et h l’homothétie de rapport k.

Théorème 1.2 (Réciproque)**.** Soient a et b deux nombres complexes.
Toute application du plan f admettant une expression complexe de la forme $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe plane de rapport $k =\mid a \mid$ et d'angle $\theta = \arg a$.
(cf. [7])

Preuve : Soient M et N deux points quelconques du plan d'affixes respectives z_M et z_N tels que $f(z_M) = z_{M'}$ et $f(z_N) = z_{N'}$. Alors on a $z_{N'} = az_N + b$ et $z_{M'} = az_M + b$.
Donc $z_{N'} - z_{M'} = a(z_N - z_M)$. D'où $\mid z_{N'} - z_{M'} \mid = \mid a \mid\mid z_N - z_M \mid$.
Donc $M'N' =\mid a \mid MN$ $(a \neq 0)$ où M' et N' sont d'affixes respectives $z_{M'}$ et $z_{N'}$.
Donc f est une similitude de rapport $\mid a \mid$.
De plus, comme $a \neq 0$, son argument existe et $\arg(z_{N'} - z_{M'}) = \arg a + \arg(z_N - z_M)$.
Donc $mes(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{M'N'}}) = \arg a + mes(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{MN}})$. D'où $mes(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \arg a$.
f est une similitude et l'angle entre un vecteur et son image est constant.
Donc f est une similitude directe et son angle vaut cette constante : $\arg a$. ■ (cf. [7])

Proposition 1.3. Toute similitude directe plane f est une **transformation du plan**.

Preuve : En effet, f admet une expression complexe de la forme $z' = az + b$ avec a et b des nombres complexes et a non nul. Donc f est une application affine du plan. Ainsi, f est une application bijective du plan c'est-à-dire une transformation du plan. ■

Définition 1.6. Les nombres réels k et θ sont appelés respectivement **rapport** et **angle** de la similitude directe plane f.
Le point invariant Ω, lorsqu'il existe, est appelé **centre** de la similitude directe plane f.
Une similitude directe plane qui n'est pas une translation est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés **éléments caractéristiques** de cette similitude. (cf. [1])

Corollaire 1.1. Soit f une similitude directe plane de centre Ω d'affixe ω. Alors f admet une expression complexe de la forme $z' - \omega = a(z - \omega)$ avec $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ et $a = ke^{i\theta}$.

Exemple 1.3.
1. Donner l'expression complexe de la similitude s de centre $\Omega(2; -1)$ de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.
2. Etudier la transformation f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i \end{aligned}$$

Solution :

1. Expression complexe de la similitude s :
   On veut déterminer les nombres complexes a et b tels que $s(z) = az + b$. Comme $\Omega(\omega)$ est le centre de s, alors $\omega = a\omega + b$. Donc $b = \omega(1 - a)$. D'où $z' = az + \omega(1 - a)$.

$$\begin{aligned}
\text{En outre, } |a| = 2 \text{ et } arg(a) = \frac{\pi}{6} &\Rightarrow a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\
&\Rightarrow \omega = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\omega + b \\
&\Rightarrow b = \omega(1 - 2e^{i\frac{\pi}{6}}) \\
&\Rightarrow b = (2 - i)(1 - \sqrt{3} - i) \\
&\Rightarrow b = 2 - 2\sqrt{3} - 2i - i + i\sqrt{3} - 1 \\
&\Rightarrow b = 1 - 2\sqrt{3} + i(-3 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

   D'où $\boxed{z' = (\sqrt{3} + i)z + 1 - 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3)}$

2. Etude de la transformation f :
   L'écriture complexe de la transformation f est de la forme $z' = az + b$, donc f est une similitude directe plane.
   L'équation $z = (1 - i\sqrt{3})z - 1 + i$ a pour unique solution

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{-1 + i}{1 - (1 - i\sqrt{3})} \\
&= \frac{-1 + i}{i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1 + i}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

   De plus, $(1 - i\sqrt{3}) = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. On en déduit que

   $\boxed{f \text{ est une similitude directe plane de centre } \Omega(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ de rapport 2 et d'angle } -\frac{\pi}{3}}$

Méthode :

Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe plane s d'expression complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*\backslash\{1\}, b \in \mathbb{C}$), on peut procéder comme suit :

1. on résous l'équation $z = az + b$, pour obtenir le centre de s ;
2. on calcule le module de a, pour obtenir le rapport de s ;
3. on détermine un argument de a, pour obtenir l'angle de s. (cf. [1])

Tableau récapitulatif des transformations planes d'expression complexe z'=az+b

Nous donnons ici la nature et éléments caractéristiques de la transformation plane f d'expression complexe z'=az+b en fonction des valeurs des paramètres a et b.

Valeurs des paramètres a et b	**Nature et éléments caractéristiques de f**
$a = 1$ et $b = 0$	Identité du plan
$a = 1$ et $b \in \mathbb{C}^*$	Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$
$a = -1$ et $b \in \mathbb{C}$	Symétrie de centre $\Omega(\frac{b}{2})$
$a \in \mathbb{R}^* \backslash \{-1; 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$	Homothétie de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et de rapport a
$a \in \mathbb{C}^* \backslash \{-1; 1\}$ tel que $\lvert a \rvert = 1$ et $b \in \mathbb{C}$	Rotation de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et d'angle $\theta = arg(a)$
$a \in \mathbb{C}^* \backslash \{-1; 1\}$ tel que $\lvert a \rvert \neq 1$ et $b \in \mathbb{C}$	Similitudes directes planes de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$, de rapport $k = \lvert a \rvert$ et d'angle $\theta = arg(a)$

<u>**N.B**</u> : Dans le cas où $a = -1$ et $b \in \mathbb{C}$, la transformation f peut être considérée comme une rotation de centre $\Omega(\frac{b}{2})$ et d'angle $\theta = \pi$ ou encore comme une homothétie de centre $\Omega(\frac{b}{2})$ et de rapport $k = -1$.

Exemple 1.4. L'application f définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z - 1 + 3i$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $-1 + 3i$.

Exemple 1.5. Soit g l'application définie par : $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 3$.
$1 - i\sqrt{3} \neq 1$ donc g admet un unique point invariant Ω d'affixe
$\omega = \dfrac{3}{1 - (1 - i\sqrt{3})} = \dfrac{3}{i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$.
g est donc une similitude directe de rapport $\lvert 1 - i\sqrt{3} \rvert = 2$ et d'angle $arg(1 - i\sqrt{3}) = \dfrac{5\pi}{6}(2\pi)$.

Exemple 1.6. Considérons la similitude directe plane définie par
$z' = (-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})z + 3 + i\sqrt{3}$.
On a d'une part : $\lvert -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \rvert = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$ et $arg(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{2\pi}{3}(2\pi)$.

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, } \frac{3+i\sqrt{3}}{1-(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} &= \frac{3+i\sqrt{3}}{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2(3+i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} \\ &= \frac{2(3+i\sqrt{3})^2}{3^2+3} \\ &= \frac{2(6+6i\sqrt{3})}{12} \\ &= 1+i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cette similitude directe plane est donc la rotation d'angle } \theta = \tfrac{2\pi}{3} \text{ et de centre } \Omega(1;\sqrt{3})}$$

1.5 Propriétés des similitudes directes planes

1.5.1 Caractérisation des similitudes directes planes

Activité 1.6. Soit ABC un triangle direct, rectangle et isocèle en B. Soit s la similitude directe plane de centre A qui transforme B en C. Démontrer que, $AC = \sqrt{2}AB$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 1.4. Soit s la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle α.

$$\forall M,\, M' \in \mathcal{P}, \text{on a} : s(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha \end{cases} \quad \text{(cf. [1])}$$

Preuve : Soit $M(z)$ un point du plan d'image $M'(z')$ et ω l'affixe de M.
s a donc pour écriture complexe $z' - \omega = a(z - \omega)$.

$$:\text{Ainsi, } \frac{z'-\omega}{z-\omega} = a \Longrightarrow \begin{cases} |\frac{z'-\omega}{z-\omega}| = |a| \\ arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega}) = arg(a) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exemple 1.7. 1) Soit $ABCD$ un carré direct. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe plane s de centre A qui transforme B en C.

2) Soit ABC un triangle équilatéral direct. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et H, le projeté orthogonal de I sur la droite (AC).

   i) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe s' de centre A qui transforme B en I.

   ii) Démontrer que cette similitude directe plane transforme I en H.

Solution :

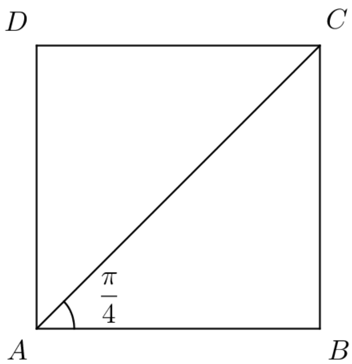
1) Déterminons les éléments caractéristiques de s tel que $s(B) = C$.

On a : $\dfrac{AB}{AC} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Donc, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{4}$. C'est-à-dire $\begin{cases} AC = \sqrt{2}AB \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Nous en déduisons que

$\boxed{s \text{ est la similitude directe plane de centre } A\text{, de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{4}}$



2) i) Déterminons les éléments caractéristiques de s' tels que $s'(B) = I$.

On a : $\dfrac{AI}{AB} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}})$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

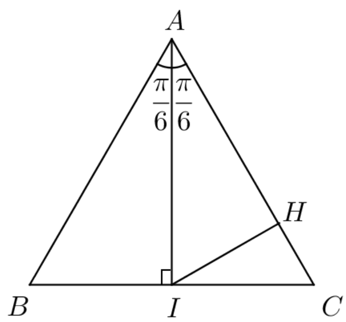
Donc, $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \dfrac{\pi}{6}$. C'est-à-dire $\begin{cases} AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

Il s'en suit que

$\boxed{s' \text{ est la similitude directe de centre } A\text{, de rapport } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{6}}$

ii) Démontrons que $s'(I) = (H)$.

On montre de la même façon que $\begin{cases} AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AI \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AH}}) = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$, donc $s'(I) = (H)$.



1.5.2 Existence et unicité d'une similitude directe plane

Activité 1.7. Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. En utilisant la caractérisation des similitudes directes planes, montrer qu'il existe une unique similitude directe plane s tel que $s(A) = C$ et $s(B) = D$.

Théorème 1.3. Soit A, B, A', et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors, il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$. (cf. [7])

Preuve : Si une telle similitude s existe, alors il existe a et b complexes, avec $a \neq 0$ tels que : $z_{A'} = az_A + b$ c'est-à-dire que $b = z_{A'} - az_A$ et $z_{B'} = az_B + b$.
Alors $z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)$ c'est-à-dire $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$, auquel cas : $b = z_{A'} - az_A$.
Si s existe, alors le couple $(a; b)$ est unique et s est donc elle aussi unique.
Soit s la transformation du plan d'expression complexe est $z' = az + b$ avec $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}$ et $b = z_{A'} - az_A$.
B étant différent de A, a est défini.
$z_{A'} = az_A + b$ et $z_{B'} - z_{A'} = az_B - az_A$. Donc $z_{B'} = az_B - az_A + z_{A'}$.
De plus, comme $A' \neq B'$, a est non nul et s est donc définie. D'où : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
Une similitude directe plane qui transforme A en A' et B en B' existe et est donc unique. ■ (cf. [7])

Remarque 1.3.
- s a pour rapport : $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et pour angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}}\right)$.
- Il est nécessaire d'avoir $A \neq B$ et $A' \neq B'$, mais il est possible d'avoir $A = A'$ et $B = B'$ auquel cas, les points sont invariants par s. (cf. [7])

1.5.3 Composition de similitudes directes planes

Activité 1.8. Soient s et s' deux similitudes directes planes d'expressions complexes respectives $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$ avec $k, k' \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $b, b' \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer l'expression complexe de la composée $s \circ s'$ et en déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.
2. Même question pour la réciproque s^{-1} de s.

Théorème 1.4. Soit s et s' deux similitudes directes planes de rapports respectifs k et k' d'angles respectifs α et α' avec $k, k' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Alors,

- ♦ la composée $s' \circ s$ est une similitude directe plane de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
- ♦ la réciproque de s notée s^{-1} est une similitude directe plane de rapport $\dfrac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$. (cf. [1])

L'ensemble des similitudes directes du plan est donc un groupe de transformations.

Preuve : Soit s et s' les similitudes directes planes d'expressions complexes respectives $z' = ke^{i\alpha}z + b$ et $z' = k'e^{i\alpha'}z + b'$.
L'expression complexe de $s' \circ s$ est

$$z' = kk'e^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$$

donc $s \circ s'$ est une similitude directe plane de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
L'expression complexe de s^{-1} est

$$z' = \frac{1}{k}e^{-i\alpha}z - \frac{1}{k}e^{-i\alpha}b$$

donc s^{-1} est une similitude directe plane de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$. ■ (cf. [1])

Exemple 1.8. On considère les similitudes directes planes $s_1 : z' = 2iz + 1 - 2i$ et $s_2 : z' = (1-i)z+1+i$. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques des transformations $s_2 \circ s_1$ et de s_1^{-1}.

Solution :

♢ Eléments caractéristiques de s_1 et s_2 :

s_1 a pour expression complexe $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z+1-2i$. Donc s_1 est la similitude directe plane de rapport $k_1 = 2$, d'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega_1(1; 0)$.
s_2 a pour expression complexe $z' = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + i$. Donc s_2 est la similitude directe plane de rapport $k_2 = \sqrt{2}$, d'angle $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$ et de centre $\Omega_2(1; -1)$.

♢ Expression complexe puis nature et éléments caractéristiques $s_2 \circ s_1$:

$s_2 \circ s_1$ a pour expression complexe :

$$\begin{aligned} z' &= (1 + i)(2iz + 1 - 2i) + 1 + i \\ &= (2 + 2i)z + 4 - 2i \\ &= 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})z + 4 - 2i \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 4 - 2i \end{aligned}$$

Donc $\boxed{s_2 \circ s_1 \text{ a pour expression complexe } z' = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z + 4 - 2i}$
L'équation $z = (2 + 2i)z + 4 - 2i$ a pour unique solution :
$\omega = \frac{4 - 2i}{1 - (2 + 2i)} = \frac{4 - 2i}{-1 - 2i} = -\frac{4 - 2i}{1 + 2i} = -\frac{2(2 - i)}{i(2 - i)} = -\frac{2}{i} = 2i$
Donc $s_2 \circ s_1$ est la similitude directe plane de centre $\Omega(0; 2)$, de rapport $k = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$. On remarque bien que $k = k_1 \times k_2$ et que $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

◇ <u>Expression complexe puis nature et éléments caractéristiques s_1^{-1}</u> :

On a : $z' = 2iz + 1 - 2i \Longrightarrow z = \dfrac{1}{2i}z' - \dfrac{1}{2i}(1-2i) = -\dfrac{i}{2}z' + \dfrac{i}{2} + 1.$

$\boxed{s_1^{-1} \text{ a pour écriture complexe } z' = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2} + 1 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \frac{i}{2} + 1}$

s_1^{-1}est donc la similitude directe plane de centre $\Omega'(1;0)$, de rapport $k' = \dfrac{1}{2}$ et d'angle $\theta' = -\dfrac{\pi}{2}$. On remarque bien que $k' = \dfrac{1}{k_1}$, $\theta' = -\theta_1$ et $\Omega' = \Omega_1$.

Attention : $s \circ s'$ et $s' \circ s$ ne sont pas égales.

En effet :

▲ $s' \circ s$ a pour expression complexe : $z' = kk'e^{i(\alpha+\alpha')}z + (k'e^{i\alpha'}b + b')$

▲ $s \circ s'$ a pour expression complexe : $z' = kk'e^{i(\alpha+\alpha')}z + (ke^{i\alpha}b' + b)$

A moins que $k'e^{i\alpha'}b + b'$ soit égale à $ke^{i\alpha}b' + b$, $s' \circ s$ et $s \circ s'$ ne sont pas égales.

En particulier :

▼ Si $kk'e^{i(\alpha+\alpha')} = 1$, alors $s \circ s'$ et $s' \circ s$ sont des translations de vecteurs d'affixes respectives $ke^{i\alpha}b' + b$ et $k'e^{i\alpha'}b + b'$.

▼ Si $kk'e^{i(\alpha+\alpha')} \neq 1$, alors $s \circ s'$ et $s' \circ s$ possèdent chacune un centre qui peut être distinct l'un de l'autre.

Proposition 1.5. Soient s et s' deux similitudes directes planes.

1) Si $s' \circ s$ et $s \circ s'$ ont le même centre, alors $s' \circ s = s \circ s'$.

2) La similitude directe plane s et sa réciproque s^{-1} ont le même centre.

Preuve :

1) Supposons que $s : z' = az + b$ et $s' : z' = cz + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et a et c non nuls.
Alors $s \circ s'$ a pour expression complexe $z' = a(cz + d) + b = acz + ad + b$ et de centre $\Omega_1(\omega_1)$ tel que $\omega_1 = \dfrac{ad + b}{1 - ac}$.
De même, $s' \circ s$ a pour expression complexe $z' = c(az + b) + d = acz + cb + d$ et de centre $\Omega_2(\omega_2)$ tel que $\omega_2 = \dfrac{cb + d}{1 - ac}$.
Si $\omega_1 = \omega_2$, alors $\dfrac{ad + b}{1 - ac} = \dfrac{cb + d}{1 - ac}$, soit $ad + b = cb + d$. Ainsi, $acz + ad + b = acz + cb + d$ ce qui prouve que $s \circ s' = s' \circ s$

2) En supposant toujours que s a pour expression complexe $z' = az + b$, son centre a pour affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$. s^{-1} a donc pour expression complexe $z' = \dfrac{1}{a}z - \dfrac{b}{a}$ et son centre a pour affixe $\omega' = \dfrac{-\frac{b}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \dfrac{b}{1 - a}$. On a ainsi $\omega = \omega'$.

1.6 Expression analytique d'une similitude directe plane

Activité 1.9. Soit f une similitude directe d'expression complexe $z' = az + b$. En posant $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $a = \alpha + i\beta$ et $b = m + in$ avec x, x', y, y', α, β, $m, n \in \mathbb{R}$ et $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$ démontrer que $\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + m \\ y' = \beta x + \alpha y + n \end{cases}$

Définition 1.7. Soient $x, x', y, y', \alpha, \beta, m, n \in \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Le système

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + m \\ y' = \beta x + \alpha y + n \end{cases}$$

est appelé **expression analytique** de la similitude directe plane f. (cf. [8])

Exemple 1.9. 1) Déterminer l'expression analytique de la similitude directe plane s définie par $z' = (1 - 2i)z - 3 + i$.

2) Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la similitude directe plane dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - \sqrt{3} \end{cases}$

Solution :

1) Expression analytique de la similitude directe plane s définie par $z' = (1 - 2i)z - 3 + i$

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } x' + iy' &= (1 - 2i)(x + iy) - 3 + i \\ &= x + 2y - 3 + i(-2x + y + 1) \end{aligned}$$

Par identification, on obtient : $\boxed{\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}}$

2) Expression complexe :

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' \\ &= x - y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + i(x\sqrt{3} + y - \sqrt{3}) \\ &= x(1 + i\sqrt{3}) + y(-\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= \frac{z + \overline{z}}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{z - \overline{z}}{2i}(-\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3} + i}{2i})z + (\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3} + i}{2i})\overline{z} + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \\ &= (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}$

Nature et éléments caractéristiques de f :

L'équation $z' = (1+i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}$ a pour unique solution $\dfrac{2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{1-1-i\sqrt{3}} = 1-2i$.

De plus, $1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc

$\boxed{f \text{ est la similitude directe plane de centre } \Omega(1,-2), \text{ de rapport } k=2 \text{ et d'angle } \theta = \frac{\pi}{3}}$

Méthode :

1. Pour passer de l'expression complexe à l'expression analytique d'une similitude directe plane, on peut poser $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, regrouper dans chaque membre la partie réelle et la partie imaginaire et les identifier.
2. Pour l'inverse, on peut soit poser $z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y, soit remplacer x par $\dfrac{z+z'}{2}$, y par $\dfrac{z-z'}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et z'.

1.7 Applications des similitudes directes planes

1.7.1 Similitudes directes et configurations du plan

Activité 1.10. Soit s une similitude directe plane de centre Ω, de rapport $k > 0$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, A et B deux points du plan d'images respectives A' et B'.

1) Démontrer en utilisant la propriété caractéristique que les images de trois points alignés sont trois points alignés. En déduire que :
   i) une droite a pour image une droite ;
   ii) s conserve les intersections ;
   iii) le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ de longueur kAB.
2) En utilisant la définition de similitude plane et la question 1), démontrer que le milieu du segment $[AB]$ a pour image le milieu du segment $[A'B']$.
3) En utilisant la définition de similitude directe plane, démontrer que :
   i) des droites orthogonales ont pour images des droites orthogonales ;
   ii) des droites parallèles ont pour images des droites parallèles.
4) Démontrer que le cercle de centre O et de rayon r a pour image le cercle de centre $s(O)$ et de rayon kr.
5) s multiplie les aires par k^2.

Théorème 1.5. Soit s une similitude directe plane de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, A et B deux points du plan d'images respectives A' et B', k et θ des nombres réels avec $k > 0$. Alors, s possède les propriétés suivantes.

1) s conserve l'alignement, donc :
   - ◇ l'image d'une droite est une droite ;
   - ◇ s conserve les intersections ;
   - ◇ l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ de longueur kAB.
2) s conserve de plus, par définition, les rapport de distances donc s conserve le milieu et plus généralement le barycentre.
3) s conserve les angles géométriques donc s conserve l'orthogonalité et le parallélisme.
4) L'image du cercle de centre O et de rayon r est le centre de centre $s(O)$ et de rayon kr. (cf. [7])

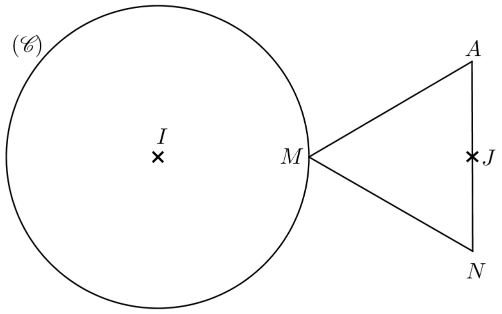
Preuve : s a pour forme réduite $h \circ g$ où h est une homothétie et g un déplacement quelconque. Comme h et g conservent l'alignement, il en est de même pour s, d'où le 1) et 2). 3) et 4) sont les conséquences directes de la définition des similitudes planes. ■

1.7.2 Utilisation des similitudes directes planes

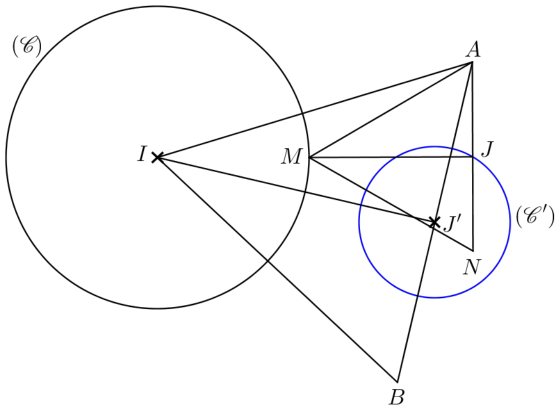
On peut utiliser les similitudes directes planes pour rechercher les lieux géométriques, démontrer les propriétés et construire une figure.

Recherche des lieux géométriques

Enonce 1.1. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et A un point du plan. M étant un point de $(\mathcal{C})$, on désigne par AMN le triangle équilatéral de sens direct.
Déterminer le lieu géométrique du milieu J du segment $[AN]$., lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.



Solution : On a $AJ = \dfrac{1}{2}AM$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AJ}})$=$\dfrac{\pi}{3}$. Donc J est l'image de M par la similitude directe s de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$. Comme M décrit $(\mathcal{C})$, alors le lieu de J est l'image de $(\mathcal{C})$ par s, c'est-à-dire le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre I' image de $(\mathcal{C})$ par s de I qui passe par J. I' est tel que $AI' = \dfrac{1}{2}AI$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AI'}})$=$\dfrac{\pi}{3}$. C'est donc le point J' milieu de $[AB]$ tel que le triangle AIB est équilatéral direct.



Méthode :
Pour résoudre les problèmes ayant pour objet la recherche de lieux géométriques à l'aide des similitudes directes planes, on se ramène à la situation suivante : le point P', dont on cherche le lieu, est l'image par une similitude directe plane d'un point P, décrivant un ensemble connu. La résolution se fait en deux étapes :

- ♢ reconnaître une similitude directe plane f qui, au point P, associe le point P' ;
- ♢ déterminer l'image par f de l'ensemble $(\mathcal{E})$ décrit par le point P.

Problèmes de construction

Enonce 1.2. Soit s la similitude directe plane d'expression complexe : $z' = (1-i)\,z + 2 - i$.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de s.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
$\mid (1-i)\,z + 2 - i \mid = 4$

3) Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

Solution :

1) Déterminons les éléments caractéristiques de s.

Soit $M(z)$. On a :

$$\begin{aligned} s(M) = M &\Longrightarrow z = (1-i)z + 2 - i \\ &\Longrightarrow [1-(1-i)]z = 2 - i \\ &\Longrightarrow iz = 2 - i \\ &\Longrightarrow z = \frac{2-i}{i} \\ &\Longrightarrow z = -1 - 2i \end{aligned}$$

Par ailleurs $1 - i = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc

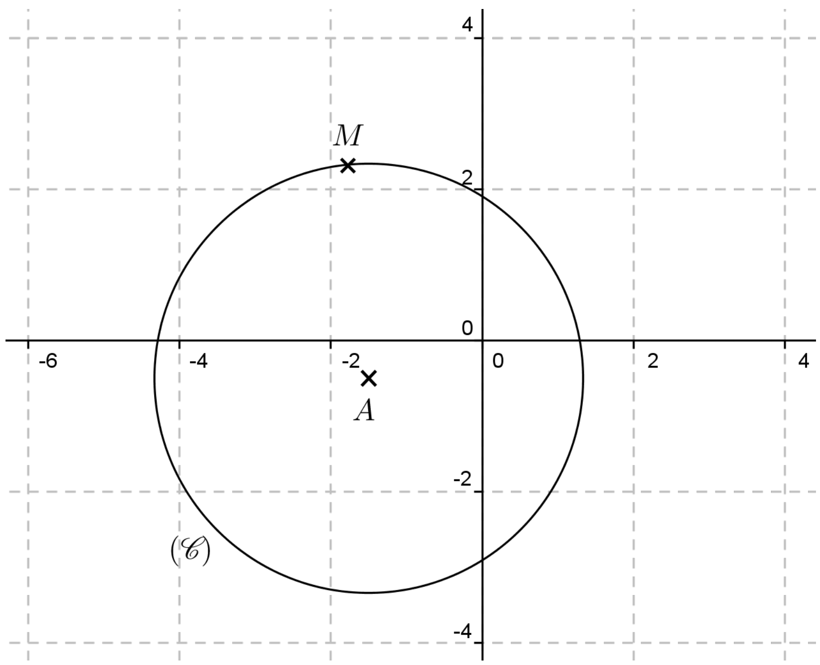
$\boxed{\text{s est la similitude directe plane de centre } \Omega(-1-2i) \text{ de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{4}}$

2) Déterminons l'ensemble des points M.

$$\begin{aligned} \text{On a : } |(1-i)z + 2 - i| = 4 &\Longrightarrow |1-i||z + \frac{2+i}{1-i}| = 4 \\ &\Longrightarrow |z + \frac{(2-i)(2+i)}{2}| = \frac{4}{\sqrt{2}} \\ &\Longrightarrow |z + \frac{3+i}{2}| = 2\sqrt{2} \\ &\Longrightarrow AM = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

avec $A(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$. Donc $\boxed{M \text{ décrit le cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } 2\sqrt{2}}$

Construisons l'ensemble des points M



3) Retrouvons ce résultat par une méthode algébrique.
   Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$$\begin{aligned}
|(1-i)z+2-i| = 4 &\Longrightarrow |(1-i)(x+iy)+2-i| = 4 \\
&\Longrightarrow |x+y+2+i(-x+y-1)| = 4 \\
&\Longrightarrow (x+y+2)^2 + (-x+y-1)^2 = 16 \\
&\Longrightarrow x^2+y^2+4+4x+4y+2xy+x^2+y^2+1+2x-2y-2xy = 16 \\
&\Longrightarrow 2x^2+2y^2+6x+2y+5 = 16 \\
&\Longrightarrow x^2+y^2+3x+y+\frac{5}{2} = 8 \\
&\Longrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = 8 \\
&\Longrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 8
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{M \text{ décrit le cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } 2\sqrt{2}}$

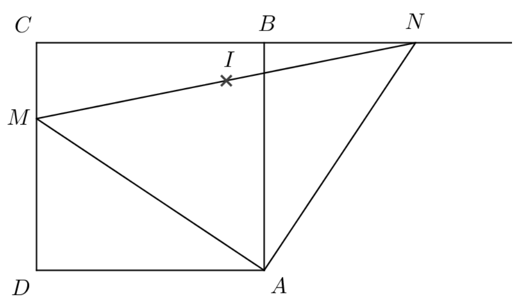
Méthode :

Pour résoudre les problèmes de construction à l'aide des similitudes directes planes, on peut procéder en deux étapes : l'analyse et la synthèse.

- ◇ **L'analyse** consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- ◇ **La synthèse** consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

Démonstration des propriétés

Enonce 1.3. Soit $ABCD$ un carré M un point de la droite (DC), la perpendiculaire en A à la droite (AM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que AMN est un triangle rectangle isocèle.



Solution : On considère la similitude directe plane s de centre A, de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ et d'angle $\theta = mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}})$ transforme le point D en M.

On a $s(D) = M$ et $s(B) = N$. Donc, $\begin{cases} AM = kAD \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AM}}) = \theta \end{cases}$ et $\begin{cases} AN = kAB \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}}) = \theta \end{cases}$

Or $AB = AD$, donc $AM = AN$. D'où, le triangle AMN est isocèle.

De plus, $(AM) \perp (AN)$ car $mes\widehat{MAN} = mes\widehat{MAB} + mes\widehat{BAN} = mes\widehat{MAB} + mes\widehat{DAM} = \frac{\pi}{2}$.

Il en résulte que le triangle AMN est rectangle isocèle.

Méthode :

Pour résoudre les problèmes de démonstration de propriétés à l'aide des similitudes directes planes, on utilise les propriétés des similitudes directes planes et configurations du plan.

1.8 Exemples d'utilité des similitudes directe dans la vie quotidienne

1.8.1 En architecture

Un architecte se propose de faire le plan d'une maison sur un terrain rectangulaire de longueur 14m et de largeur 12m sur un papier format A4 (de dimensions 297m sur 210m). Ne pouvant pas réaliser son dessin en vraies grandeurs, il se propose de prendre 1cm sur la feuille pour représenter 1m=100cm sur le terrain. Il est donc question pour lui de réduire les dimensions sur le terrain encore appelées dimensions réelles pour les représenter sur le plan. Il doit donc multiplier les dimensions réelles par $\frac{1}{100}$ pour obtenir les dimensions sur la carte. Le nombre réel strictement positif $\frac{1}{100}$ est appelé **Echelle**. Cette situation décrit une similitude car nous avons

dimension sur la carte = Echelle $\times$ dimension réelle

L'**échelle** est donc le **rapport** de la similitude et cette similitude est directe car l'orientation de l'angle sur le terrain est conservée dans le plan.

1.8.2 En imagerie

Un microbe a une taille réelle de 0,003mm. Une photographie le représente avec une taille de 6cm. Les dimensions du microbe ont été multipliées par $\frac{6cm}{0,003mm} = 20000$ pour obtenir ses dimensions sur l'image. La photographie est donc une similitude. De plus cette similitude est directe car l'image du microbe n'est pas obtenue à l'envers. Le nombre réel strictement positif 2000 est l'**échelle** de la représentation et représente le **rapport** de la similitude directe. Comme précédemment nous avons

$$\textbf{dimension sur la carte} = \textbf{Echelle} \times \textbf{dimension réelle}$$

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

EXERCICES ET PROBLEMES

2.1 Exercices et problèmes résolus

Exercice 2.1.1. Soit f l'application du plan qui à tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' définie par : $z' = (1-i)z + 2 - i$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Quelle est l'image par f du cercle de centre O et de rayon 2.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait $|(1-i)z + 2 - i| = 2$. (On pourra donner deux méthodes).

Solution :

1. Déterminons les éléments caractéristiques de f.
   L'équation $z' = (1-i)z + 2 - i$ a pour unique solution $\dfrac{2-i}{1-(1-i)} = 1 - 2i$.
   Aussi, on a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Donc,
   $\boxed{f \text{ est la similitude directe de centre } \Omega(1; -2) \text{ de rapport } k = \sqrt{2} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{4}}$
2. Déterminons l'image par f du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2.
   L'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 2 est $x^2 + y^2 = 4$.
   Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors :

$$
\begin{aligned}
z' = (1-i)z + 2 - i &\Rightarrow x' + iy' = (1-i)(x+iy) + 2 - i \\
&\Rightarrow x' + iy' = x + y + 2 + i(-x + y - 1) \\
&\Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

La résolution de ce système en x et y donne : $x = \dfrac{x'-y'-3}{2}$ et $y = \dfrac{x'+y'-1}{2}$

$$\begin{aligned}
x^2+y^2=4 &\Rightarrow (\frac{x'-y'-3}{2})^2+(\frac{x'+y'-1}{2})^2=4\\
&\Rightarrow (x'-y'-3)^2+(x'+y'-1)^2=16\\
&\Rightarrow x'^2+y'^2+9-2x'y'-6x'+6y'+x'^2+y'^2+1+2x'y'-2x'-2y'=16\\
&\Rightarrow x'^2+y'^2-4x'+2y'+5=8\\
&\Rightarrow (x'-2)^2+(y'+1)^2=(2\sqrt{2})^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc l'image du cercle } \mathcal{C}(O;2) \text{ est le cercle } \mathcal{C}'(A(2;-1),2\sqrt{2})}$

3. Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait $|(1-i)z+2-i|=2$.

◇ Méthode analytique :

$$\begin{aligned}
|(1-i)z+2-i|=2 &\Rightarrow |(1-i)(x+iy)+2-i|=2\\
&\Rightarrow |x+y+2+i(-x+y-1)|=2\\
&\Rightarrow (x+y+2)^2+(-x+y-1)^2=4\\
&\Rightarrow x^2+y^2+3x+y+\frac{5}{2}=2\\
&\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble cherché est } \mathcal{C}(B(-\tfrac{3}{2};-\tfrac{1}{2}),\sqrt{2})}$

◇ Méthode géométrique :

$$\begin{aligned}
|(1-i)z+2-i|=2 &\Rightarrow |1-i||z+\frac{2-i}{1-i}|=2\\
&\Rightarrow |z+\frac{3+i}{2}|=\sqrt{2}\\
&\Rightarrow |z-z_B|=\sqrt{2}\\
&\Rightarrow \|\overrightarrow{BM}\|=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{M \text{ décrit } \mathcal{C}(B(-\tfrac{3}{2};-\tfrac{1}{2}),\sqrt{2})}$

Exercice 2.1.2. Soit $ABCD$ un losange de sens direct, de centre I et tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \dfrac{\pi}{4}$. On considère la similitude directe plane s_c de centre C, qui transforme A en B.

1. Démontrer que l'image I' du point I par s_c est le milieu du segment $[BC]$.
2. (a) Démontrer que l'image D' de D par s_c appartient à la droite (AC) et que les droites $(D'I')$ et (BC) sont perpendiculaires.

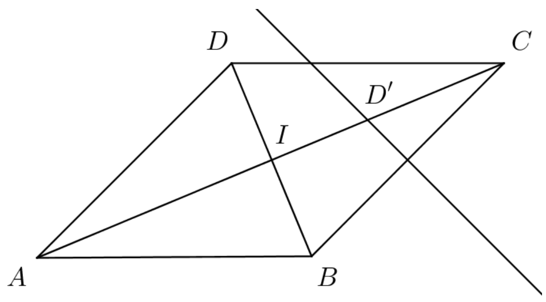
(b) En déduire une construction du point D'.

Solution :

1. Démontrons que $I' = S_C(I)$ est le milieu du segment $[BC]$.
   On a : $S_C(A) = B$ et $S_C(C) = C$. Donc $S_C([AC]) = [BC]$.
   Or I est le milieu du segment $[AC]$ et comme S_C conserve le milieu de segment, alors $S_C(I) = I'$ est le milieu du segment $[BC]$.

2. (a) Démontrons que $D' = S_C(D) \in (AC)$.
   L'angle de S_C est $\frac{\pi}{8}$. Comme $mes(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}}) = \frac{\pi}{8}$, alors $S_C((CD)) = (AC)$.
   Or $D \in (CD)$, donc $S_C(D) = D' \in (AC)$. (Car S_C conserve l'alignement)
   Démontrons que $(D'I') \perp (BC)$.
   On a $(DI) \perp (AC)$ et comme S_C conserve l'orthogonalité, alors $S_C((DI)) \perp S_C((AC))$.
   Or $S_C((DI)) = (D'I')$ et $S_C((AC)) = (BC)$, donc $(D'I') \perp (BC)$.

   (b) Déduisons-en une construction du point D'.
   On sait que I' est le milieu de $[BC]$ (d'après 1) et $D' \in (AC)$ (d'après 2a). Comme $(D'I') \perp (BC)$ (d'après 2a), alors (D') est le point d'intersection de la perpendiculaire au milieu I' de $[BC]$ et (c'est-à-dire la médiatrice de $[BC]$), et de (AC).



Exercice 2.1.3. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de diamètre $[AB]$. M étant un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B, on désigne par N et P les points d'intersection de la droite (BM) et du cercle de centre M passant par A. Déterminer les lieux géométriques des points N et P lorsque M décrit $(\mathcal{C})$ privé de A et B.

Solution : $(MA) \perp (MB)$ car le triangle ABM est inscrit dans un demi-cercle et $MA = MN = MP$ car $[MA]$, $[MN]$ et $[MP]$ sont les rayons du cercle.

$\Rightarrow$ les triangles AMN et AMP sont rectangles isocèles

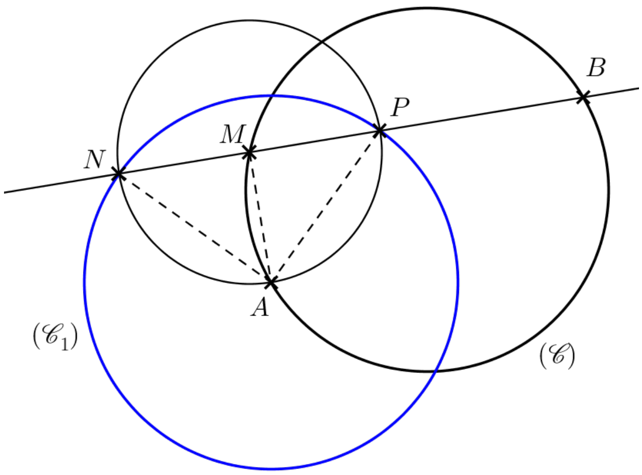
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} AN = \sqrt{2}AM \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}) = \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \; et \left\{ \begin{array}{c} AP = \sqrt{2}AM \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}}) = -\frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

Donc N est l'image de M par la similitude directe plane S_1 de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et P, l'image de M par la similitude directe plane S_2 de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Comme M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé de A et B, alors :

1. le lieu géométrique des points N est le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre A et de rayon AN, image du cercle $(\mathcal{C})$ par S_1 et privé des points A et $B_1 = S_1(B)$;
2. le lieu géométrique des points P est le cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre A et de rayon AP, image de $(\mathcal{C})$ par S_2 et privé des points A et $B_2 = S_2(B)$.

N.B : Les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sont confondus.



<u>**Exercice**</u> **2.1.4.** ABC est un triangle de sens direct. I, J et K sont les points tels que les triangles IBC, JAC et KBA sont de sens direct, rectangles et isocèles.

1. Déterminer :
   (a) l'angle et le rapport de la similitude directe plane s_1 de centre A, qui transforme C en J ;
   (b) l'angle et le rapport de la similitude directe plane s_2 qui transforme A en K et C en I.
2. En déduire que $IJAK$ est un parallélogramme.

Solution :

1. (a) Déterminons l'angle et le rapport de la similitude s_1 de centre A tel que $s_1(C) = J$.

On a $\begin{cases} AJ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC \\ mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AJ}}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Donc la similitude directe plane s_1 est de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

(b) Déterminons le centre, l'angle et le rapport de la similitude s_2 tel que $s_2(A) = K$ et $s_2(C) = I$

On a $\begin{cases} BK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA \\ mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BK}}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} BI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BC \\ mes(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}}) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Donc les points K et I sont les images respectives des points A et C par la similitude s_2 de centre B, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

2. Déduisons-en que $IJAK$ est un parallélogramme.

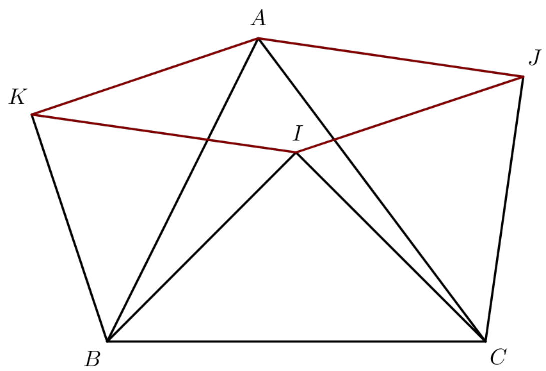
D'après 1a, $AJ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$ et d'après 1b, $IK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$. Donc, $IK = AJ$ (1)

Soit s_3 la similitude de centre C de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

On a alors $s_3(A) = J$ et $s_3(B) = I$. Ainsi, $IJ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA$. Or, d'après 1b, $BK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA$, d'où $IJ = BK$.

Mais comme $BK = AK$ (car le triangle KBA est isocèle), alors $IJ = AK$ (2)

De (1) et (2), nous déduisons que $IJAK$ est un parallélogramme.



2.2 Exercices proposés

Exercice 2.2.1. Déterminer dans chacun des cas suivants les éléments caractéristiques de la similitude directe plane d'écriture complexe donnée :

1. $z' = iz + 1$
2. $z' = (1 - i)z + 2$
3. $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}z + 3i$
4. $z' = -z + 5i$
5. $z' = z - 2 + i$
6. $z' = -\sqrt{3}z$

Exercice 2.2.2. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s de rapport k et d'angle α.

multicols 2.1. 2

1. $\Omega(5 - 4i)$, $k = \sqrt{3}$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$
2. $\Omega(-2)$, $k = 2$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
3. $\Omega(3i)$, $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$
4. $\Omega(\dfrac{1}{2} + i)$, $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

Exercice 2.2.3. M, P et Q sont trois points du plan complexe d'affixe respectives i, 1 et $2 + i$. Déterminer la similitude directe f telle que l'on ait : $f(M) = P$ et $f(O) = Q$. On donnera le centre le rapport et l'angle de f.

Exercice 2.2.4. Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' = 3iz + 9 + 3i$

1. Déterminer les éléments caractéristiques de s
2. Déterminer l'image par s :
   (a) du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(3 - i)$ et de rayon 1 ;
   (b) de la droite d'équation $y = 2x - 5$.

Exercice 2.2.5. Soient A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives $1 + 3i$, $4 + 3i$, $4 - 2i$, $1 - 2i$.

1. Montrer qu'il existe une similitude directe plane s telle que $s(A) = C$ et $s(B) = D$.
2. Déterminer $s(C)$ et $s(D)$
3. Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C, D est invariant par s. En déduire les éléments caractéristiques de s.

Exercice 2.2.6. Soit A le point d'affixe i dans le plan complexe. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe Z définie par : $Z = iz$.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Déterminer l'ensemble des points m tels que les trois points m, M A soient alignés.

Exercice 2.2.7. Soient A et B les points de coordonnées respectives $(2, 1)$ et $(0, 3)$ dans $\mathcal{R}$. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, par r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{4} modulo 2\pi$ et par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
Déterminer le point C, image de O par l'application $t \circ r \circ h$.
Donner les éléments caractéristiques de cette application ; on pourra utiliser les nombres complexes ou toute autre méthode.

Exercice 2.2.8. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites (AB) et $(A'B')$, (BC) et $(B'C')$, (CA) et $(C'A')$ soient parallèles. Démontrer qu'il existe une similitude directe plane f telle que l'on ait : $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.
Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits **directement semblables**.

Exercice 2.2.9. Soit f la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1 - i)$.

1. Démontrer que f admet un unique point invariant I ; déterminer l'affixe de I.
   Caractériser géométriquement f.
2. Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement des coefficients 3, 2, 1.
   Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.
3. On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y = x$.
   Quel est l'ensemble décrit par G ?

Exercice 2.2.10. Soit $\mathcal{D}$ une droite et A un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. M étant un point de $\mathcal{D}$, on désigne par N le point de $\mathcal{D}$ tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}}) = \dfrac{\pi}{6}$, par H_M et H_N les pieds des hauteurs issues de M et N dans le triangle AMN. Déterminer et construire les lieux géométriques des points H_M et H_N lorsque M décrit $\mathcal{D}$.

2.3 Problèmes proposés

Probleme 2.1. $ABCD$ et $AEFG$ sont des carrés de sens direct.*Le but de cet exercice est de démontrer que les droites* (BE), (CF) *et* (DG) *sont concourantes.*

1) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) En utilisant la rotation r démontrer que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires et que $BE = DG$.
   b) Démontrer que $r(H) = K$.
   c) En déduire que $AHIK$ est un carré.
2) Soit f la similitude directe plane de centre A qui transforme B en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de cette similitude.
   b) Déterminer $f(E)$ et $f(H)$.
   c) Conclure.

Probleme 2.2. Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives $1 + 3i$ et $2i$.

1. Soit s la similitude directe plane de centre B qui transforme O en A. On note z' l'affixe du point M' transformé par s du point M d'affixe z.
   (a) Calculer le module et un argument du nombre complexe affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Calculer l'angle et le rapport de s.
   (c) Exprimer z' en fonction de z.
2. Soit T la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M" d'affixe $z" = iz + 3$.
   Donner la nature de T en précisant ses éléments caractéristiques. On note Ω le point invariant par la transformation T.
3. Montrer que les points A, Ω et B sont les sommets d'un triangle isocèle.

Probleme 2.3. Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (1 - i)z_n$.

1. Calculer z_1, z_2, z_3 et z_4 et placer les images M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.
2. Soit M_n le point du plan complexe d'affixe z_n. Démontrer qu'il existe une similitude directe plane s telle que tout point M_{n+1} soit l'image de M_n par s. Déterminer les éléments caractéristiques s.
3. Calculer, pour tout entier naturel n, le nombre z_n en fonction de z_0 et $1 - i$. Que peut-on dire de la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$? Déterminer un argument de z_n.

4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que z_n soit réel.

Probleme 2.4. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1-i)z^2 + 2(1+2i)z + \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i = 0.\ (E_2)$$

2. On trouve deux solutions, chacune étant de la forme $a + bi$, avec a et b réels. Soit z_0 celle pour laquelle $a = b$ et M_0 son image dans le plan complexe. On considère la similitude directe s de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Soit $M_0, M_1, \cdots, M_n$ la suite de points du plan telle que $M_1 = s(M_O), M_2 = s(M_1), \cdots, M_n = s(M_{n-1})$.
   (a) Soit z_n l'affixe du point $M_n (n \in \mathbb{N})$. Ecrire z_n en fonction de z_{n-1}.
   (b) Soit ρ_n et θ_n le module et l'argument de z_n.
   Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   Donner le premier le premier terme et la raison de chaque suite.
   (c) Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n.

♣ Conclusion ♣

Les similitudes directes planes ainsi présentées nous fournissent des éléments de base pour étudier les transformations directes du plan (c'est-à-dire qui conservent les angles orientés dans le plan). Leurs domaines d'applications sont très diversifiés parmi lesquels la microbiologie, l'optique géométrique, l'imagerie, l'architecture, pour ne citer que ceux-là, ce qui constitue une source de motivation pour les élèves. Il convient donc aux enseignants de présenter le domaine d'application de cette notion aux élèves.

♣ Bibliographie et webographie ♣

Bibliographie

[1] Saliou Touré, Taïrou ALASSANE, Abdou Khadre BARRY, Jules N'DA KOUADIO, Olivier Théodule RAZAFINDRANOVONA, Paul REY, Julien SANHOUIDI, Soma TRAORÉ, Joseph TSOUMTSA, *Mathématiques Terminale SM*, Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), EDICEF, 2004

[2] Saliou Touré, Taïrou ALASSANE, Abdou Khadre BARRY, Jules N'DA KOUADIO, Olivier Théodule RAZAFINDRANOVONA, Paul REY, Julien SANHOUIDI, Soma TRAORÉ, Joseph TSOUMTSA, *Mathématiques Première SM*, Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), EDICEF, 2004

[3] M. Monge et Al., *Mathématiques Terminale C, tome 1*, BELIN, 1983

[4] M. Monge et Al., *Mathématiques Terminale D*, BELIN, 1983

Webographie

[5] *Le secret des similitudes*
tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc10/similitudealpha.php, 2012

[6] *Similitudes(géométrie)*
fr.wilkipédia.org/wiki/similitude, 2012

[7] *Similitudes directes -cours Terminales- tout savoir*
www.educastream.com/similitudes-directes-terminale-S, 2012

[8] *Similitudes du plan affine, similitudes du plan complexe*
Serge.mehl.free.fr/anx/similitudes_comples.html, 2012

♣ Annexe ♣

Extrait du programme officiel de Mathématiques de la classe de Terminale C

Contenu	Commentaire, Savoir, Savoir-faire
Similitudes directes du plan : Définition et propriétés.	On définira une similitude directe comme une transformation conservant la mesure des angles et multipliant les distances par un réel positif. Toute similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement. Forme réduite d'une similitude directe. Les propriétés (images de figures simples, conservation des angles, du parallélisme, du barycentre, multiplication des aires par k^2) se déduisent de ces décompositions.
Exemples d'applications du plan définie par une application complexe. $z \mapsto f(z)$; cas des similitudes. Exemples d'applications ne conservant pas le barycentre.	Forme complexe d'une isométrie et d'une homothétie. Les élèves devront être capables de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe plane(centre, rapport, et angle) à partir de l'application $z \mapsto az+b$