Nécessité d'un enseignement « continu » de l'arithmétique au secondaire

KUE FOSSI Aimeri(Etudiant ENS de Yaoundé)

dirigé par

DR. NDJEYA Sélestin (Chargé de Cours/ENS de Yaoundé)

M. TCHOUTIO *Moïse* (IPN)

Yaoundé, le 10 juillet 2013

♣ Résumé ♣

Dans ce mémoire, l'analyse de quelques tests et du programme officiel de mathématiques au secondaire nous permet de comprendre l'importance d'un enseignement « continu » de l'arithmétique au secondaire. Face à son suivi discontinu, nous proposons une répartition progressive et continue des compétences exigées en arithmétique au secondaire et un exemple d'une leçon d'arithmétique en terminale C, portée sur le PPMC et le PGDC. Dans cette leçon, nous définissons le PPMC et le PGDC, puis nous les utilisons pour résoudre des équations diophantiennes et des problèmes sociaux.
Mots clés :

- Enseignement continu,
- PPMC et PGDC,
- equation diophantienne.

♣ Abstract ♣

In this work, the analysis of some tests and mathematic scheme of work in arithmetics in the secondary system enables us to grasp the necessity of a « continuous » teaching of this one.In all fairness of this chaotic and splitting following up, we suggest a progressive and continous repartition of required competences in arithmetics in the secondary system and an example of an arithmetical lesson in terminale C, based on the PPCM and PGDC. in the said lesson, we define what PPCM and PGDC are, then we use them to solve diophantine equations and social issues.

Keywords

- Continous teaching ;
- PPCM and PGDC ;
- Diophantine equation.

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction ♣

Le programme officiel des mathématiques au Cameroun accorde une place non négligeable à l'arithmétique. Sa prescription comme compétence exigée dans les classes de sixième, cinquième, quatrième et terminale C est nécessaire ; mais pas suffisante pour sa bonne compréhension et son bon suivi au secondaire. Le fait qu'il soit absent dans les programmes de troisième, seconde, et première rend son enseignement « fragmentaire et chaotique », d'après Marc Ducret, Sophy Dupuy et Bernard Destanville , dans leur brochure intitulé : pour un bon suivi en arithmétique de la 3^{me} en T^{le}, de l'IREM de Toulouse, édition 2005. Nous convenons avec eux quand ils disent que « l'apprentissage ne peut être éfficace que si les connaissances et les méthodes sont régulièrement entretenues ».

D'une part, beaucoup d'élèves de la terminale C éprouvent des difficultés à apprendre l'arithmétique et dévéloppent les stratégies de récul à l'égard de celle-ci. Ainsi, le rapport entre l'arithmétique et les élèves est de qualité insuffisante. D'autre part, les enseignants ont du mal à transmettre ces connaissances dans cette classe. Bon nombre d'entre eux remettent en cause son non enseignement dans les classes sus-citées. C'est dans ce sillage que se dégage la question de recherche suivante : Comment la discontinuité de l'enseignement de l'arithmétique au secondaire influence-t-elles les performances des élèvesen classe de terminale C ? Pour repondre à cette question, nous allons entreprendre une méthodologie de recherche qualitative, qui est une recension des données suivie d'une analyse critique.

Nous commençons au chapitre 1 par analyser des tests proposés dans les classes de : sixièmes, cinquièmes quatrièmes et terminales C ; qui permettent de vérifier la préservation des acquis, et la maîtrise des nouvelles connaissances par les élèves. Nous voulons ainsi montrer l'importance d'un enseignement « continu » de l'arithmétique tout au long des études secondaires. Au chapitre 2, nous proposons une analyse critique des compétences exigées en arithmétique dans les différentes classes du secondaire. Enfin, nous présentons au chapitre 3 un exemple d'une leçon d'arithmétique en terminale C, portée sur le PPMC et le PGCD.

Chapitre Un

Analyse des tests

1.1 Constat

Tout comme la géométrie, l'arithmétique est un socle sur lequel se posent les autres branches de mathématiques ; c'est elle qui nous apprend à raisonner. La diversité des problèmes qu'elle pose permet aux élèves de mémoriser et de développer des règles de calculs, de prolonger les activités sur les nombres déclenchées depuis l'école primaire. La disparition de l'arithmétique dans les programmes de mathématiques des classes de troisièmes, secondes et premières, ainsi que sa forte présence en peu de temps dans les classes de terminales C ferraient d'elle une science hermétique pour les élèves de cette classe. Cette partie présente une serie de quatres tests dans les classes de sixième, cinquième, quatrième et terminale C. Ils nous permettent de vérifier la volatilité ou la consolidation des connaissances en arithmétique des élèves du secondaire, pendant leur cursus scolaire.

1.2 Premier test : divisibilité en classe de sixième

1.2.1 Analyse à priori

Ce test est soumis à un échantillon de 30 élèves d'un collège de la ville de yaoundé le 06 mai 2013, 08 mois après le cours sur l'arithmétique. Le test a duré 10 minutes et . les compétences évaluées sont :

- Vérifier les aptitudes des élèves à déterminer les nultiples et diviseurs d'un nombre entier naturel,
- vérifier leur capacité à utiliser les critères de divisibilités par : 2 ; 3 ; 5 ; ou 9.

Sujet 1.

(Sujet originale : IREM Toulouse 2010, page 6 ; est entièrement présenté en annexe)

825 est un entier naturel.

- a) Quel est le plus petit multiple de 825 ?
- b) Quel est le plus grand diviseur de 825 ?
- c) 825 est-il divisible par 2 ; 3 ; 5 ou par 9 ? Justifie ta réponse.

1.2.2 Analyse à postériori

A. Analyse des réponses

- Question a) : sur les 30 élèves, 10 ont trouvé 0 (soit un taux de réussite de 33,33%) ; 15 ont proposé 825 ; 3 élèves ont proposé 1 et le reste (2 élèves) n'a pas répondu à cette question.

- Question b) : sur les 30 élèves, 11 ont trouvé 825 (ce qui donne un taux de réussite de 36,66%) ; 14 élèves ont proposé 0 ; 2 élèves ont déclaré qu'il n'existe pas de plus grand diviseur d'un nombre ; et 4 élèves n'ont rien proposé.

- Question C : sur les 30 élèves, 16 ont trouvé 3 et 5 (ce qui donne un taux de réussite de 53,33%). Parmi ces 16 élèves, 6 ont justifié par les égalités : 825 = 3 x 275 et 825 = 5 x 165 ; 7 élèves ont justifié par le critère de divisibilité par 3 et par 5 ; les 3 autres élèves n'ont pas justifié. Quant aux 14 élèves restants, ils ont proposé des réponses erronées.

B. Interprétation de l'analyse

Au terme de cette analyse, nous constatons que :
33,33% d'élèves seulement ont compris la notion de multiples et diviseurs et plus de 50% connaissent le critère de divisibilité par 2 ; 3 ; 5 et par 9. Cependant plus de 50% d'élèves ont les difficultés à déterminer les multiples et les diviseurs d'un entier naturel : ils ignorent que 0 est le multiple de tous les entiers naturels et que chaque entier est son propre multiple et son propre diviseur. **C. Conclusion de l'analyse**

Ainsi, il est clair que beaucoup d'élèves de la sixième arrivent en cinquième avec de nombreuses difficultés en arithmétique, notamment sur les multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel : d'où sa continuité en cinquième.

1.3 Deuxième test : PGDC et PPMC en classe de cinquième

1.3.1 Analyse à priori

Nous soumettons ce test à un échantillon de 30 élèves de la classe de cinquième d'un collège de la ville de Yaoundé le 06 Mai 2013 ; 08 mois après la leçon sur l'arithmétique. Il dure 15 minutes et vérifie les compétences des élèves en :

- Décomposition d'un nombre entier naturel en produit de nombres premiers,
- calcul du PGDC et du PPMC de deux nombres entiers naturels,
- simplification d'une fraction à l'aide du PGDC.

Sujet 2.
(Sujet original : IREM Toulouse, 2010 page 6 ; présenté en annexe)
Soient 1320 et 825 deux nombres entiers naturels :

- a) Décompose ces deux nombres en produits de nombres premiers.
- b) Calcule le PGDC et le PPMC de ces deux nombres.
- c) Met la fraction $\frac{1320}{825}$ sous la forme irréductible.

1.3.2 Analyse à postériori

A. Analyse des réponses

- Question a) 25 élèves sur 30 (soit un pourcentage de 83,33%) ont trouvé la décomposition de 1320 et 825 en produit de facteurs premiers.
- Question b) Seuls 10 élèves sur 30 ont pu calculer le PPCM et PGDC (soit un taux de réussite de 33,33%).
- Question c) 9 élèves sur les 10 ayant trouvé le PGDC ont pu l'utiliser pour simplifier la fraction. Par ailleurs 8 élèves sur 21 (y compris le 1 restant parmi les 10 qui ont trouvé le PGDC) ont utilisé les divisions successives du numérateur et du dénominateur par les diviseurs communs, pour simplifier la fraction.

B. Interprétation de l'analyse

Plus de 83% d'élèves de la cinquième ont pu décomposer un nombre entier naturel en produit de nombres premiers : donc les lacunes constatées en sixième sur la détermination des multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel sont presque toutes comblées.
Seuls 33,33% d'élèves peuvent calculer le PGDC et le PPMC de deux nombres entiers

naturels.
Néanmoins presque tous ceux qui savent calculer le PGDC savent également s'en servir pour simplifier une fraction : donc la véritable difficulté chez la plus part des élèves reste le calcul du PGDC et du PPMC.

C. Conclusion de l'analyse

La décomposition des nombres en produit de nombres premiers et la simplification des fractions ont amené les élèves de la cinquième à revoir et à bien comprendre les multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel ; qui étaient un obstacle en sixième pour ces élèves. Mais beaucoup sont confrontés à de nouvelles difficultés : le calcul du PGDC et du PPMC. Grâce à la continuité de l'enseignement de l'arithmétique, nous pensons que ces difficultés seront comblées en classe de quatrième.

1.4 Troisième test : PGDC et PPMC en quatrième

1.4.1 Analyse à priori

Ce test est soumis à 30 élèves de la classe de quatrième d'un collège de la ville de Yaoundé le 07 juin 2013, 07 mois après la leçon sur l'arithmétique. Sa durée est de 20 minutes. Les compétences exigées sont les suivantes :

- Vérifier les aptitudes des élèves à calculer le PGDC et le PPMC de deux nombres entiers naturels ;
- vérifier les aptitudes des élèves à utiliser le PGDC ou le PPMC pour résoudre un problème simple.

Sujet 3.

(Sujet original : IREM Toulouse 2010, page 6 ; présenté en annexe.) Soient 1320 et 825 deux entiers naturels.

- a) Calcule le PGDC et le PPMC de ces deux nombres.
- b) Rend irréductible la fraction $\frac{825}{1320}$.
- c) Un couturier a confectionné 1320 chemises et 825 culottes. Il veut constituer des lots (chemises et culottes) identiques.

  1. Combien de lots peut-il constituer au maximum ?
  2. Dans ce cas, combien de culottes et de chemises a-t-il par lot ?

1.4.2 Analyse à postériori

A. Analyse des réponses

- Question a) sur les 30 élèves évalués, 23 élèves ont trouvé le PGDC et le PPMC (soit un taux de réussite de 76,66%) ; 3 élèves confondent le PGDC et le PPMC ; 4 élèves essaient de donner le PGDC et le PPMC de 1320 d'une part, puis celui de 825 d'autre part.
- Question b) tous les 23 élèves ayant trouvé le PGDC ont pu l'utiliser pour simplifier la fraction. Donc le taux de réussite de cette question est également de 76,66%.
- Question c) : seuls 4 élèves sur 30 (soit 13,33%) ont compris qu'il faut utiliser le PGDC pour résoudre ce problème.

B. Interprétation de l'analyse

Nous constatons que 76,66% d'élèves de la quatrième connaissent calculer le PGDC et savent s'en servir pour simplifier une fraction.
Mais seuls 13,33% d'élèves sont capables de conduire un raisonnement logique pour résoudre un problème simple avec le PGDC.

C. Conclusion de l'analyse

Au terme de cette analyse, nous pouvons dire que les lacunes qu'éprouvaient les élèves en cinquième sur le calcul du PGCD sont presque comblées. Quant à la résolution d'un problème en utilisant celui-ci, elle est une véritable difficulté pour ces élèves de la quatrième. Cette difficulté devrait, comme celles éprouvées en sixième et cinquième, se combler en troisième. Mais tel n'est pas le cas, selon le programme officiel de mathématique au Cameroun : nous disons donc que c' est un mauvais suivi d'enseignement de l'arithmétique.

1.5 Quatrième test : PGDC en terminale C

1.5.1 Analyse à priori

Ce test est soumis à un échantillon de 21 élèves de la classe de terminale C d'un collège de la ville de Yaoundé le 07 juin 2013, 07 mois après la leçon sur l'arithmétique ; sa durée est de 20 minutes. Les compétences évaluée chez l'élève dans ce test sont :

- La capacité de Calculer le PGDC de deux nombres entiers relatifs,
- la capacité d'utiliser le PGDC pour résoudre un problème.

Sujet 4.

(Sujet original : IREM Toulouse 2010, page 6 ; présenté en annexe)

Soient 1320 et 825 deux entiers naturels.

– a) Citer deux méthodes de calcul du PGCD de votre choix.
– b) Utiliser l'une de ces méthodes pour calculer le PGCD de 1320 et 825.
– c) Un couturier a confectionné 1320 chemises et 825 culottes. Il veut constituer des lots (chemises et culottes) identiques.

    1. Combien de lots peut-il constituer au maximum ?
    2. Dans ce cas, combien de culottes et de chemises a-t-il par lot ?

1.5.2 Analyse à postériori

A. Analyse des réponses :

Question a) : Tous les 21 élèves ont cité :

– la décomposition en produit de nombres premiers
– l'algorithme d'Euclide.

Question b) : tous les 21 élèves ont calculé le PGDC par l'algorithme d'Euclide.

Question c) : 16 élèves sur 21 ont compris cette question : soit un taux de réussite de 76,19%.

B. Interprétation de l'analyse :

Nous pouvons constater que tous les élèves de la terminale C connaissent l'existence de deux méthodes de calcul du PGCD. Mais ne préfèrent pas du tout la méthode par décomposition des nombres en produit de nombres premiers. Quant à la résolution des problèmes, beaucoup reste à faire ; d'autant plus que quelques uns ont été butés face à un problème simple de la quatrième. La hausse du taux de réussite(de 13,33% en quatrième à 76,19% en terminale C) n'a certainement rien à voire avec la continuité ou la discontinuité de l'arithmétique. Mais elle peut aussi s'expliquer par la maturité biologique(3 ans de plus) qui implique la maturité dans le raisonnement. D'ailleurs Jean Piaget déclare « la capacité de réflexion augmente avec l'âge chez les adolescents ». Les élèves peuvent aussi avoire dévélopper des capacités personnelles pendant les trois années passées sans apprentissage de l'arithmétique. En effet, nous convenons avec Wrenger qu' « on n'apprend pas qu'à l'école »

C. Conclusion de l'analyse :

Au terme de cette analyse, il est clair que les lacunes observées dans la résolution des problèmes simples en utilisant le PGCD n'ont entièrement pas été comblées en terminale C. Nous pensons que ces lacunes pourraient se comblées en totalité si les connaissances arithmétiques étaient régulièrement enseignées. Cette irrégularité peut également expliquer la non utilisation de la décomposition en produit de facteurs premiers pour le calcul du PGDC de 2 nombres relativement simples.

Tableau récapitulatif des taux de réussites par objectif et par classe

Classes	Question a)	Question b)	Question c)	Effectif total
Sixième	33,33%	36,66%	53,33%	30
Cinquième	83,33%	33,33%	30%	30
Quatrième	76,66%	76,66%	13,33%	30
Terminale C	100%	100%	76,19%	21
.				

Chapitre Deux

Analyse critique des compétences exigées en arithmétique

2.1 Etat des lieux

2.1.1 Répartition de l'arithmétique au secondaire

(**Réference :** Programme officiel de mathématiques au Cameroun, voir le detail en annexe)

classes	compétences exigées	pré-requis
6^e	-Reconnaitre un nombre entier naturel ; -reconnaitre les multiples et diviseurs d'un nombre entier naturel ; -maîtriser quelques critères de divisibilités.	-Table de multiplication ; -division et multiplication.
5^e	-Reconnaitre un nombre premier ; -décomposer un nombre en produit de facteurs premiers, -calculer le PPMC et PGDC de 2 nombres entiers naturels ; -mettre 2 entiers naturels a et b sous la forme a=bq+r, a>b>r ; -utiliser le PPMC pour réduire une fraction au même dénominateur ; -utiliser le PGDC pour simplifier une fraction.	-Multiples d'un nombre ; -diviseurs d'un nombre.
4^e	-Utiliser le PPMC(PGDC) pour : -résoudre des problèmes simples, -effectuer des calculs sur des fractions.	PPMC et PGDC.

classes	compétences exigées	pré-requis
3^e		
2nde		
1^{ere}		
T^{le}C	-Passer du système décimal au système binaire, -maîtriser les règles de calcul sur les congruences, -calculer le PPMC et le PGDC de 2 entiers relatifs, -utiliser les théorèmes de Bézout et de Gauss pour démontrer, -utiliser le PGDC pour résoudre des équations diophantiennes et les systèmes de congruences.	Calculer le PPMC et le PGDC de 2 entiers naturels, -utiliser le PPMC et le PGDC pour résoudre des problèmes simples, -utiliser le PPMC(PGDC) pour effectuer des calculs sur les fractions.

2.1.2 Observations

Au regard du tableau ci-dessus, force est de constater que :

– De la 6^e en 4^e, les compétences exigées d'une classe deviennent les pré-requis de la classe suivante.

– les programmes en arithmétique évoluent progressivement de la 6^e jusqu'en 4^e. Ainsi l'enseignement de l'arithmétique est continu et les pratiques arithmétiques sont régulières dans ces classes.

– L'arithmétique est absente dans les programmes de 3^e, 2nde et 1^{ere}

– Du point de vue arithmétique, tout se passe comme si la terminale C suivait immédiatement la 4^e : Les compétences exigées en 4^e sont les pré-requis en terminale C.

– L'arithmétique est vaste et dense en terminale C

De cet état des lieux naissent plusieurs questions :

- Les enseignants démontrent-ils toujours la capacité et la volonté de faciliter l'apprentissage de l'arithmétique en terminale C ?
- Les élèves démontrent-ils leurs compétences et leurs motivations à mieux se conduire dans cette apprentissage ?
- Les pré-acquis construits de la sixième en quatrième sont-ils toujours en place chez les élèves à l'entame de cette leçon en terminale C ? ...

Telles sont autant de questions qui pourraient guider notre analyse.

2.2 Analyse

2.2.1 Interprétation

Au régard des résultats des tests et de l'état des lieux ci-déssus, nous pouvons déduire que : La continuité de l'enseignement de l'arithmétique en 6^{e}, 5^{e} et 4^{e} faciliterait sans doute son apprentissage et son enseignement dans ces classes. L'absence de l'arithmétique dans les programmes de troisième, seconde et première entrainerait une extinction de la mémoire chez les apprenants ; nous la déplorons. De plus, sa forte et dense présence dans la classe de terminale C, en peu de temps, pourrait être une des raisons pour lesquelle son apprentissage et son enseignement ne sont pas faciles dans cette classe. Elle pourraient également être la raison de la démotivation des élèves et des enseignants pendant le processus enseignement-apprentissage de l'arithmétique.

2.2.2 Conclusion

Au terme de notre analyse nous pouvons affirmer que l'arithmétique est bien suivie de la sixième en quatrième. Son interruption en 3^{e}, 2^{nde} et 1^{ere} fait de l'arithmétique un véritable obstacle pour les élèves de la terminale C. Il est donc important que l'enseignement de l'arithmétique au secondaire soit continu, ceci pour l'intérêt des élèves et des enseignants. Ainsi la construction des savoirs arithmétiques déclenchée depuis le primaire,par l'activité des nombres sera bien entretenue et bien suivie de la 6^{e} en terminale.

2.3 Suggestions

Dans le souci de bien menner les activités arithmétiques au secondaire, de faciliter leur enseignement et leur apprentissage, d'apprivoiser les élèves à cette science afin d'améliorer les performances des élèves en classe de terminale C ; il est important de repartir l'arithmétique dans les programme de toutes les classes du secondaire.Puisqu'elle est dejà bien répartie de la sixième en quatrième, il reste à revoire les programmes de troisième, seconde, première C et terminale C

Dans ce paragraphe, nous suggérons une répartition progressive de l'arithmétique de la terminale C dans les classes sus-citées de la manière suivante :

classes	Contenus	Commentaires, Savoir, Savoir-faire
3e	PPMC et PGDC de 2 entiers relatifs.	L'élève doit pouvoir utiliser le PPMC(PGDC) pour résoudre les problèmes.
$2^{nde}C$	PPMC et PGDC ; -division euclidienne dans N et Z.	L'élève doit être capable de : démontrer que 2 nombres sont premiers entre eux. mettre 2 entiers a et b sous la forme : a=bq+r, 0<r<b<a
$1^{ereC}C$	Multiples d'un entier relatif, Notation nZ ; -nombres premiers ; -PPMC et PGDC. -décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers	 Définir les nombres premiers dans leur ensemble et nombres premiers entre eux 2 à 2 ; Définir le PPMC avec la notation nZ. admettre l'existence et l'unicité.

classes	Contenus	Commentaires, Savoir, Savoir-faire
T^{le}C	-PPMC et PGDC, -congruence modulo n, -numération décimale et binaire, -équations diophantiennes de la forme ax+by=c, -systèmes de congruences de la forme : $\begin{cases} x \equiv a(mod\ m) \\ y \equiv b(mod\ n). \end{cases}$	-Déterminer le PGDC par l'algorithme d'Euclide, - énoncer et utiliser les théorèmes de Bézout et de Gauss pour démontrer, -utiliser le PPMC et le PGDC pour résoudre des problèmes. -maîtriser les règles de calcul sur les congruences, - Passer du système décimal au système binaire, - résoudre des problèmes en utilisant les équations diophantiennes et les congruences.

⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

Exemple d'une leçon d'arithmétique en terminale C : PGDC et PPMC

3.1 Objectifs pédagogiques de la leçon

3.1.1 Objectif pédagogique général

Utiliser les PGDC et PPMC pour résoudre des problèmes.

3.1.2 Objectifs Pédagogiques Spécifiques (O.P.S)

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

1. O.P.S. 1 Déterminer le PGDC et PPMC de deux entiers relatifs ;
2. O.P.S. 2 Utiliser les propriétés du PGDC et du PPMC pour démontrer ;
3. O.P.S. 3 Utiliser le théorème de Gauss et de Bezout- Rachit pour démontrer et résoudre les problèmes ;
4. O.P.S 4 Résoudre les équations Diophantiennes de type : $ax+by=c$ et les équations de congruence ;
5. O.P.S 5 Mener un raisonnement logique en utilisant les PPMC et les PGDC pour résoudre un problème social.

3.2 Historique et motivation

D'après Saliou touré et autres dans leur livre CIAM, Mathématiques terminale SM. EDICEF, 1973 « L'arithmétique étant l'un des secteurs les plus anciens et les plus féconds,[les PPMC et les PGDC le sont aussi puisqu'ils sont une partie de l'arithmétique]. Fondée essentiellement par des Pythagoriciens pour qui tout était nombre, elle a connu de grands progrès sous l'impulsion de Fermat, Euler, Lagrange, Gauss et Legendre...

Longtemps considérée comme la plus abstraite et la moins utile des mathématiques, elle connait aujourd'hui de nombreuses applications » :

- En informatique (on peut disposer dans Excel des fonctions supplémentaires telles que : PGDC, PPMC, ...
  On peut aussi obtenir dans Excel un diagramme en boîte) ;
- En électronique : conception des diodes à jonctions ;
- En cryptographie : on peut chronométrer une course collective.

3.3 Place dans le programme officiel Camerounais

Le PGDC et le PPMC interviennent juste après la divisibilité dans $\mathbb{Z}$; ainsi, les pré requis nécessaires à la compréhension de cette leçon et de son appropriation sont :

- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ (division euclidienne) ;
- Les congruences ;
- Les nombres premiers.

Au régard des résultats des tests faits au chapitre 1, nous pouvons déduire les pré-acquis suivants :

- Le calcul du PGDC et du PPMC de deux nombres entiers naturels, par la décomposition en produit de nombres premiers
- la résolution d'un problème simple en utilisant le PPMC ou le PGDC

Il est important de noter que les pré-acquis sont une partie des pré-réquis, et qui varient en fonction des compétences des élèves.

Dans le futur, cette leçon constituera la base des unités de valeurs à l'université telles que : la théorie des nombres, l'algèbre...

3.4 Le déroulement de la leçon

No	Contenus	Type d'activité	Objectifs spécifiques (savoir, savoir faire)	Durée
1 2	PPMC. PGDC.	Théorique ou expérimentale.	Calculer le PPMC et le PGDC de deux entiers en Utilisant : - La décomposition en produits de facteurs premiers et l'algorithme d'Euclide ; -La notation $n\mathbb{Z}$.	2h
3 3.1 3.2 3.3	Utilisation des PGDC et PPMC pour démontrer. Déterminer les coefficients d'une égalité de Bézout. Résoudre les équations diophantiennes. Résoudre les systèmes de congruence du type : $\begin{cases} x \equiv a(mod\ m) \\ y \equiv b(mod\ n) \end{cases}$	Théorique ou expérimentale.	-Mémoriser les propriétés liées au PGDC et PPMC et les utiliser pour démontrer : Gauss ; Bézout et autres. -Résoudre facilement les équations du type $ax + by = c$, dans $\mathbb{Z}$. -Résoudre les problèmes en utilisant les congruences.	3h
4	Application des PGDC et PPMC dans la vie quotidienne.	Théorique ou expérimentale.	-Résoudre les problèmes de la vie courante en utilisant les PPMC et PGDC.	2h
.				

3.5 Stratégies utilisées pour atteindre ces objectifs

Nous allons utiliser ici une méthode centrée sur l'apprenant (méthode interactive)

Pour chacun des objectifs énumérés plus haut, nous allons construire une activité qui permettra de l'atteindre. L'activité sera menée par l'apprenant (avec l'aide de l'enseignant) jusqu'à l'atteinte du point focus. Chaque leçon suivra le schéma ci dessous :

Activité

$\downarrow$

Approche général du concept (énoncé)

$\downarrow$

Exemple

$\downarrow$

Test d'objectif

$\downarrow$

Evaluation formative

3.6 Plus Petit Multiple Commun (PPMC)

Objectif pédagogique spécifique 3. 6.

L'élève doit être capable de :

– Calculer le PPMC de deux entiers relatifs ;

– Résoudre des problèmes en utilisant le PPMC.

.

3.6.1 Définition

Activité 3.6.1.

1. Définir en extension les ensembles $15\mathbb{Z}$ et $9\mathbb{Z}$, multiples respectifs de 15 et de 9.
   Réponse1 : $15\mathbb{Z} = \{... - 45; -30; -15; 0; 15; 30; 45...\}$
   et $9\mathbb{Z} = \{... - 54; -45; -36; -27; -18; -9; 0; 18; 27; 36; 45; 54...\}$
2. En déduire l'ensemble $A = 15\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$.
   Réponse2 : $A = \{... - 45; 0; 45; ...\}$
3. Quel est le plus petit élément positif de A ?
   Réponse3 : 45.
   Conclusion : On dit que 45 est le plus petit multiple commun de 15 et 9. On note $PPMC(15; 9) = 45$.

Définition 3.6.

Le PPMC de deux entiers relatifs non nuls a et b est le plus petit élément strictement positif de l'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Cette définition est extraite du livre CIAM terminale SM de Saliou Touré et autres , EDICEF 1973, page 17.

Exemple 3.6.1.

1) Déterminer le PPMC (7 ; 5) et le PPMC (-7 ; -5).
   Réponse 1 : PPMC (7 ; 5) = 35 et PPM (-7 ; -5) = 35

2) Déterminer le PPMC (8 ; 12) ; puis comparer max$\{8; 12\}$; PPMC(8 ; 12) ; et (8)×(12).
   Réponse2 : PPMC (8 ; 12) = 24 ; max$\{8; 12\}$ = 12 ; et 8 ×12 = 96.
   Donc on a : $\max\{8; 12\} \leq PPMC(8; 12) \leq (8) \times (12)$.

Remarque: 3.6.1.

– Si a, b et c sont trois entiers naturels non nuls, alors :
$PPMC(ca; cb) = c[PPMC(a; b)]$;

– Pour tous entiers relatifs a et b on a : PPMC (a ; b)=PPMC (|a| ; |b|). Donc une recherche du PPMC peut se ramener à la recherche du PPMC de deux entiers naturels ;

– Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, alors on a : $\max\{a; b\} \leq PPMC(a; b)$ $\leq$ab
.

propriété 3.6

Activité.3.6.2

Soient $(a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *et* $\mu = PPMC(a; b)$.

1. Montrer qu'il existe $(q; r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $n = \mu q + r$.
   Réponse 1 Soit $n \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Alors $n \geq \mu$ sinon μ ne serait plus le PPMC (a ; b)) donc il existe $(q; r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $n = \mu q + r$.
2. Dans ce cas, montrer que r = 0 ; puis en déduire que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$.
   Réponse 2 De ce qui précède, on en déduit que $r = n - \mu q$. Mais n et μ sont les multiples communs de a et b ; donc $r \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. De plus, μ est le plus petit élément de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et $0 \leq r < \mu$ donc $r = 0$. On en déduit que $n \in \mu\mathbb{Z}$. D'ou $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset \mu\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
   Réponse 3 : Soit $n \in \mu\mathbb{Z}$. Alors n, multiple de μ et μ est le multiple de a et de b, donc n est un multiple de a et b. C'est-à-dire $n \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. D'ou $\mu\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

4. Que peut-on dire des ensembles $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ *et* $\mu\mathbb{Z}$?
   Réponse 4 : Des questions 3) et 4), on en déduit que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

propriété

Si $(a; b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ *et* $\mu = PPMC(a; b)$, alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

Cette propriété est extraite du livre CIAM terminale SM de Saliou Touré et autres , EDICEF 1973, page 18.

Exemple 3.6.2. Calculer PPMC(120 ;168).

Réponse : On remarque que 24 est diviseur commun de 120 et de 168. Alors, d'après la remarque précédente on a :

$$\begin{aligned} PPMC(120;168) &= PPMC(24\times 5; 24\times 7)\\ &= 24\times PPMC(5;7)\\ &= 24\times 35. \end{aligned}$$

Test d'objectif 3.6.

Soit n un entier naturel non nul ; calculer :

1) a) $PPMC(n^2-1; n^2-n)$.

Solution3.6.

$PPMC(n^2-1; n^2-n) = PPMC[(n-1)(n+1); n(n-1)]$

$= (n-1)PPMC(n+1; n)$

$= (n-1)\times(n(n+1))$

$= n(n-1)(n+1) = n(n^2-1)$

2) b) $PPMC(\frac{-10(n+1)}{n}; -3n^2-6n-3)$

Solution : A chercher

3.7 Plus Grand Diviseur Commun (PGDC)

Objectifs spécifiques 3. 7.

L'élève doit pouvoir :

- Calculer le PGDC de deux entiers ;
- Utiliser le théorème de Bezout et de Gauss pour démontrer et pour Résoudre des problèmes.

3.7.1 Définition

Activité 3.7.1

1) Déterminer les ensembles Div(40) et Div(18) ; diviseurs respectifs de 40 et 18.

Réponse 1 : Div(40)$=\{1;2;4;5;8;10;20;40\}$;

Div(18)$=\{1;2;3;6;9;18\}$.

2) Déterminer l'ensemble A $=$ Div(40) $\cap$ Div(18).

Réponse 2 : A$=\{1;2\}$.

3) En déduire max(A).

Réponse3 : max(A)$=\{2\}$.

Conclusion : On dit que 2 est le Plus Grand Diviseur Commun de 40 et de 18 : on note

PGDC (40 ; 18) = 2.

Définition 3.7.1

> Le plus grand diviseur commun de deux entiers a et b, noté PGDC (a ; b) est le plus grand élément de l'ensemble {Div(a) ∩ Div(b)}.

Cette définition est extraite du livre CIAM terminale SM de Saliou Touré et autres , EDICEF 1973, page 18.

3.7.2 Algorithme d'Euclide

Activité 3.7.2.

1. Complète le tableau.

Quotients	3	6				
Dividende	2025	641	102			
Diviseurs	↗ 641	↗ 102	29			
Restes	↗ 102	↗ 29				

Réponse 1 :

Quotients	3	6	3	1	1	14
Dividende	2025	641	102	29	15	14
Diviseurs	↗ 641	↗ 102	29	15	14	1
Restes	↗ 102	↗ 29	15	14	1	0

2. Quel est le dernier reste non nul ?

Réponse 2 : 1.

Conclusion : On dit que PGDC (2025 ; 641)= 1. Dans ce cas, les nombres 2025 et 641 sont premiers entre eux.

Règle 3.7.

Pour calculer le PGDC de deux entiers a et b tels que $0 < b < a$,on peut effectuer les divisions euclidiennes successives suivantes :
– Division de a par b pour obtenir : $a = bq_0 + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b)$.
– Division de b par r_0 pour obtenir $b = r_0q_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$.
– Division de r_0 par r_1 pour obtenir $r_0 = r_1q_2 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$.
La suite $(r_n)_n$ est positive et strictement décroissante, qui s'annule après un nombre fini de divisions euclidiennes et le dernier reste non nul obtenu est le PGDC (a ; b).

Cette règle est extraite du livre CIAM terminale SM de Saliou Touré et autres , EDICEF 1973, page 20.

Exemple 3.7.1. 1) Calculer $PGDC(16; 12)$.

Réponse : $16 = 12 \times 1 + 4$ et $12 = 4 \times 3 + 0$; donc $PGDC(16; 12) = 4$.

2) Calculer : $PGDC(40; 12)$.

Réponse : $40 = 12 \times 3 + 4$ et $12 = 4 \times 3 + 0$; donc $PGDC(40; 12) = 4$.

3) Calculer $PGDC(44; 18)$.

Réponse : $44 = 18 \times 2 + 8$;
$18 = 8 \times 2 + 2$;
$8 = 2 \times 4 + 0$; donc $PGDC(40; 18) = 2$.

Test d'objectif 3.7.1.

Calculer le $PGDC(-240; -300)$ et le PGDC (240 ; 300). Que constate-t-on ?

Remarque: 3.7.1. Pour tout entier relatif a et b non nul ; on a $PGDC(|a|; |b|) = PGDC(a; b)$.

Propriété 3.7.1.

Activité 3.7.3 Soients a, b, q et r quatre nombrs entiers tels que a = bq + r avec $0 \leq r < b$. Que dévient le PGDC(a ; b) :

1. Si r = 0 ? **Réponse 1 :**
2. Si r = 0, les ensembles Div(a ; b) et Div(b) sont égaux et ont le même plus grand élément. Donc : PGDC (a ; b) = b.
3. Si$r \neq O$

   Réponse 2 : Si$r \neq O$, les ensembles D(a ; b) et D(b ; r) sont égaux et ont le même plus grand élément. Donc : PGDC (a ; b) = PGDC (b ; r).

Propriété

Soient a, b, q et r quatre nombres entiers. Si a = bq + r avec $0 \leq r < b$, alors : PGDC(a ; b) = PGDC (b ; r).

Cette propriété est un extrait du livre CIAM terminale SM de Saliou Touré et autres , EDICEF 1973, page 20.

Propriété 3.7.2. : Relation entre PGDC et PPMC

Activité 3.7.4.

Soient $a\ et\ b$ deux entiers naturels. Exprimer $PPMC(a;b) \times PGDC(a;b)$ en fonction de a et b.

Réponse : Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Posons $\mu = PPMC(a;b)\ et\ d = PGDC(a;b)$. Alors il existe $a'\ et\ b'$ deux entiers relatifs tels que :$a = da'\ et\ b = db'$ avec $a'\ et\ b'$ prémiers entre eux. On a :$\mu = PPMC(a;b) = d \times PPMC(a';b') = da'b'$. Ainsi, $d\mu = dda'b' = (da')(db') = ab$. Il en résulte que : $PPMC\ (a;\ b) \times PGDC\ (a;\ b) = a \times b$

Propriété

Soient $a\ et\ b$ deux entiers naturels, on a : $PPMC\ (a;\ b) \times PGDC\ (a;\ b) = a \times b$.

Cette propriété est un extrait du cours de Théorie des nombres MA 408 du Dr. Bapoungué Lionnel, ENS de Yaoundé 2012.

Propriété 3.7.3.

Activité

Soient $a, b\ et\ m$ trois entiers naturels non nuls et $d = PGDC\ (a;\ b)$.

1. Montrer que PGDC(a ; b + am) = d.

   Réponse 1 : Posons $d' = PGDC(a;b+am)$. Puisque $d = PGDC(a;b), d|a\ et\ d|b + am$ donc $d|d';\ mais\ 0 < d,\ donc\ d = d'$.

2. Montrer que $PGDC\ (am;\ bm) = m \times d$.

   Réponse 2 : Puisque $0 < m\ et\ d = PGDC(a;b)$, on a $d|a$ et $d|b$. Ceci implique que dm|am et dm|bm donc $dm|PGDC(am;bm)$. C'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $PGDC(am;bm) = kdm$: $(*)$.

   Alors $kmd|am\ et\ kmd|bm$ entraine que $kd|a\ et\ kd|b$ donc $kd|PGDC(a;b)$. Ceci impose k=1 . Ainsi, (*) devient $PGDC(am;bm) = md = m \times PGDC(a;b)$.

3. Montrer que $PGDC(\frac{a}{d};\frac{b}{d}) = 1$.

   Réponse 4 : $d = PGDC(a;b) = PGDC(\frac{ad}{d};\frac{bd}{d}) = d \times PGDC(\frac{a}{d};\frac{b}{d})$.

   Donc $PGDC(\frac{a}{d};(\frac{b}{d})) = 1$.

Propriété

Soient a, b *et* m trois entiers naturels non nuls et $d = PGDC(a;b)$. Alors :

i) $PGDC(a;b) = PGDC(a;b+am)$;

ii) $PGDC(am;bm) = m \times PGDC(a;b)$;

iii) $PGDC(\frac{a}{d};\frac{b}{d}) = 1$.

Cette propriété est un extrait du cours de Théorie des nombres MA 408 du Dr. Bapoungué Lionnel, ENS de Yaoundé 2012.

3.7.3 Nombres premiers entre eux

Définitions 3.7.2.

i) On dit que les entiers $a_1; a_2; ...; a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si $PGDC(a_1; a_2; ....; a_n) = 1$.

ii) Les entiers $a_1; a_2; ...; a_n$ sont premiers entre eux deux à deux lorsque $PGDC(a_i; a_j) = 1$, pour tout $i, j \in \{1; 2; ......; n\}$ avec i différent de j.

iii) Lorsque $PGDC(a;b) = 1$, on dit que a et b sont premiers entre eux.

Cette propriété est un extrait du cours de Théorie des nombres MA 408 du Dr. Bapoungué Lionnel, ENS de Yaoundé 2012.

Attention ! ! ! Si des entiers sont premiers entre eux deux à deux, alors ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. Mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.7.2. Pour n=3, posons : $a_1 = 12$; $a_2 = 15$; et $a_3 = 16$. On a : $PGDC(a_1; a_2; a_3) = 1$; mais $PGDC(a_1; a_2) = 3$

. Donc les entiers 12 ; 15 et 16 sont premiers entre eux dans leur ensemble mais ne sont pas premiers entre eux deux à deux.

Théorème 3.7.1. :Bézout-Rachit

Les entiers $a_1, a_2, ...a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement s'il existe $(u_1; u_2; ...; u_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que a $a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 1$.

D'après M. Monge dans Mathématiques Terminale C. Belin 1973.

Preuve. : Soient $a_; a_2; ...a_n$ n entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Alors : $PGDC(a_1; a_2; ...; a_n) = 1 \Leftrightarrow a_1\mathbb{Z} + a_2\mathbb{Z} + ... + a_n\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}. \Leftrightarrow \exists(u_; u_2; ...; u_n) \in Z^n$ tel que $a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n = 1$. ∎

Théorème3.7.2. : Gauss

Soient a , b et c trois entiers naturels non nuls. Si a| bc et PGDC (a ; b) = 1 , alors a|c.

D'après M. Monge dans Mathématiques Terminale C. Belin 1973.

Preuve. : Supposons que $a|bc$ et $PGDC(a; b) = 1$. Alors il existe u, v $\in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$ (Bézout-Rachit). Mais $a|bc$ *donc* $bc = am$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$. Par suite, on peut écrire : $c = c \times 1 = c(au + bv) = cau + cbv = cau + amv = a(cu + mv)$. D'où a divise c . ∎

Test d'objectif 3.7.2.

a) Soit a un entier relatif, on suppose que a est premier avec chacun des entiers b_1 et b_2. Démontrer que a est premier avec b_1b_2.

b) On suppose que $PGDC(a; b) = 1$. Démontrer que $PGDC(a; bp) = 1$ et que $PGCD(am; bp) = 1$. Avec m , p $\in \mathbb{Z}$.

  i) Etudier les variations de la fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + bx - 4$.

  ii) En vous servant du théorème de la valeur intermédiaire, démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une racine unique $x_0 = \frac{p}{q}$ rationnelle que l'on déterminera par le calcul de p et q au moyen du théorème de Gauss.

3.8 Utilisation des PGCD

objectifs pédagogiques spécifiques 3. 8.

- Résoudre une équation diophantienne du type : $ax + by = c$; avec $(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- Utiliser le PGDC pour résoudre les systèmes congruences ;
- Utiliser les PGDC pour résoudre les problèmes sociaux.

3.8.1 Pour résoudre les équations Diophantiennes de la forme : $\mathbf{ax + by = c}$

Activité 3.8.1.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation diophantienne $ax + by = c \quad (1)$, dans laquelle l'inconnue est le couple (x ; y) et a, b, c sont des constantes entières.

Partie 1

1. Démontrer que si $d = PGDC(a; b)$ et d ne divise pas c ,alors l'équation (1) n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

   Réponse 1 : Supposons x et y tels que $ax + by = c$. Alors c $\in \mathbb{Z}$. Mais $ax + by \in d\mathbb{Z}$ donc $c \in d\mathbb{Z}$ sinon, l'équation est impossible.

2. Supposons $c \in d\mathbb{Z}$. Démontrer qu'on peut toujours prendre $PGDC(a; b) = 1$.

   Réponse 2 : $c \in d\mathbb{Z} \leftrightarrow c = dk, k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant c par sa valeur, on a :

$$\begin{aligned} ax + by = dk &\leftrightarrow (\frac{a}{d})x + (\frac{b}{d})y = k \\ &\leftrightarrow a'x + b'y = k. \end{aligned}$$

   avec $a' = \frac{a}{d}$ *et* $b' = \frac{b}{d}$. Ainsi, on peut toujours supposer que $PGDC(a; b) = 1$ dans l'équation (1) .

Partie 2

On suppose alors $PGDC(a; b) = 1$.

1) Montrer que l'équation (1) est équivalente à $ax_0 + by_0 = c$ $o(x_0; y_0)$ est une solution particulière de l'équation (1).

   Réponse 1 : En utilisant le théorème de Bézout, on peut écrire : il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$. En multipliant les deux membres par c, on obtient $acu + bcv = 1c$. Posons $x_0 = cu$ et $y_0 = cv$, ceci nous donne : $ax_0 + by_0 = c$: (2).

   On a ainsi une solution $(x_0; y_0)$ de l' équation proposée.

2) Exprimer (x ; y) en fonction de $(x_0; y_0)$.

Réponse 2 : (1) et (2) nous donnent le système : $\begin{cases} ax + by = c. \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c. \\ -ax_0 - by_0 = -c. \end{cases}$.

En additionnant membre à membre, on obtient : $a(x-x_0)+b(y-y_0) = 0$. C'est-à-dire : $a(x_0 - x) = b(y_0 - y)$: (3). Utilisons le théorème de Gauss :
$a|b(y_0 - y)$ et a premier avec b, donc $a|y_0 - y$. C'est à dire $y = y_0 - ka$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant y dans (3), on a : $a(x_0 - x) = kab$ et en simplifiant, on obtient $x_0 - x = kb$.
Ainsi les valeurs de x et y cherchées sont : $x = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$; avec $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème 3.8.1

Si $d = PGDC(a; b)$, alors l'équation $ax + by = c$ admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si d divise c.
Si $(x_0; y_0)$ est une solution particulière (qu'on peut déterminer par l'algorithme d'Euclide) alors la solution générale est donnée par : $x = x_0 + (\frac{kb}{d})$ et $y = y_0 - (\frac{ka}{d})$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'après Dr. Bapoungué Lionnel dans son cours de théorie des nombres, ENS de Yaoundé 2012.

3.8.2 Pour résoudre les systèmes de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv a(mod\ m) \\ y \equiv b(mod\ n) \end{cases}$$

Activité 3.8.2.

On se propose de résoudre le système (S) : $\begin{cases} t \equiv m(mod\ a) \\ t \equiv n(mod\ b) \end{cases}$

◇ Utiliser la définition de la congruence pour vérifier que (S) est équivalent à l'équation $ka - k'b = n - m \quad (2)$, avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

Réponse : (S) $\Leftrightarrow$ ($t = ka + m$ et $t = k'b + n$). En égalant les deux t, on a : $ka + m - k'b - n = 0$ c'est-à-dire $ka - k'b = n - m$: (2) ; $k, k' \in \mathbb{Z}$.

◇ En déduire une équivalence entre (S) et $ax + by = c$.

Réponse : Posons $c = n - m$, alors le couple $(k; -k')$ doit être solution de l'équation $ax + by = c$. Donc (S) $\leftrightarrow$ (2) $\leftrightarrow$ $ax + by = c$.

◇ Déterminer les valeurs de t.

Réponse : On sait que $X = x_0 + kb$ et $y = y_0 - ka$ où $(x_0; y_0)$ est une solution particulière de l'équation $ax + by = c$. Mais $k = x\ et\ -k' = y$ donc $t = m + (x_0 + kb)a$ ou $-t = b(y_0 - ka) - n$; c'est à dire $t = ax_0 + kab - m$ ou $t = -by_0 + kba + n$. c'est à dire $t \equiv ax_0 + m(mod\ ab)$ ou $t \equiv -by_0 + m(mod\ ab)$.

Théorème 3.8.2.

Soient a, b, m et n quatre entiers non nuls tels que $PGDC(a;b) = 1$. $\begin{cases} t \equiv m(mod\ a) \\ t \equiv n(mod\ b) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t \equiv ax_0 + m(mod\ ab) \\ t \equiv -by_0 + n(mod\ ab) \end{cases}$ où $(x_0; y_0)$ est une solution particulière de l'équation ax + by = c.

D'après Dr. Bapoungué Lionnel dans son cours de théorie des nombres, ENS de Yaoundé 2012.

Exemples 3.8.

Exemple 3.8.1. : Pour les besoins de ses services, le proviseur d'un lycée de la place commande les imprimantes de type A et de type B, à deux fournisseurs différents. Les prix unitaires sont respectivement 34000 francs et 15000 francs. Combien d'imprimantes de chaque type peut-il commander, si :

1. Les deux factures doivent être équilibrées ?
2. La différence entre les deux factures est de 2000 francs ?

Solution 3.8.1. : Soient x et y les nombres respectifs d'imprimantes de type A et de type B.

1. Les deux factures sont équilibrées signifie que : $34000x - 15000y = 0$. C'est à dire $34x = 15y$. De cette égalité, on en déduit que : 15 divise 34x et est premier avec 34 ; donc d'après le théorème de Gauss, 15 divise x. Ainsi, il existe un entier relatif k tel que : $x = 15k$.

On en déduit $y = 34k$.

Réciproquement, pour tout entier relatif k, le couple $(15k; 34k)$ est solution de l'équation $34x - 15y = 0$.

Conclusion : Il peut commander 15k imprimantes de type A et 34k imprimantes de type B, avec $k \in \mathbb{N}$.

2. La différence entre les deux factures est de 2000 francs :

$34000x - 15000y = 2000$. C'est à dire $34x - 15y = 2$, qui est une équation Diophantienne. Nous pouvons donc chercher une solution particulière par l'algorithme d'Euclide :

$34 = 15 \times 2 + 4\,;$

$15 = 4 \times 3 + 3\,;$

$4 = 3 \times 1 + 1$, donc :

$1 = 4 - 3 \times 1\,;$

$1 = 4 - (15 - 4 \times 3)\,;$

$1 = 4 \times 4 - 15\,;$

$1 = 4(34 - 15 \times 2) - 15\,;$

$1 = 4 \times 34 - 9 \times 15.$

En multipliant la dernière égalité par 2, on obtient : $8 \times 34 - 18 \times 15 = 2$. Donc la soluton particulière est le couple$(x_o; y_o) = (8; 18)$. On en déduit la solution générale : $\{(15k + 8; 34k + 18)\}$.
Conclusion : Il peut commander 15k + 8 imprimantes de type A et 34k + 18 imprimantes de type B.

Exemple 3.8.2. : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x qui vérifient le système (s) : $\begin{cases} x \equiv -1 (mod\ 34) \\ x \equiv 1 (mod\ 15) \end{cases}$
Solution 3.8.2. Soit x une solution de (S). Il existe deux entiers relatifs p et q tels que$x = 34p - 1 et x = 15q + 1$. On en déduit que : $34p - 15q = 2$.
D'après l'application 1, il existe un entier relatif k tel que $(p, q) = (15k + 8; 34k + 18)$
Réciproquement, soit k un entier relatif. Posons : $x = 34(15k + 8) - 1$.
On a : $x \equiv -1(mod\ 34)$ et $x \equiv 1(mod\ 15)$.
L'ensemble solution du système (S) est donc : $\{510k + 271, k \in \mathbb{Z}\}$.
Remarque : On obtient le même résultat en posant : x = 15(34k +18)+ 1.

Exemple 3.8.3. : Une mère dit à sa fille :« la somme de nos deux âges est égale à 60 ans et leur PGDC est égale à 12 ». Déterminer l'âge de la mère et de sa fille.
Solution 3.8.3. Soient x et y les âges respectifs de la mère et de sa fille. Alors : $\begin{cases} x + y = 60 \\ PGDC(x; y) = 12 \end{cases}$
PGDC(x ; y) = 12, donc il existe deux entiers premiers entre eux x' et y' tels que : x =

12x' et y = 12y'. Le système ci-dessus devient : $\begin{cases} x = 12x' et y = 12y' \\ PGDC(x', y') = 1 \\ x' + y' = 5. \end{cases}$

On obtient : $(x'; y') \in \{(1;4);(4;1);(2;3);(3;2)\}$. On en déduit que $(x;y) \in \{(12;48);(48;12);(24;36);(3$

Conclusion : comme la mère est plus âgée que sa fille, on en déduit que : la mère a 48 ans et sa fille a 12 ans ; ou alors elle a 36 ans et sa fille a 24 ans.

♣ Applications ♣

Tests d'objectifs 3.8. : Applications

Application 1 : Si l'on divise 4294 et 3521 par un même nombre entier, les restes sont respectivement 1 et 11. Quel est ce nombre ?

Application 2 : Démontrer en utilisant l'algorithme d'Euclide, qu'il existe deux entiers a et b tels que 564a + 271b = 1. Quels sont ces entiers ?

Application 3 : Démontrer que deux nombres impairs consécutifs sont premiers entre eux.

Application 4 : A l'aide du théorème de Bezout, démontrer que PGDC(2n+1 ; 3n+1)= 1.

Application 5 : Démontrer que le produit de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 6.

Application 6 : Un centre de formation a récruté 542 étudiants. Il existe dans ce centre des salles de 17 places et de 11 places. Combien de salles vont-ils occuper ?

Application 7 : Pour quelles valeurs de n non nulle la fraction $\frac{n^2+3}{n+2}$ est-elle irréductible ? Pour quelle valeur de n ce quotient est un entier ?

Application 8 : Trouver une fraction d'entiers naturels sachant que la somme du numérateur et du dénominateur est 96, et que leur PGDC est 8.

Application 9 : Trouver deux nombres entiers naturels a et b plus petit que 100 tels que : $a - b = 63$ et $PGDC(a; b) = 7$.

Application 10 : Calculer $PGDC(p;(p-1)!)$ avec p un nombre entier prémier.

Application 11 : Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $212x + 171y = 1$.

Application 12 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : x ≡ -1 (mod 34) et x ≡ 1(mod 15).

Application 13 : Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système : $\begin{cases} pgcd(x;y) = 12 \\ x + y = 60 \end{cases}$.

Evaluation formative

Application 14 : A l'aéroport international de Yaoundé Nsimalen, il existe un phare qui émet deux signaux : un signal vert toute les 26 secondes et un signal bleu toutes les 30 secondes . Le premier signal vert est aperçu à 06 h 00 et le premier signal bleu 2 secondes après. Déterminer à quel moment les deux signaux seront perçus simultanément.

Application 15 : M. Ela est un boutiquier ayant deux livreurs de pain : il est surpris le matin du 01/01/2013 par une double livraison. Pour éviter de telles scènes dans le futur, il décide recevoir les deux boulangers par rendez-vous périodiques de périodes respectives 4 jours et 7 jours.
Va-t-il réussir ? si oui pourquoi ?
Si non quand aura-t-il à nouveau une double livraison ?

Application 16 : Un Commerçant dispose de 100000 F et veut acheter des chaussures de type A et B. sachant que les chaussures de type A coutent 10000 F et ceux de type B coutent 12000 F. Combien de paires de chaussures peut il acheter avec son argent ?

Application 17 Trouver les nombres entiers de trois chiffres abc (centaine, dizaines, unité) multiples de 5 dont la somme de ces chiffres est 21.

Application 18 : Dans une famille, il y a 3 filles. La somme de leurs âges est 13 et le produit est 36.
a) Etudier la parité de leurs âges.
b) Quel est l'âge de chacune des trois filles ?

Application 19 : Un homme d'affaires veut effectuer un versement dans son compte dans une banque de la ville. la banque n'accepte que des billets de 5000 et de 2000 francs. Il se pose les questions suivantes :
a)Est-il possible de verser une somme de 502000 francs ?
b)Si oui comment remplir le bordereau de versement ?
Aidez-le à répondre à ces questions.

Application 20 : Même problème que l'application n° 19, avec une somme de 995250 francs à verser.

Application 21 : Un planteur a récolté 1000 kg de riz. Il veut constituer des sacs de 13kg et de 19kg. Aidez-le à trouver le nombre de sac qu'il peut constituer dans chaque catégorie.

Application 22 : Une école de formation organise le concours d'entrée en prémière année en deux épreuves : une épreuve de Mathématiques et une épreuve de physique. Un candidat a : 17 sur 20 en Mathématiques et 11 sur 20 en physique ; sa note totale coefficiée est égale à 542. Quel est le coefficient de chaque épreuve à ce concours ?

♣ Conclusion ♣

A travers ce mémoire, nous avons voulu exprimer notre certitude que l'arithmétique peut et doit être enseigné dans toutes les classes du secondaire, vu la place importante qu'elle occupe dans l'apprentissage des mathématiques. A l'aide de nombreux tests, nous nous sommes efforcés de montrer le bon suivi des pratiques arithmétiques de la sixième en quatrième, qui facilite ainsi son apprentissage et son enseignement. Son apprentissage et son enseignement sont mystifiés en terminale C, certainement à cause de son absence dans les classes de troisièmes, secondes et premières ; aussi à cause de sa forte présence dans cette classe, en peu de temps. Nous le déplorons. Cependant, nous croyons que l'efficacité de l'arithmétique dans l'apprentissage et la consolidation des acquis ne seront réels que si un meilleur suivi dans ce domaine est réalisé à travers les programmes de mathématiques du secondaire de l'enseignement général.
Nous avons proposé une répartition objective du programme de l'arithmétique en terminale C ; dans les classes de troisièmes, secondes C, premières C et terminale C. Nous avons également proposé un exemple d'une leçon d'arithmétique en terminale C, utilisant la nouvelle approche pédagogique par compétence, avec une diversité d'exercices. Ainsi, nous esperons avoir ouvert de nouvelles perspectives et proposé de nouveaux leviers aux enseignants, aux inspecteurs de mathématiques et au ministère des enseignements secondaires.

♣ Bibliographie ♣

[1] Arrêté n°18/D/43/MINEDUC/IGP/ESG portant définition des programmes de mathématiques des classes du Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire Général.1994.

[2] Bapoungué Lionel : Cours de Théorie des Nombres Second Cycle du Supérieur. ENS de Yaoundé 2012.

[3]Bernard Destanville : Pour un bon suivi en arithmétique de la 3 en T_{le}. IREM Toulouse. 2005

[4] Group d'enseignants : Le Dictionnaire de français. Eclaire de Plume, 2011.

[5] M. Monge : Mathématiques Terminale C. Belin 1973.

[6] Saliou Touré : collection Inter Africaine de Mathématiques(CIAM), Mathématiques terminale SM. EDICEF, 1973.

♣ Annexe ♣

Définitions de quelques notions utilisées dans ce mémoire

(Référence : Le Dictionnaire de français, Eclaire de Plume, 2011.)

- Arithmétique : Une branche de mathématique consacrée à l'étude des nombres.
- Enseignement continu : enseignement non rompu et bien suivi.
- 0bstacle : Une connaissance male acquise qui produit un raisonnement erroné.
- Difficulté : Connaissance bien acquise, mais qui est mal utilisée dans un raisonnement.
- Suivi chaotique : un mauvais suivi ; ou un suivi désordonné.
- Suivi fragmentaire : Suivi en morceaux ou discontinu.