♠♣ Dénomination de la ressource et des contributeurs ♣♠

TITRE DE LA RESSOURCE :

LES SIMILITUDES INDIRECTES PLANES ET TRADUCTION COMPLEXE DES SIMILITUDES EN Terminale C

NOM DE l'ETUDIANT : **BOADE MASSEMBELE Austin**

NOM DE L'ENCADREUR DE L'E.N.S DE YAOUNDE : **Pr. NNANG Hubert.** (M.C)

NOM DE L'INSPECTEUR : **M. POKAM Roger** (PLEG)

NOM DE L'ENCADREUR DU LYCEE : **M. FOTSING Joseph** (PLEG H/E)

♠♣ Table des matières ♣♠

Hitorique des transformations en géométrie [4]

Les transformations géométriques ont été considérées sous trois aspects, apportant des solutions à trois problématiques étrangères les unes aux autres qu'il convient de bien discerner pour leur enseignement.
1) La méthode des transformations fut créée dans le cadre de la géométrie des figures et même plus étroitement dans le cadre de la théorie des coniques, comme méthode pour découvrir et démontrer par transport de certaines propriétés - les invariants de la transformation- d'une configuration simple, où celles-ci peuvent être démontrées, à des configurations plus complexes.
2) Le mode de correspondance des figures par transformations intervint dans le cadre de la problématique de la refondation de la géométrie élémentaire - euclidienne - comme géométrie vraie, car expérimentale. D'autres transformations seront alors considérées comme métaphore du mouvement qui amène une figure d'une position de l'espace à une autre (translation, rotation), comme métaphore des procédés d'agrandissement - rétrécissement (homothétie) et comme syntaxe pour l'égalité et la similitude des figures. C'est dans ce cadre que ces transformations présentent un intérêt, ou dans le cadre étroit des constructions géométriques développé par J. Petersen.
3) Les transformations jouent, par la notion de groupe de transformations, un rôle majeur dans le cadre d'une classification et d'une hiérarchisation des géométries. F. Klein a montré que cette notion de " groupe de transformations " était l'instrument d'une étude structurale des géométries puisqu'il permettait d'identifier par isomorphie des géométries en apparence étrangères les unes aux autres, d'établir des liens de subordination entre des géométries dont on voyait mal les liens qui pouvaient les unir et donc de hiérarchiser espaces et propriétés géométriques. Ce point de vue ne peut être abordé qu'à un niveau avancé.
L'étude des programmes des quatre dernières décennies permet de distinguer sommairement trois grandes périodes.
1) Dans les années 60, les transformations faisaient l'objet de longs développements dans la classe de mathématiques élémentaires. Le programme comportait une longue partie sur les transformations : Translations - Rotations - Homothéties - Similitudes - Affinités - Inversions - Transformations par polaires réciproques. Celles-ci trouvaient des champs d'application dans les autres parties du programme : Descriptive - Cinématique - Théorie des coniques et dans deux grandes classes de problèmes : problèmes de lieux géométriques et problèmes de construction. Ces derniers initiés par J. Petersen (Problèmes de constructions géométriques) faisaient l'objet d'un apprentissage systématique et donnaient aux translations, rotations, etc., un lieu

d'applications privilégié. La géométrie projective, les homographies, la dualité figuraient aux programmes de Math. Sup et de Math. Spé. Ces programmes avaient une grande cohérence d'un point de vue épistémologique. Ils s'inscrivaient dans la première tradition historique de la géométrie pure.

2) Dans les années 70, après la réforme des maths modernes, les transformations conservaient une grande place dans le programme de terminale C. Elles étaient alors introduites par l'algèbre linéaire et les groupes. Leur étude était menée essentiellement par voie analytique et vectorielle. L'accent était mis sur la notion d'espace : Transformations affines - Espaces projectifs - Harmonicité - Espace affine euclidien - Pôles et polaires par rapport à un cercle - Isométries vectorielles et affines Similitudes - Notions sur le groupe circulaire du plan - Inversion- Espace anallagmatique. Les problématiques de la structuration de l'espace et de la subordination des géométries affines, euclidiennes et projectives étaient mises au premier plan et celle de la géométrie des figures étaient mises au second plan bien que non négligées. Ces programmes avaient eux aussi une grande cohérence d'un point de vue épistémologique.

3) La grande cohérence épistémologique de ces programmes ne les mettait pas à l'abri des critiques et des réformes. Les programmes des années 60 furent réformés car jugés vieillots et n'entretenant plus de liens avec le savoir savant de l'époque et les programmes de l'enseignement supérieur. Les programmes des années 70 furent réformés en raison des difficultés rencontrées pour leur enseignement, mettant au cœur de celui-ci la notion de structure avant qu'il y ait quoi que ce soit à structurer pour les élèves. Les programmes qui suivirent diminuèrent fortement la part de la géométrie. Ils ne gardèrent des transformations que la rotation, la translation, les symétries, la similitude et les isométries, sans problématique propre, sans champ d'application clair. Contrairement aux précédents, ces programmes : ne relèvent plus d'aucune tradition historique et n'ont donc plus de cohérence épistémologique. ne s'inscrivent clairement dans aucune problématique de résolution de problèmes et en conséquence fonctionnent sur des problèmes d'inspiration disparate, voire sur de pures créations didactiques. Ils sont utilisés soit comme outil de démonstration, le plus souvent non nécessaire (voir translation - homothétie), soit comme simple langage démonstratif, et donc dans des cadres où ils ne prennent pas sens. A la lumière de ce qui précède, il ne semble pas abusif d'affirmer que la finalité d'un enseignement des transformations visée par ces programmes n'est pas claire et mériterait d'être réexaminée.

Chapitre Un

EXEMPLE DE COURS SUR LES SIMILITUDES PLANES INDIRECTES ET TRADUCTION COMPLEXE

1.1 Introduction

Dans les classes précédentes, nous avons étudié les transformations du plan tels que les isométries, les homothéties mais aussi les applications affines. L'étude de ces transformations nous ont permis d'étudier les similitudes planes qu'on a défini comme la composée d'une homothétie et d'une ismométrie. La classification des isométries nous a aussi permis de classer les similitudes en deux catégories : les directes et les indirectes du plan. Notre ressource sera focalisée sur **les similitudes indirectes planes et leur traduction complexe**. Ladite notion ne figure pas de façon explicite dans le programme officiel d'enseignement de mathématiques du Cameroun en classe de terminale C. Neanmoins des cas particuliers comme les réflexions et les symétries glissées sont enseignées.

Nos objectifs généraux et spécifiques ici, adaptés par rapport au programme officiel du CONGO sont variés. D'abords de compléter et d'appofondir la notion de similitudes indirectes planes à l'aide des cas particuliers qui sont : les symétries glissées et les réflexions ; d'introduire les complexes afin de donner une écriture affine d'une telle transformation du plan. Nous montrerons que l'on peut aussi définir une similitude indirecte plane comme la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement. L'écriture affine (Complexe) facilitera l'étude des éléments caractéristiques de cette transformation du plan, Par exemple, dans le plan complexe, nous pouvons facilement étudier toute transformation ayant pour expression complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec a, b, z, $z' \in \mathbb{C}$, a non nul et également, passer à l'expression analytique. Elles nous permettent en plus de rechercher les lieux géométriques comme l'ensemble des images d'un point qui décrit un cercle et de démontrer les propriétés comme l'orthogonalité.

Les outils les plus utilisés sont :

1. la notion d'application bijective et de composition des applications ;
2. la notion d'angles orientés ;
3. les homothéties et leurs utilisations ;
4. les isométries du plan et leurs utilisations ;
5. les nombres complexes ;
6. les généralités sur les similitudes ;
7. les similitudes directes planes.

L'étude des similitudes indirectes planes et leur traduction complexe permettent à l'apprenant :

• de connaitre la définition d'une similitude indirecte plane.

• de connaitre et déterminer l'écriture complexe d'une similitude indirecte plane ainsi que l'écriture complexe d'une réflexion.

• de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude indirecte à partir de sa forme complexe et de sa forme analytique.

• de reconnaitre une similitude indirecte plane à partir du nombre de point invariant.

• de connaitre et de déterminer la forme réduite d'une similitude indirecte plane.

Pour aborder aisément cette ressource sur les similitudes indirectes planes et traduction complexe, ces pré-réquis peuvent être révisés dans :

• la ressource sur **les similitudes directes.**

• la ressource sur **les nombres complexes.**

• les cours sur les isométries du plan terminale et prémière.

Le plan complexe $\mathcal{P}$ *est muni du repère orthonormé* $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1.2 Généralité : (1heure)

Dans cette partie, on se propose d'expliciter la notion de transformation du plan ainsi que la composition des applications.

1.2.1 Pré-réquis (40min)

Pour l'atteinte de **l'objectif spécifique 1**, l'élève doit avoir comme **pré-réquis** les résultats suivants :

<u>Savoirs</u> :

résultat 1 Les isométries sont les applications du plan qui conservent les distances.

résultat 2 Toute isométrie qui conserve les angles orientés est appelé **déplacement** et toute isométrie qui ne conserve pas les angles orientés est appelé **antidéplacement**.

résultats 3 Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel différent de 0 et de 1. f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

<u>Savoir faire</u> :

résultat 1 connaitre la définition d'une application bijective.

résultat 2 construire l'image d'une figure par une isométrie ou par une homothétie

résultat 3 connaitre calculer le module, l'argument d'un nombre complexe.

Contrôle des pré-réquis :

1-) Peut-on construire un triangle ABC tel que $AB = 5cm, AC = 3cm, BC = 11cm$? Sinon indiquer la propriété qui n'est pas vérifiée.

2-) Définir : application, application injective, application surjective, application bijective, transformation du plan.

3-) Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $(a > 0)$ de sens direct et de centre O. G est le barycentre du système $(A; 2); (B; 1); (C; -1)$. On note h l'application du plan dans lui même, qui à tout point M associe son image $M' = h(M)$ tel que : $4\overrightarrow{MM'} = 3(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$.

a) Montrer que $\overrightarrow{GM'} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{GM}$.

Quelle est la nature exacte de h ?

b) Construire $A'B'C'$ image du triangle ABC par h, puis comparer les aires des triangles ABC et $A'B'C'$.

c) Existe-t-il un point H barycentre du système $(B; 1); (C; -1)$? Justifier votre réponse.

d) Déterminer la mesure principale des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}); (\widehat{\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}})$

4) Définir isométrie du plan puis donner quelques exemples.

5) Définir similitude directe plane.

6) On donne le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$. Calculer son inverse, son module et son argument et donner sa forme exponentielle.

7) Soit l'application f du plan dans le plan définie par $f(z) = (1 - i\sqrt{3})z + 2i$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

1.2.2 Résultats fondamentaux (20min)

Définition 1 : Une transformation g du plan $\mathcal{P}$ est une bijection du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même. Cela signifie :

1- Qu'à tout point M de $\mathcal{P}$ on associe un unique point $M' = g(M)$ de $\mathcal{P}$.

2- Que pour tout point N de $\mathcal{P}$ il existe un point M de $\mathcal{P}$ tel que $N = g(M)$

Conséquence immédiate :

Par une transformation, deux points distincts ont des images distinctes.

Propriété 1 :

1- Une transformation g admet une transformation réciproque g^{-1} ; elle est définie par $g^{-1}(N) = M$ si et seulement si $g(M) = N$.

2- La composée de deux transformations du plan, g suivie de f, est une transformation du plan, notée $f \circ g$.

Attention : En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

1.3 Définitions :(3 heures)

Dans cette partie, on se propose d'étudier les similitudes planes.

1.3.1 Similitude plane : (1heure 30)

Activité 1 (de l'élève) : Soient $ABCD$ un carré de sens direct, I, J, P et K les milieux respectifs de $[AD]; [BC]; [DC]$ et $[AB]$. On considère h l'homothétie de centre A de rapport $\frac{1}{2}$; $S_{(IJ)}$ la symétrie d'axe (IJ) et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $f = h \circ S_{(IJ)}$ et $g = h \circ r$.

1-) a-) Déterminer $f(A)$; $f(B)$; $f(C)$ et $f(D)$.

b-) Comparez les rapports $\frac{AB}{DC}$ et $\frac{f(A)f(B)}{f(D)f(C)}$.

2-) a-) Construire l'image du carré $ABCD$ par g.

b-) Comparer les rapports $\frac{AD}{BC}$ et $\frac{g(A)g(D)}{g(B)g(C)}$.

Defiition 2 : On appelle similitude plane toute transformation f de $\mathcal{P}$ qui conserve les rapports de distances. C'est-à-dire que pour tous points M, N, P et Q, avec P distinct de Q, d'images respectives M', N', P' et Q' on a : $\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}$.

Remarque 1 : Puisque $PQ \neq 0$ alors $P'Q' \neq 0$ car f est une transformation.

Propriété 2 :

Une transformation f du plan $\mathcal{P}$ est une similitude, si et seulement si, il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points M et N de $\mathcal{P}$, d'images respectives M' et N' par f, on a : $M'N' = k \times MN$. Le nombre réel strictement positif k est appelé rapport de la similitude f.

Démonstration :

Soit f une similitude et deux points distincts A et B d'images A' et B'.

$A' \neq B'$ car f est une transformation.

On pose : $k = \frac{A'B'}{AB}$; par suite $k > 0$.

Etant donnés deux points M et N distincts quelconques de $\mathcal{P}$, et M', N' leurs images par f, alors $M' \neq N'$.

f conserve les rapports de distances, donc $\frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'}$; d'où $\frac{M'N'}{MN} = \frac{A'B'}{AB} = k$ et $M'N' = k \times MN$ quels que soient M et N.

Réciproquement, on suppose qu'il existe un réel k strictement positif tel que pour tous points M et N d'mages respectives M' et N', on a : $M'N' = k \times MN$.

Soient quatre points A, B, C et D avec $A \neq B$ et $C \neq D$, d'images respectives A', B', C' et D'.

$A'B' = k \times AB$ et $C'D' = k \times CD$, donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$.

On en déduit $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$: f conserve les rapports de distances, donc f est une similitude.■

Exemples 1 :

1- Les translations, les symétries axiales, les rotations, l'application identité sont des similitudes de rapport 1 car elle conservent les longueurs.

Une similitude de rapport 1 est appelée isométrie.

2- Une homothétie de rapport $k \neq 0$ est une similitude de rapport $|k|$.

Activité d'institutionalisation 1 (du maître) :

On considère deux triangles équilatéraux OAP et OBQ de sens direct et tels que B est le projeté orthogonal de O sur (AP). s la similitude telle que les points O, A et P ont pour images respectives les points O, B et Q.

a-) Montrer que s est une similitude directe de centre O et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b-) Comparer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}})$ et l'angle image.

<u>Solution</u> :

a-) On a : $s(O) = O; s(A) = B$, donc O est le point invariant. Par suite d'après la propriété 1) $OB = k \times OA$. Donc $k = \frac{OB}{OA}$ or OB est une des hauteur du triangle équilatéral OAP. Considerons le triangle rectangle OAB ; $sin(\widehat{A}) = \frac{OB}{OA}$ or $mes\widehat{A} = 60^{\circ}$ et $sin(60^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

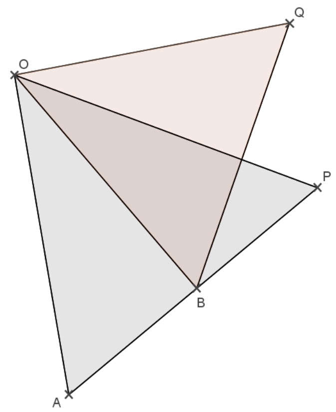
D'où $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Moralité s est une similitude de centre O et de rapport $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b-) Comparaison l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}})$ et l'angle image.

On sait que $s(P) = Q$; donc l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}})$ a pour angle image $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OQ}})$. Or les triangles OAP et OBQ sont semblables par conséquent sont équilateraux et $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OP}}) = (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OQ}}) = \frac{\pi}{3}$

Voir figure ci-dessous



Remarque 2 :

Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable. Elle conserve donc les angles géométriques. On distinguera donc celles qui conservent les angles orientés (**les similitudes directes planes**) et celles qui ne conservent pas les angles orientés (**les similitudes indirectes planes**).

Exemple 2 :

La translation, la rotation et l'homothétie sont des similitudes directes ; les réflexions sont des exemples de similitudes indirectes.

Définition 3 :

1-) Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés.

2-) Une Isométrie qui change les angles orientés en leurs opposés est un **antidéplacement**.

Notre étude sera focalisée sur la notion de **similitudes indirectes planes**.

1.3.2 Similitudes indirectes planes (1heure 30).

Activité 2 : (de l'élève) :

Considerer l'activité 1 et comparer les mesures des angles $(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{f(B)f(C)};\overrightarrow{f(B)f(D)}})$. Puis conclure.

Définition 4 : Toute similitude indirecte plane est une similitude plane qui transforme tout angle orienté en son opposé c'est-à-dire qui ne conserve pas les angles orientés.
C'est-à-dire pour tous points P, Q, R, S, on a : $mes(\widehat{\overrightarrow{f(P)f(Q)};\overrightarrow{f(R)f(S)}}) = -mes(\widehat{\overrightarrow{PQ};\overrightarrow{RS}})$.

Exemple 3 :

Les symétries axiales et les symétries glissées sont des similitudes indirectes planes.

Activité d'institutionnalisation 2.(du maître)

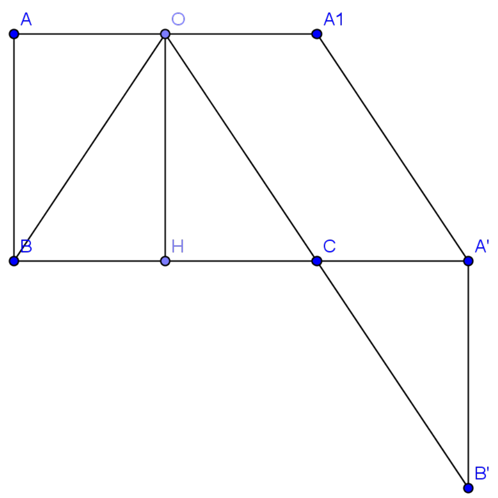
$ABCO$ est un trapèze rectangle tels que OBC est un triangle isocèle. Soient H le projeté orthogonal de O sur $[BC]$, s la symétrie d'axe (OH) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

On pose $g = t \circ s$.

Construire l'image $O'A'B'$ du triangle OAB par la transformation g et en deduire sa nature.

Solution

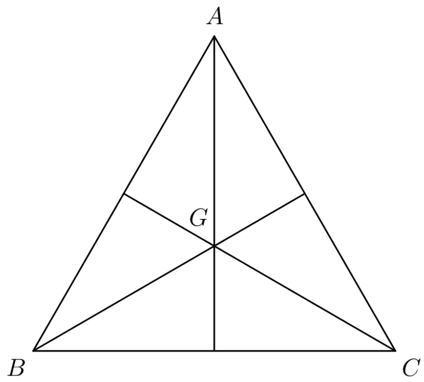
On a : $g(O) = C = O'$; $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$ (voir figure ci-dessous)



Exercice d'application : Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre G et s la **réflexion** d'axe (AG).

a-) Montrer que $s(A)s(B) = AC = AB$ et $s(G)s(B) = GC = GB$ et en deduire que s est une similitude plane.

b-) Comparer les sens du triangle ABG avec celui de son triangle image ACG.



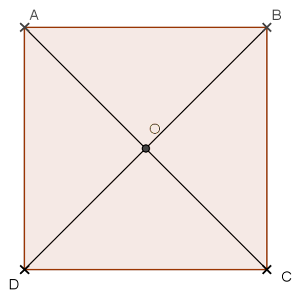
Solution

a-) On a : $s(A) = A$, $s(B) = C$ et $s(G) = G$, c'est-à-dire que $s(A)s(B) = AC = AB$ et $s(G)s(B) = GC = GB$. Donc s multiplie les distances par un nombre réel strictement positif. Ainsi s est une similitude plane. ■

b-) Les triangles ABG et ACG sont de sens opposés.

Exercice(A faire sur feuille à la maison) :

$ABCD$ est un carré de centre O et de sens indirect. Voir figure.



Soient h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{4}$ et s la symétrie d'axe (AC). On pose : $g = h \circ s$.

a-) Construire l'image du carré $ABCD$ par g.

b-) Déduire que g est une similitude plane indirecte.

1.4 Forme réduite d'une similitude indirecte plane : (2heures)

Dans cette partie, on se propose d'étudier la forme réduite d'une similitude indirecte plane.

Activité 3 :(de l'élève)

$ABCD$ est un carré tel que ; P et Q sont des milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$. I et J sont deux points du plan tel que $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AB}$, avec $k \in]0;1[$. On considère la transformation du plan g tel que $g(A) = I; g(C) = J$ et $g(D) = A$.

1- Montrer en utilisant les définitions 2 et 3 que g est une similitude indirecte.

2- Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{k}$.

Montrer que $h \circ g(A) = D$; $h \circ g(C) = B$ et que $h \circ g(D) = A$; puis en déduire que $h \circ g$ est une symétrie d'axe (PQ).

3- En deduire que $g = h' \circ s$ où s est un antidéplacement et h' une homothétie que l'on déterminera.

Propriété 3 :

Toute similitude indirecte plane est la composée d'une réflexion et d'une similitude directe.

Preuve.

- Soit g une similitude indirecte et s la reflexion d'axe Δ. On pose $f = g \circ s$.

f est la composée de deux similitudes, donc f est une similitude. g et s étant indirectes alors f est est une similitude directe.

D'autre part, $f \circ s = (g \circ s) \circ s = g \circ s \circ s = g \circ id = g$ car $s \circ s = id$ puisque s est une involution.

- La composée d'une réflexion quelconque et d'une similitude directe est une similitude indirecte puisque la réflexion est une similitude indirecte de rapport 1.■

Proposition 1 :

Soit k un réel strictement positif et g une similitude indirecte de rapport k.

(i) Si g n'admet aucun point invariant, alors g est une symétrie glisée.(cf activité d'institutionnalisation.2).

(ii) Si g admet un seul point invariant Ω, alors g est la composée d'une symétrie (axiale ou glissée) et d'une homothétie de rapport différent de 1 (cf Activité3).

(iii) Si g a trois points invariants non alignés alors g est l'indentité.

(iv) Si g admet une infinité de points invariants alors g est soit une réflexion soit l'identité. (En fait deux points invariants suffisent à faire d'une similitude indirecte une symétrie axiale.)

Preuve :

(iii) Soit g une similitude admettant trois points invariants A, B et C non alignés. Ainsi $g(A) = A; g(B) = B; g(C) = C$. g est une isométrie car son rapport est $\frac{AB}{AB}$ égal à 1.

S'il existe un point M tel que $M' = g(M) \neq M$, puisque g conserve les distances, $AM = AM'; BM = BM'$ et $CM = CM'$. Les points A, B et C sont les points de la médiatrice du segment $[MM']$. Ils sont dont alignés. ce qui contredit le fait que A, B et C sont non alignés. Ainsi pour tout point M on a $g(M) = M$; g est l'identité id.

(iV) Sans nuire à la généralité ; supposons g une similitude admettant deux points invariants distincts $AetB$. g est une isométrie car son rapport est 1 comme vu précédemment. Soit C un point n'appartenant pas à (AB) et $C' = g(C)$.

Si $C = C'$, alors g admet trois points invariants non alignés et g est l'identité.

Si $C \neq C'$, alors $AC = AC'$ et $BC = BC'$; la droite (AB) est la médiatrice de $[CC']$. Soit s la symétrie d'axe (AB) et f la similitude $s \circ g$. $s \circ g(A) = A$ car $A \in (AB)$; $s \circ g(B) = s(B) = B$ car $B \in (AB$; $s \circ g(C) = s(C') = C$ car C et C' sont symétrique par rapport à (AB). Donc $s \circ g$ est une similitude qui admet trois points invariants. Donc $s \circ g = id$. Par suite, $s \circ (s \circ g) = s \circ id$. Comme $s \circ s = id, g = s$.■

Remarque 3.

Si g n'est pas l'identité du plan, et si g admet au moins deux points invariants P et Q, alors la droite (PQ) est l'ensemble des points invariants.

L'application g est déterminer par la donnée de k, de l'axe de symétrie,d'un ou deux points invariants.

Définition 5.

Si k est différent de 1 , (Δ) l'unique droite passant par Ω la décomposition de $h_{(\Omega,k)} \circ s_{(\Delta)}$ ou tout simplement de $h \circ s$ ou de $f \circ s$ est appelée **forme réduite de** g. f etant une similitude directe et Ω le centre de h.

Exercice d'application : Soit $OABC$ et $OCDE$ deux carrées de sens directe de coté 1. On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[OC]$. Le segment $[AD]$ coupe le segment $[IE]$ au point H. On note R et Q les milieux respectifs de $[DE]$ et $[IE]$.

1-) Montrer que les droites (AD) et (EI) sont perpendiculaires.

2-) Soit s la similitude directe qui transforme A en I et D en E.

a-) Trouver l'angle et le rapport de s.

b-) Justifier que $HE = 2HD$. Justifier que H n'est pas le centre de s.

c-) Soit Ω le centre de s. Justifier que Ω, H, I et A sont cocycliques. Justifier que Ω, H, D et E sont cocycliques. Contruire Ω.

3-) Soit S_{OD} la symetrie orthogonale d'axe (OD). On pose : $g = S_{(OD)} \circ s$

a-) Déterminer $g(A); g(D)$ et $g(B)$

b-) Montrer que g est une similitude indirecte et déterminer son rapport.

Solution :

1-) Démontrons que les droites (AD) et (EI) sont perpendulaires.

Posons : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EO}$. On a : $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EO} = 0$. Donc les droites (AD) et (EI) sont perpendiculaires.

2- a) Trouvons l'angle et le rapport de s.

On a : $s(A) = I; s(D) = E$ et d'après la propriété fondamentale d'une similitude directe, on a : $k = \frac{IE}{AD}$ et $\alpha = mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{IE}}) = \frac{\pi}{2}$. Or $IE = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $AD = \sqrt{5}$ d'où $k = \frac{1}{2}$. Moralité s est une similitude directe de rapport $k = \frac{1}{2}$ et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$

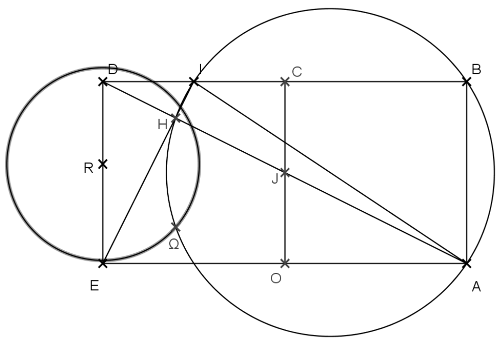
b-) Justifions que $HE = 2HD$ et que H n'est pas le centre de s.

Considérons les triangles rectangles EDI et EHD ; on a : $tan\widehat{E} = \frac{DH}{HE} = \frac{ID}{DE} = \frac{1}{2}$

donc $\frac{DH}{HE} = \frac{1}{2} \Longrightarrow HE = 2HD$.

Justifions que H n'est pas le centre de s.

Supposons que H est le centre de s alors $s(H) = H$ et $HI = \frac{1}{2}HA$ ce qui est absurde. Donc H n'est pas le centre de s.



c-) Soit Ω le centre de s, justifions que Ω, H, I et A sont cocycliques.

$s(A) = I \Longleftrightarrow I\Omega = \frac{1}{2}A\Omega$ et $\widehat{\overrightarrow{I\Omega}, \overrightarrow{A\Omega}} = \frac{\pi}{2}$ donc le triangle $AI\Omega$ est rectangle en Ω par conséquent les points A, I et Ω appartiennent au cercle de diamètre $[AI]$.

De plus le triangle AHI est rectangle en H par conséquent les points A, H et I appartiennent au cercle de diamètre $[AI]$. Moralité les points A, I, Ω et H appartiennent au cercle de diamètre $[AI]$ d'où ils sont cocycliques.

Justifions que les points Ω, H, D et E sont cocycliques.

$s(D) = E$ donc le triangle $DE\Omega$ est rectangle en Ω, par conséquent les points Ω, D et E appartiennent au cercle de diamètre $[ED]$. De plus HDE est un triangle rectangle en H, par conséquent les points H, D et E appartiennent au cercle de diamètre $[ED]$.

Moralité les points Ω, H, D et E appartiennent au cercle de diamètre $[ED]$ c'est-à-dire sont cocycliques.

Construction de Ω.

Ω est égal à l'intersection des cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ où $(\mathcal{C})$ est le cercle de diamètre $[AI]$ et $(\mathcal{C}')$ est le cercle de diamètre $[ED]$.

3-) Soit $S_{(OD)}$ la symetrie orthogonale d'axe (OD). On pose : $g = S_{(OD)} \circ s$

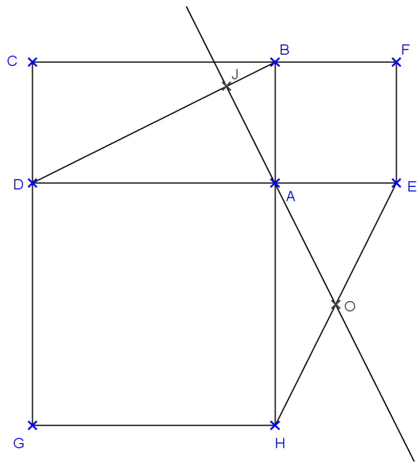
a-) $g(A) = S_{(OD)}(I) = R$; $g(D) = S_{(OD)}(E) = C$ et $g(B) = S_{(OD)}(D) = D$

b-)Montons que g est une similitude indirecte.

g est la composée d'une similitude directe suivie d'une symétrie d'axe (OD) donc g est une similitude indirecte. De plus l'image par g du triangle ABD de sens direct est le triangle RCD qui est de sens indirect. D'autre part le rapport de g est le même que celui de s car $k = \frac{RD}{DC} = \frac{1}{2}$.

<u>Exercice</u>(A faire à la maison) :

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de sens direct, $AEFB$ et $ADGH$ sont des carrés de sens directs.



Le but de l'exercice est de démontrer que $ADGH$ est l'image de $AEFB$ par une similitude indirecte s.

1-) On veut montrer que la médiane issue de A dans le triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu de $[EH]$

a-) Exprimer $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.

b-) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$

c-) Calculer $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD}$ et conclure.

2-) Soient L et K les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[GD]$; s la similitude indirecte qui tranforme A en A , L en K. On pose $AB = 2$ et $AD = 4$

a-) Déterminer le rapport de s.

b-) $s(E) = G$. Déterminer les images des points F, B par s et en déduire que s est la composée de la symétrie orthogonale d'axe (AO) suivie de l'homothétie de centre A de rapport 2.

1.5 Traduction complexe des similitudes indirectes planes. (4 heures)

Dans cette partie, on se propose d'étudier les applications affines dans le plan complexe $\mathcal{P}$ de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$, où a et b des complexes et de donner une caractérisation de similitudes indirectes à partir du nombre de points invariants.

1.5.1 Pré-requis : (30min)

L'élève doit avoir comme pré-réquis les résultats suivants :

<u>Savoirs</u> :

résultat 1 : L'écriture complexe d'une homothétie de rapport k est : $z' = kz + b$ où k est un réel non nul et different de 1 ; b un complexe.

résultat 2 : L'écriture complexe d'une symétrie orthogonale d'axe des abscisses est : $z' = \overline{z}$

<u>Savoirs faire</u> :

résultat 1 reconnaitre et connaitre l'écriture complexe d'une homothétie ; d'une réflexion et d'une similitude directe.

résultat 2 connaitre calculer le module d'un nombre complexe.

résultat 3 être capable de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude indirecte plane.

résultat 4 être capable de caractériser une similitude indirecte plane à partir du nombre de points invariants ou fixes.

<u>Activité 4 : (de l'élève)</u> Soit g une similitude indirecte de rapport $|k|$. g est la composée d'un antidéplacement (symétrie axiale, symétrie glissée) f et d'une homothétie h de rapport k.

1-) Démontrer que l'expression complexe de h est $h(z) = kz + d$ où k est le rapport de l'homothétie (donc un nombre réel non nul) et d un nombre complexe quelconque.

2-) Démontrer que l'écriture complexe de la réflexion l'axe des abscisses est $s(z) = \overline{z}$.

3-) On admet que l'espression complexe de tout antidéplacement s'écrit sous la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$, a et b des complexes, le module de a est égal à 1. En déduire une éciture l'expression complexe de g.

4-) Démontrer que l'on retrouve la même expression complexe lorsque $g = f \circ s$ où f est une similitude directe d'expression complexe $f(z) = az + b$.

1.5.2 Résultats fondamentaux : (1h30 min)

Théorème 1 : Soit g une transformation du plan. g est une similitude indirecte plane de rapport k si et seulement si g admet une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$, a et b des complexes.

Démonstration :

Soit g une similitude indirecte de rapport k. D'après la propriété3, quelque soit la droite (Δ), g peut s'écrire : $g = f \circ s$ où f désigne une similitude directe.Prenons pour Δ l'axe des abscisses, alors s a pour écriture complexe : $z'=\overline{z}$. De plus, f similitude directe a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ avec a non nul. En outre f a pour rapport $|a|$. l'écriture de g est donc : $g = f \circ s$ et pour tout point M d'affixe z d'image M' par g d'affixe z' on a : $z' = a\overline{z} + b$.

De plus le rapport de la composée est egal au produit des rapports : $k = |a| \times 1$.

Réciproquement : soient a et b deux nombres complexes. Montrons que toute transformation g admettant une expression complexe : $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude indirecte de rapport k.

Soient M et N deux points quelconques du plan d'images respectives M' et N' par g.

$z_{N'} = a\overline{z_N} + b$ (1)

$z_{M'} = a\overline{z_M} + b$ (2)

De (1)-(2) donne on a : $z_{N'} - z_{M'} = a(\overline{z_N} - \overline{z_M})$

. D'où : $|z_{N'} - z_{M'}| = |a||\overline{z_N - z_M}|$. Donc $|z_{N'} - z_{M'}| = |a||z_N - z_M|$. D'où : $M'N' = |a|MN$, et $a \neq 0$ donc g est une similitude de rapport $k = |a|$.

Rajoutons deux points P et Q d'images respectives P' et Q'. Nous avons comme précédemment : $z_{P'} - z_{Q'} = a(\overline{z_P} - \overline{z_Q})$. $(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{PQ}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{MN}) = arg(z_Q - z_P) - arg(z_N - z_M) = arg[\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}]$.

Or $(\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'})$ $=arg(\frac{z_{Q'} - z_{P'}}{z_{N'} - z_{M'}}) = arg[\frac{a(\overline{z_Q} - \overline{z_P})}{a(\overline{z_N} - \overline{z_M})}]$ $=arg(\frac{\overline{z_Q} - \overline{z_P}}{\overline{z_N} - \overline{z_M}})$ car a non nul.

$=arg(\overline{\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}})$

$= arg[\overline{\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M}}]$

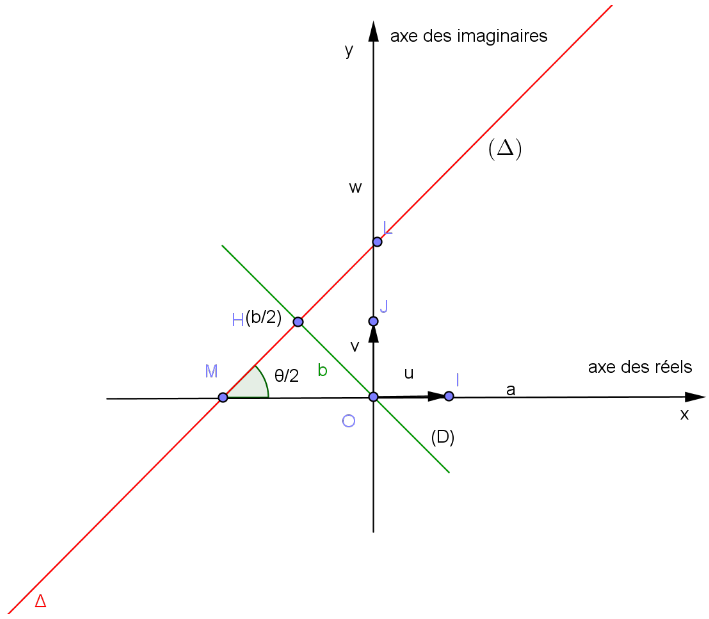
$=-arg(\frac{z_Q - z_P}{z_N - z_M})$.

D'où $(\overrightarrow{M'N'}; \overrightarrow{P'Q'})$ $=-(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{PQ}) + 2k\pi$.

g est une similitude qui tranforme tout angle orienté en son opposé, elle est donc indirecte.■

Proposition 2 :

Toute symétrie σ d'axe Δ a pour expression complexe $\sigma(z) = e^{i\theta}\overline{z} + b$ où $\frac{\theta}{2}$ est **l'angle polaire** de (Δ) (ou "inclinaison" de Δ par rapport à l'axe des réels, voir figure ci-dessous), et $\frac{b}{2}$ est l'affixe du pied H de la perpendiculaire (D) menée de l'origine O du repère sur la droite(Δ).



Proposition 3 :

Toute similitude indirecte plane g est une tranformation du plan.

Preuve : En effet, g admet une expression complexe de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec a et b des nombres complexes et a non nul. Donc g est une application affine du plan. Ainsi, g est une application bijective du plan c'est-à-dire une transformation du plan (confère définition 1). ■

1.5.3 Similitudes indirectes et leurs points fixes : (2heures)

A l'instar des similitudes directes, les similitudes indirectes admettent peut-être des points fixes ? D'ailleurs, peut-être est-il possible de les caractériser par ce biais ? Autant de "peut-être" qui ne sont toutefois pas des certitudes. Une enquête s'impose ! Nous allons travailler avec la sémillante similitude indirecte g dont une expression complexe est $g(z) = a\overline{z} + b$ où a est un nombre complexe non nul. Entamons les manoeuvres !

M d'affixe z est un point fixe de $g \iff g(z) = z \iff a\overline{z} + b = z$.

Là plusieurs cas peuvent se présenter suivant la valeur du module de a.

$\triangle$) Si le module de a est égal à 1 alors la similitude g est une simple isométrie. Plus précisément, c'est un antidéplacement. Son expression complexe nous laisse alors le choix entre une **symétrie**

axiale et une **symétrie glissée**.

• Si g est une réflexion (ou symétrie axiale) alors l'ensemble des points fixes de g est une droite : c'est l'axe de symétrie.

• Si g est une symétrie glissée alors g n'a aucun point fixe.

△) Si le module de a est différent de 1 alors la similitude n'est pas une isométrie. Il faut alors procéder différemment. Tout le problème est d'arriver à résoudre l'équation $f(z) = z$.

Si M d'affixe z est un point fixe de g alors $g(z) = z \iff a\overline{z} + b = z$.

Conjuguons cette égalité : $\overline{z} = \overline{a\overline{z} + b} = \overline{a}\ \overline{\overline{z}} + \overline{b} = \overline{a}z + \overline{b}$

Résumons ce que nous avons :

Si $g(z) = z$ alors $a\overline{z} + b = z$ et $\overline{a}z + \overline{b} = \overline{z}$. Nous décidons d'injecter la seconde égalité dans la première.

Si $g(z) = z$ alors $a[\overline{a}z + \overline{b}] + b = z \iff a\overline{a}z + a\overline{b} + b = z \iff a\overline{b} + b = (1 - |a|^2)z \iff z = \frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$ car $|a| \neq 0$.

Attention ! Ce qui précède ne veut pas dire que l'équation $g(z) = z$ admet une unique solution. Non, cela signifie que si elle a des solutions alors il n'y en a qu'une et que c'est $\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$.

Il reste à vérifier $\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$ est effectivement une solution de l'équation $g(z) = z$. En calculans son image par g ;on obtient : $g(\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}) = \frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$

Donc $\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$ est bien une solution de l'équation $g(z) = z$. Et c'est la seule.

Ainsi, la similitude indirecte $g(z) = a\overline{z} + b$ admet-elle un unique point fixe F qui a pour affixe $\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$

Conclusion : Une similitude indirecte peut avoir :

• Aucun point fixe. A ce moment-là, c'est une symétrie glissée.

• Avoir un unique point fixe. Elle est alors la composée d'une symétrie (axiale ou glissée) et d'une homothétie (ou similitude directe) de rapport différent de 1.

• Avoir une infinité de points fixes. C'est alors une réflexion. (En fait deux points fixes suffisent à faire d'une similitude indirecte une symétrie axiale).

Théorème 2 : Toute similitude ayant deux points fixes est soit l'identité, soit une symétrie axiale.

Preuve. Soit s une similitude indirecte, ayant deux points fixes I et J ($I \neq J$), d'affixes respectifs z_I ; z_J.

D'après la propriété 3, s est la composée de la symétrie σ d'axe (IJ) et d'une similitude directe f, donc $s = f \circ \sigma$. D'où $s \circ \sigma = (f \circ \sigma) \circ \sigma = f$. Alors $f(I) = (s \circ \sigma)(I) = s[\sigma(I)] = s(I) = I$

et $f(J) = (s \circ \sigma)(J) = s[\sigma(J)] = s(J) = J$. Par suite f est une similitude directe ayant deux points fixes, donc f est l'identité du plan. Ainsi $s = \sigma$ et s est symétrie axiale.■

Proposition 4 :

Soit g une similitude indirecte d'expression complexe : $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

(i) Le rapport de g est le module de a.

(ii) Selon le rapport on a :

• Si le module de a est 1,il s'agit d'une symétrie ou d'une symétrie glissée.

$*$ Si $a\overline{b} + b = 0$, c'est une réflexion d'axe passant par $B(b/2)$ et de direction $\overrightarrow{u}(1 + a)(ou\overrightarrow{u}(i)$ si le vecteur précédent est nul).

$*$ Si $a\overline{b}+b \neq 0$, c'est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{v}(\frac{a\bar{b}+b}{2})$ et d'axe passant par $B(\frac{b-a\bar{b}}{4})$ et de direction $\overrightarrow{u}(1+a)(ou\overrightarrow{u}(i)$ si le vecteur précédent est nul).

• Si le module de a est différent de 1, il s'agit de la composée d'une homothétie de rapport $|a|$, de centre I d'affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ avec une réflexion d'axe passant par I et de direction $\overrightarrow{u}(1 + \frac{a}{|a|})(ou\overrightarrow{u}(i)$ si le vecteur précédent est nul).

Remarque 4 :

• Une similitude indirecte n'ayant pas d'angle, on ne peut rien dire sur l'argument de a.

• Si l'on connait deux points distincts $A(z_A)$ et $B(z_B)$ et leurs images distinctes $A'(z_{A'})$ et $B'(z_{B'})$, on peut déterminer les valeurs de a et b : $a = \frac{z_{A'}-z_{B'}}{\overline{z_A}-\overline{z_B}}$ et $b = z_{A'} - a\overline{z_A}$.

Définition 6 La proposition 4 permet de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude indirecte plane.

Activité d'institutionnalistion 3 (du maître)

1-) Donner l'expression complexe de la similitude indirecte plane de rapport 2, de centre $I(2; -1)$ d'axe (Δ) dirigé par $\overrightarrow{u}(1; 1)$.

2-) Etudier les transformations f ; g ; et h définie de $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par : $f(z) = (1 - i\sqrt{3})\overline{z} - 1 + i$; $g(z) = (\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})\overline{z} + 1 + 2i$. et $h(z) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})\overline{z} - 1 + 2i$.

Solution :

1-) Le module de a est different de 1, il s'agit de la composée d'une homothétie de rapport 2, de centre $z_I = 2 - i = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ avec une réflexion d'axe passant par I et de direction $\overrightarrow{u}(1 + \frac{a}{2})$. Or $\overrightarrow{u}(1 + \frac{a}{2}) = \overrightarrow{u}(1 + i)$ donc $a = 2i$. D'autre part, $z_I = 2 - i = \frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ c'est-à-dire $2 - i = \frac{a\bar{b}+b}{3}$ c'est-à-dire $-6 + 3i = 2i\overline{b} + b$.

Posons : $b = x + iy$. On a :$-6 + 3i = 2i(x - iy) + x + iy \Longleftrightarrow x + 2y + i(2x + y) = -6 + 3i \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} -6 = x + 2y \\ 3 = 2x + y \end{cases}$. On obtient comme solution $x = 4$ et $y = -5$. Donc $b = 4 - 5i$.

L'expression complexe de cette similitude indirecte est : $z' = 2i\overline{z} + 4 - 5i$

2-) Etude des transformations :

• $f(z) = (1 - i\sqrt{3})\overline{z} - 1 + i$. $a = 1 - i\sqrt{3}$ le module de a est égal à $2 \neq 1$ donc f est la composée d'une homothétie de rapport 2 avec une réflexion d'axe (Δ).

$z_{\overrightarrow{u}} = 1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. C'est-à-dire : $\overrightarrow{u}(\frac{3}{2}; \frac{-\sqrt{3}}{2})$ et de centre $z_I = \frac{(1-i\sqrt{3})(-1-i)-1+i}{1-2^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{3}$. (Δ) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Une équation cartésienne de la droite (Δ) est : $3\sqrt{3}x + 9y - 5\sqrt{3} + 3$

• $g(z) = (\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})\overline{z} + 1 + 2i$. $a = (\frac{3}{5} + i\frac{4}{5})$;le module de a est égal à 1 ; de plus $a\overline{b} + b = \frac{16}{5} + i\frac{8}{5} \neq 0$ donc g est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{v}(\frac{8}{5} + i\frac{4}{5})$ et d'axe passant par $B(\frac{b-a\overline{b}}{4})$ c'est-à-dire $B(-\frac{3}{10} + i\frac{6}{5})$ et de direction $\overrightarrow{u}(1 + a)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{u}(\frac{8}{5} + i\frac{4}{5})$

• $h(z) = (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})\overline{z} - 1 + 2i$. Le module de a est 1 de plus $a\overline{b} + b = \frac{\sqrt{2}-2}{2} + i\frac{2-3\sqrt{2}}{2} \neq 0$ donc h est une symétrie glissée. On raisonne de la même façon que précédement.

<u>Activité d'institutionnalisation 4 (du maître)</u>

Soient les points $A(2 + i)$ et $B(-1 - i)$. Soit $A'(2i)$ et $B'(i)$ images respectives des points A et B par une similitude indirecte g. Donner l'ecriture complexe de g et déterminer ses éléments caractéristiques.

<u>Solution</u> Déterminons l'écriture complexe de g et ses éléments caractéristiques.

D'après la remarque 3 ; $a = \frac{z_{A'} - z_{B'}}{\overline{z_A} - \overline{z_B}}$ et $b = z_{A'} - a\overline{z_A}$ c'est-à-dire $a = \frac{2i-i}{2+i+1+i} = \frac{i}{3+2i} = \frac{2}{13} + i\frac{3}{13}$ et $b = 2i - \frac{(2+3i)(2-i)}{13} = -\frac{7}{13} + i\frac{22}{13}$. L'écriture complexe est : $g(z) = \frac{2+3i}{13}\overline{z} + \frac{22i-7}{13}$. On utilise la même méthode qu'à l'exemple2 pour trouver les éléments caractéristiques de g.

1.6 Propriétés des similitudes indirectes planes : (2heures)

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier l'existence, l'unicité d'une similitude indirecte plane tel qu'à tous points A et B dinctincts du plan on associe les points A' et B' distinctes respectivement ainsi que la nature et les éléments caractéristiques de la composition desdites similitudes.

<u>Pré-réquis</u> :

connaitre l'utilisation de la notion de transformation du plan ainsi que l'utilisation de la composition d'application.

1.6.1 Existence et unicité d'une similitude indirecte

Activité 6 : (de l'élève)

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. En utilisant l'écriture complexe des similitudes indirectes planes, montrer qu'il existe une unique similitude indirecte plane g tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$

<u>Théorème 3 :</u>

Soient A,B, A' et B' quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude plane g telle que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

Preuve : Confère **preuve Théorème 1 (Réciproque) et le paragraphe Similitudes indirectes planes et leurs points fixes**.

Caractérisation du théorème 3. Le rapport k est donné par $\frac{A'B'}{AB}$

1. Si le rapport est 1, il s'agit d'une symétrie ou d'une symétrie glissée. En construisant le triangle $A'B'A"$ indirectement semblable au triangle ABA', on peut construire la point A_1 milieu de $[AA"]$.
   ◦ Si le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA_1}$ est nul, la similitude est une réflexion d'axe (d). Si A et B sont invariants , cet axe est la droite (AB), sinon cet axe est la médiatrice de [AA'] ou de [BB'].
   ◦ Si le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA_1}$ est non nul, la similitude est alors la composée commutative de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et d'une réflexion d'axe (d) passant par le milieu de $[A'A_1]$ et de direction $\overrightarrow{u}$.
2. Si ce rapport est différent de 1, le centre I de la similitude peut se construire géométriquement. La similitude est alors la composée commutative d'une homothétie de centre I et de rapport k et d'une réflexion d'axe (d). Cet axe peut se construire comme la bissectrice de l'angle $\widehat{AIA'}$ ou de l'angle $\widehat{BIB'}$.

1.6.2 Composition des similitudes indirectes

Activité 7 : (De l'élève)

Soient g et g' deux similitudes indirectes planes d'expressions complexes respectives : $z' = a\overline{z}+b$ et $z' = a'\overline{z} + b'$ avec $a \neq 0; a' \neq 0$, $a, a'b$ et b' des complexes.

Déterminer l'expression complexe de la composée $g \circ g'$ puis en déduire sa nature et ses éléments caractéristiques.

Théorème 4. La composée de deux similitudes indirectes planes est une similitude directe.

Preuve Activité 7.

Remarque : l'ensemble des similitudes indirectes n'est donc pas stable pour la composition des fonctions.

A chaque similitude indirecte correspond une unique application complexe. Ces formes complexes vont nous rendre un dernier service. Grâce à elles, nous pouvons dire qu'il existe autant de similitudes indirectes que de similitudes directes. En effet, à la similitude directe $f(z) = a.z + b$ correspond son âme sœur indirecte $g(z) = a.\overline{z} + b$.

Activité d'institutionnalisation 5 (de l'élève)

En considerant les similitudes indirectes f et g de **l'activité d'institutionnalisation 3**, déterminer l'expression complexe de la composée $f \circ g$. En détuire la nature et les éléments caractéristiques de cette composéé.

1.7 Expression analytique d'une similitude indirecte plane : (1heure)

Dans cette partie, on se propose d'étudier une similitude indirecte plane à partir de son expression analytique.

Pré-réquis :

Connaitre établir l'expression analytique d'une homothétie ainsi que celle d'une similitude directe plane et celle de la composition des applications. L'élève doit connaitre établir une expression analytique d'une similitude indirecte plane connaissant sa forme complexe, mais aussi de retrouver la forme complexe connaissant la forme analytique.

Activité 8 (de l'élève) Soit g une similitude directe d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$. En posant $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $a = \alpha + i\beta$ et $b = m + in$ avec x, x', y, y', α, β, $m, n \in \mathbb{R}$ et $(\alpha;\beta) \neq (0;0)$ démontrer que $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + m \\ y' = \beta x - \alpha y + n \end{cases}$.

Définition 7 :

Soient x, x', y, y', α, β, m, $n \in \mathbb{R}$ et $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Le système $\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + m \\ y' = \beta x - \alpha y + n \end{cases}$ est appelé **expression analytique** de la similitude indirecte plane f.

Activité d'institutionnalisation 6 (du maître)

1-) Déterminer l'expression analytique de la similitude indirecte plane s définie par $z' = (1-2i)\overline{z} - 3 + i$.

2-)Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la similitude indirecte plane s dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} \end{cases}$.

Solution :

1-) Déterminons l'expression analytique de la similitude indirecte plane s définie par $z' = (1-2i)\overline{z} - 3 + i$.

Pose : $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$. On a : $x' + iy' = (1-2i)(x+iy) - 3 + i = x + iy - 2ix + 2y - 3 + i = (x + 2y - 3) + i(-2x + y + 1)$ donc $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$.

2-) Déterminons l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la similitude indirecte plane s dont l'expression analytique est $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} - y - \sqrt{3} \end{cases}$.

$x' + iy' = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(z - \overline{z}) + 2\sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(z + \overline{z}) - \frac{1}{2}(z - \overline{z}) - i\sqrt{3}$
$= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} - i\frac{\sqrt{3}}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{z} + 2\sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{z} - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} - i\sqrt{3}$
$= \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}z + i\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{z} + 2\sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z} - i\sqrt{3}$
$= (1 + i\sqrt{3})\overline{z} + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

D'où l'expression analytique : $z' = (1 + i\sqrt{3})\overline{z} + 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$

*É***léments Carctéristiques de** s : l'expression complexe de s est $z' = a\overline{z} + b$ où $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3} + i\sqrt{3}$. Le module de $a = 2 \neq 1$ et d'après la proposition 4, s est la composée d'une homothétie de rapport 2, de centre Ω d'affixe $\frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2} = -1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2i$ avec une réflexion d'axe passant par Ω et de direction $\overrightarrow{u}$ d'affixe $\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$

Méthode :

1. Pour passer de l'expression complexe à l'expression analytique d'une similitude indirecte plane, on peut poser $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, regrouper dans chaque membre la partie réelle et la partie imaginaire et les identifier.

2. Pour l'inverse, on peut soit poser $z' = x' + iy'$ et remplacer x' et y' en fonction de x et y, soit remplacer x par $\dfrac{z + \overline{z}}{2}$, y par $\dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ et développer l'expression obtenue en fonction de z et z'.

1.8 Applications des similitudes indirectes planes : (6 heures)

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier les similitudes indirectes planes et configuration du plan mais aussi d'étudier comment on peut utiliser les similitudes indirectes planes pour rechercher les lieux géométriques, de démontrer les propriétés et construire une figure.

1.8.1 Similitudes indirectes et configurations du plan : (3 heures 30)

Activité 9 : (de l'élève) : Soit g une similitude indirecte plane d'expression complexe $z' = a\overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ A et B deux points du plan d'images respectives A' et B'.

1) Démontrer que les images de trois points alignés sont trois points alignés. En déduire que :
   i) une droite a pour image une droite ;
   ii) g conserve les intersections ;
   iii) le segment $[AB]$ a pour image le segment $[A'B']$ de longueur kAB.
2) En utilisant la définition de similitude indirecte plane et la question 1), démontrer que le milieu du segment $[AB]$ a pour image le milieu du segment $[A'B']$.
3) En utilisant la définition de similitude indirecte plane, démontrer que :
   i) des droites orthogonales ont pour images des droites orthogonales ;
   ii) des droites parallèles ont pour images des droites parallèles.
4) Démontrer que le cercle de centre O et de rayon r a pour image le cercle de centre $g(O)$ et de rayon kr.
5) s multiplie les aires par k^2.

Théorème 5 : Soit g une similitude indirecte plane ; A et B deux points du plan d'images respectives A' et B', k et θ des nombres réels avec $k > 0$. Alors, g possède les propriétés suivantes.

1. g conserve de plus, par définition, les rapport de distances donc g conserve le milieu et plus généralement le barycentre.
2. g conserve l'alignement, donc :
   - ♢ l'image d'une droite est une droite ;
   - ♢ g conserve les intersections ;
   - ♢ l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ de longueur kAB.

3. g conserve les angles géométriques donc s conserve l'orthogonalité et le parallélisme.
4. L'image du cercle de centre O et de rayon r est le centre de centre $g(O)$ et de rayon kr.

Preuve : g a pour forme réduite $f \circ s$ où f est une homothétie ou une similitude directe et s un antidéplacement quelconque. Comme f et s conservent l'alignement, il en est de même pour g, d'où le 1) et 2). 3) et 4) sont les conséquences directes de la définition des similitudes planes.

Activité d'institutionnalisation 7 : (du maître)

on considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

On considère les points A, B et C définis par leur affixe : $A(-i)$; $B(i)$ et $C(4-i)$.

On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

Partie A

1. a) Trouver l'écriture complexe de la similitude plane indirecte f pour laquelle le point A est invariant et $f(B) = C$. (On admet que f existe et qu'elle est unique).

b) Déterminer l'ensemble des points invariants de f.

c) Soit $D = f(C)$, M le milieu du segment $[BC]$ et $N = f(M)$.

Calculer les affixes des points D et N et montrer que les droites (AN) et (BC) sont orthogonales.

2. Déterminer l'écriture complexe de $f \circ f$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

Partie B : Les résultats obtenus dans la partie A peuvent être appliqués sans avoir à les justifier de nouveau.

1. Montrer, sans utiliser les nombres complexes, que le point N est le milieu du segment $[CD]$.

2. a) Montrer que l'image de la droite (AN) par f est la droite (AM).

b) En déduire que les droites (AM) et (CN) sont orthogonales.

c) Que représente le point M pour le triangle ACN ? Justifier.

Solution :

Partie A

1. a) Trouvons l'écriture complexe de la similitude plane indirecte f pour laquelle le point A est invariant et $f(B) = C$. (On admet que f existe et qu'elle est unique). L'écriture complexe d'une similitude indirecte est de la forme : $z' = a\overline{z} + b$, où a et b sont deux nombres complexes qu'il faut calculer. En remplaçant, on obtient le système :

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = C \end{cases} \iff \begin{cases} ai + b = -i \\ a(-i) + b = 4 - i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2i \\ b = 2 - i \end{cases}.$$

L'écriture complexe de f est : $z' = 2i\overline{z} + 2 - i$

b) Déterminons l'ensemble des points invariants de f. Un point d'affixe Ω est invariant par f si, et seulement si, $f(\Omega) = \Omega$. On pose $z = x + iy$, ce qui donne :

$$x+iy = 2i(x-iy)+2-i \iff x+iy = 2y+2+i(2x-1) \iff \begin{cases} x = 2y+2 \\ y = 2x-1 \end{cases} \iff (x; y) = (0; -1).$$

Le seul point invariant est A.

c) Soit $D = f(C)$, M le milieu du segment $[BC]$ et $N = f(M)$. Calculons les affixes des points D et N et montrons que les droites (AN) et (BC) sont orthogonales.

L'affixe de D est : $2i(4 + i) + 2 - i = 7i$ L'affixe de M est 2 et par suite l'affixe de N est $2i(2) + 2 - i = 2 + 3i$.

On a alors $\overrightarrow{AN}(2; 4)$ et $\overrightarrow{BC}(4; -2)$. Leur produit scalaire est$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BC} = 8 - 8 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{BC}$ snt donc orthogonaux, les droites (AN) et (BC) sont orthogonales.

2. Déterminons l'écriture complexe de $f \circ f$ et déduissons la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.

Soit $L(z)$, $L_1(z_1)$ son image par f et $L'(z')$ l'image de L_1 par f. L' est donc l'image de L par $f \circ f$. On a :

$z_1 = 2i\overline{z} + 2 - i$ et $z' = 2i\overline{z_1} + 2 - i$, ce qui donne :

$z' = 2i(\overline{2i\overline{z} + 2 - i}) + 2 - i = 2i(-2iz + 2 + i) + 2 - i = 4z + 3i$.

L'écriture complexe de $f \circ f$ est : $z' = 4z + 3i$.

Comme A est invariant par f, il est aussi invariant par $f \circ f$. Pour tout point $L(z)$ d'image $L'(z')$ par $f \circ f$ on a : $z' - (-i) = 4z + 3i - (-i) = 4(z - (-i))$. Il en résulte que $f \circ f$ est l'homothétie de centre A et de rapport 4.

Partie B

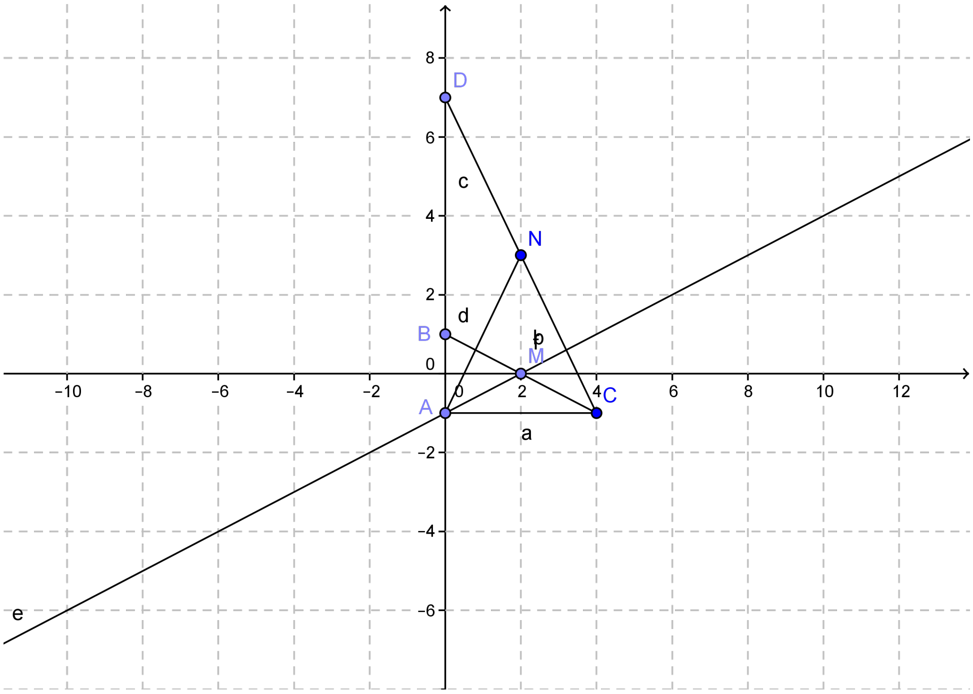
1. Montrons, sans utiliser les nombres complexes, que le point N est le milieu du segment $[CD]$. Comme une similitude conserve les milieux, l'image par f du milieu M de $[BC]$ est le milieu N de l'image de $[BC]$ par f. Or l'image de $[BC]$ par f est $[CD]$. Donc N est le milieu de $[CD]$.

2. a) Montrons que l'image de la droite (AN) par f est la droite (AM).

La droite (AN) est l'image de (AM) par f puisque $f(A) = A$ et $f(M) = N$. On a donc : $(AN) = f(AM)$. Il en résulte que $f(AN) = f(f(AM)) = (fof)(AM) = (AM)$ car $f \circ f$ est une homothétie de centre A et l'image d'une droite passant par le centre d'une homothétie par cette homothétie est la droite elle-même.

b) En déduissons que les droites (AM) et (CN) sont orthogonales. Les droites (AN) et (BC) sont orthogonales (partie A, 1. c.), leurs images par f sont donc aussi orthogonales parce qu'une similitude conserve l'orthogonalité. On en déduit que les droites (AM) et (CD) sont orthogonales. Comme N appartient à (CD), les droites (AM) et (CN) sont orthogonales.

c) Que représente le point M pour le triangle ACN ? Justifions. Les droites (CB) et (AM) sont deux hauteurs du triangle ACN. Le point M est donc l'orthocentre du triangle ACN.



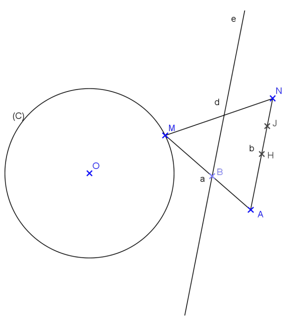
1.8.2 Utilisation des similitudes indirectes planes : (2heures 30)

Recherche des lieux géométriques

Activité d'institutionnalisation 8 : (du maître)

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A un point du plan. M étant un point de $(\mathcal{C})$, on désigne par AMN le triangle équilatéral de sens Indirect. Soit (Δ) la droite parralèlle à (AN) passant par le milieu de $[AM]$.

Déterminer le lieu géométrique du point J du segment $[AN]$ tel que $AJ = \frac{3}{4}AN$, lorsque M décrit $(\mathcal{C})$.



Solution :

On a : $AJ = \frac{3}{2}AH$ et H est l'image de M par la symétrie d'axe (Δ). Donc J est l'image de

M par la similitude indirecte plane g de centre A, de rapport $\frac{3}{2}$ et d'axe (Δ. Comme M décrit le cercle $(\mathcal{C})$, alors le lieu de J est l'image de $(\mathcal{C})$ par g, c'est-à-dire le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre O' image de $\mathcal{C}$ par g de O qui passe Par J. $g = h \circ s$ où s est la réflexion d'axe (Δ) et h l'homotétie de centre A de rapport$k = \frac{3}{2}$.

Problèmes de construction

Activité d'institutionnalisation 9 :(du maître)

Soit s la similitude indirecte d'expression complexe $z' = (1-i)\overline{z} + 2 - i$

1) Déterminer les éléments caractéristiques de s.
2) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   $\mid (1-i)\,\overline{z} + 2 - i \mid = 4$
3) Retrouver le résultat de la question précédente par une méthode algébrique.

Solution :

1) Déterminons les éléments caractéristiques de s.

   Soit $M(z)$. On a :

   •$f(z) = (1-i)\overline{z} + 2 - i$. $a = 1 - i$ le module a est égal à $\sqrt{2} \neq 1$ donc f est la composée d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$ avec une réflexion d'axe (Δ).
   $z_{\overrightarrow{u}} = 1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. C'est-à-dire : $\overrightarrow{u}(\frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{-\sqrt{\sqrt{2}}}{2})$ et de centre $z_I = \frac{(1-i)(2+i)+2-i}{1-2} = -5 + 2i$. (Δ) est la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

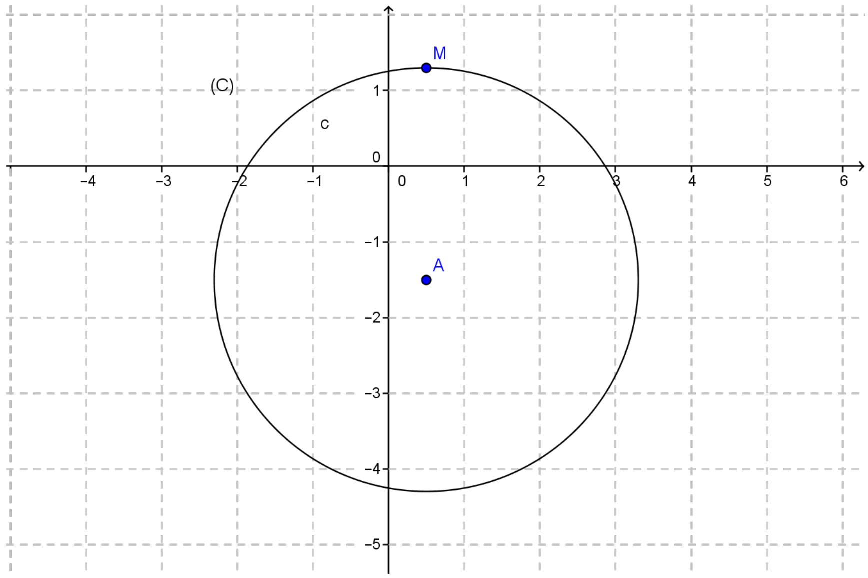
   $\boxed{\text{s est la similitude indirecte plane de centre } I(-5+2i) \text{ de rapport } \sqrt{2} \text{ et d'axe } (\Delta)}$

2) Déterminons l'ensemble des points M.

$$\begin{aligned} \text{On a : } |(1-i)\overline{z} + 2 - i| = 4 &\Longrightarrow |1-i||\overline{z} + \frac{2-i}{1-i}| = 4 \\ &\Longrightarrow |\overline{z} + \frac{(2-i)(1+i)}{2}| = 2\sqrt{2} \\ &\Longrightarrow |z + \frac{3-i}{2}| = 2\sqrt{2} \\ &\Longrightarrow AM = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

   avec $A(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$. Donc $\boxed{M \text{ décrit le cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } 2\sqrt{2}}$

   Construisons l'ensemble des points M



3) Retrouvons ce résultat par une méthode algébrique.

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a :

$|(1-i)\overline{z} + 2 - i| = 4$
$\Longrightarrow |(1-i)(x-iy) + 2 - i| = 4$
$\Longrightarrow |x - y + 2 + i(-x - y - 1)| = 4$
$\Longrightarrow (x - y + 2)^2 + (-x - y - 1)^2 = 16$
$\Longrightarrow x^2 + y^2 + 4 + 4x - 4y - 2xy + x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2xy = 16$
$\Longrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y + 5 = 16$
$\Longrightarrow x^2 + y^2 + 3x - y + \frac{5}{2} = 8$
$\Longrightarrow (x + \dfrac{3}{2})^2 - \dfrac{9}{4} + (y - \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{2} = 8$
$\Longrightarrow (x + \dfrac{3}{2})^2 + (y - \dfrac{1}{2})^2 = 8$

Donc $\boxed{M \text{ décrit le cercle } (\mathcal{C}) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } 2\sqrt{2}}$

Méthode :

Pour résoudre les problèmes de construction à l'aide des similitudes directes planes, on peut procéder en deux étapes : l'analyse et la synthèse.

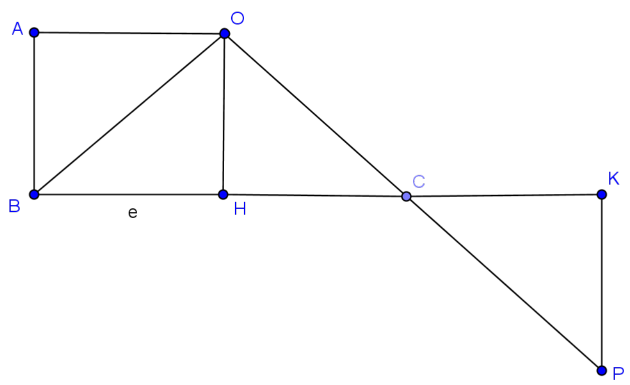
- ♢ **L'analyse** consiste à supposer le problème résolu et à étudier une figure répondant à la question pour en dégager les propriétés permettant sa construction.
- ♢ **La synthèse** consiste à construire la figure en utilisant les propriétés dégagées dans l'analyse, à justifier que la figure construite répond à la question et éventuellement, à discuter le nombre de solutions au problème.

Démonstration des propriétés

Activité d'institutionnalisation 10 :(du maître)

$ABCO$ est un trapèze rectangle tels que OBC est un triangle isocèle. Soient H le projeté orthogonal de O sur $[BC]$. Soit K un point de $[HC)$ tel que C soit le milieu de $[HK]$. La perpendiculaire à (BC) passant par A coupe la droite (OC) en P.

Démontrer que le triangle CKP est rectangle isocèle.



Solution : On considère la similitude indirecte g qui transforme A en K ; et B en P. En posant $g = s \circ t$ où s est la réflexion d'axe (OH) et t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$; par suite $g(O) = C$ dont l'image du triangle ABO par g est le triangle KPC. Comme ABO est un triangle rectangle isocèle en A, il en résulte que KPC est un triangle rectangle isocèle de sens indirect.

1.9 Exercices et problèmes

Le plan est rapporté á un repère orthonrmé directe $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

1.9.1 Exercices résolus

Exercice 1 :

Soit f l'application du plan qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe z associe le point $M'(x';y')$ d'affixe z' définie par : $z' = i\overline{z} + 1 - i$

1- Déterminer les éléments caractéristiques de f

2- Quel est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O, de rayon 3cm.

3- Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que l'on ait : $|i\overline{z} + 1 - i| = 4$

Solution :

1- Déterminons les éléments caractéristiques de f

$a = i$ et $b = 1 - i$. On a : $|a| = 1$; par suite $a\bar{b} + b = 0$. Donc f est une réflexion d'axe (Δ) passant par $B(\frac{b}{2}$ c'est-à-dire $B(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$ et de direction $\overrightarrow{u}$ d'affixe $1 + i$. Il en résulte que (Δ) a pour équation cartésienne $x - y - 1 = 0$

2- L'image du cercle $\mathcal{C}$ par f est un cercle $\mathcal{C}'$ de rayon 3cm et de centre $f(O) = O'$ tel que l'affixe de O' est $1 - i$.

3- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|i\overline{z} + 1 - i| = 4$

• **Méthode analytique** :

$|i\overline{z} + 1 - i| = 4 \Longrightarrow |i(x - iy) + 1 - i| = 4$

$\Longrightarrow |y + 1 + i(x - 1)| = 4$

$\Longrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$

$\boxed{\text{L'ensemble cherché est } \mathcal{C}(B(1;-1),4)}$

• **Méthode géométrique** :

$|i\overline{z} + 1 - i| = 4 \Longrightarrow |i||\overline{z} + \frac{1-i}{i}| = 4$

$\Longrightarrow |\overline{z} + \frac{1+i}{-1}| = 4$

$\Longrightarrow |z - z_B| = 4$

$\Longrightarrow \|\overrightarrow{BM}\| = 4$

Donc $\boxed{M \text{ décrit } \mathcal{C}(B(1;-1),4)}$

Exercice 2 :

On considère la transformation T du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{5}(3 - 4i)\overline{z} + 2 - i$.

1) Donner l'expression analytique de T. Est-ce que T admet de point invariant ?

2) Déterminer la nature et la caractéristique de $T \circ T$.

3) Soit $O' = T(O)$. Trouver l'affixe du point A milieu de $[OO']$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de T.

Solution :

1) Donnons l'expression analytique de T.

$x'+iy' = \frac{1}{5}(3-4i)(x-iy)+2-i = \frac{1}{5}(3x-3iy-4ix-4y)+2-i = \frac{1}{5}(3x-4y+10)+\frac{1}{5}i(-4x-3y-5)$

Donc $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x-4y+10) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x-3y-5) \end{cases}$.

Par suite $\begin{cases} 5x = 3x-4y+10 \\ 5y = -4x-3y-5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+4y = 10 \\ 4x+8y = -5 \end{cases}$. Ce système n'admet pas de solutions car les équations linéaires qui constituent ce système ne sont pas compatibles donc T n'admet pas de point invariant.

2) Déterminons la nature et la caractéristique de $T \circ T$.

Soit M_1 d'affixe z_1 tel que T(M) $= M_1$ et $T(M_1) = M'$. On a : $z_1 = \frac{1}{5}(3-4i)\overline{z}+2-i$ (1) et $z' = \frac{1}{5}(3-4i)\overline{z_1}+2-i$ (2). Or $\overline{z_1} = \frac{1}{5}(3+4i)z+2+i$. En remplaçant $\overline{z_1}$ dans (2), on a : $z' = z+4-2i$

Moralité $T \circ T$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $4-2i$

3) $O' = T(O)$. Trouvons l'affixe du point A milieu $[OO']$.

O' a pour affixe $2-i$ par conséquent $z_A = 1-\frac{1}{2}i$.

On déduit que T est une symétrie glissée de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et d'axe passant Par O de direction $\overrightarrow{u}$ d'affixe $4-2i$

1.9.2 Exercices proposés

Exercice 1.9.1. *Déterminer dans chacun des cas suivants les éléments caractéristiques de la similitude indirecte plane d'écriture complexe donnée :*

1. $z' = i\overline{z}+1$
2. $z' = (1-i)\overline{z}+2$
3. $z' = -\sqrt{3}\overline{z}$
4. $z' = -\overline{z}+5i$
5. $z' = \overline{z}-2+i$
6. $z' = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\overline{z}+3i$

Exercice 1.9.2. *Dans chacun des cas suivants, déterminer l'écriture complexe de la similitude indirecte s de rapport k ; d'axe Δ dirigé par $\overrightarrow{u}$ et de centre Ω.*

1. $\Omega(5-4i)$, $k=\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{u}(1+i)$
2. $\Omega(-2)$, $k=2$ et $\overrightarrow{u}(2-3i)$
3. $\Omega(3i)$, $k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\overrightarrow{u}(-i)$
4. $\Omega(\dfrac{1}{2}+i)$, $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overrightarrow{u}(\sqrt{2}+i)$

Exercice 1.9.3. *M, P et Q sont trois points du plan complexe d'affixe respectives i, 1 et $2+i$. Déterminer la similitude indirecte g telle que l'on ait : $g(M)=P$ et $g(O)=Q$. On donnera le centre le rapport et le vecteur directeur de l'axe.*

Exercice 1.9.4. *On note s la similitude qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=(-1-2i)\overline{z}+10$.*
Démontrer que s est la composée d'une symétrie orthogonale d'axe (Δ), et d'une similitude directe dont le centre Ω appartient à (Δ). Préciser (Δ).

Exercice 1.9.5. *Soit s la similitude indirecte d'écriture complexe $z'=3i\overline{z}+9+3i$*

1. *Déterminer les éléments caractéristiques de s*
2. *Déterminer l'image par s :*
   (a) *du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(3-i)$ et de rayon 1 ;*
   (b) *de la droite d'équation $y=2x-5$.*

Exercice 1.9.6. *Soient A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes respectives $1+3i$, $4+3i$, $4-2i$, $1-2i$.*

1. *Montrer qu'il existe une similitude indirecte plane s telle que $s(A)=C$ et $s(B)=D$.*
2. *Déterminer $s(C)$ et $s(D)$*
3. *Démontrer que l'isobarycentre des points A, B, C, D est invariant par s. En déduire les éléments caractéristiques de s.*

Exercice 1.9.7. *Soit g la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=(1+i\sqrt{3})\overline{z}+\sqrt{3}(1-i)$.*

1. *Démontrer que g admet un unique point invariant I ; déterminer l'affixe de I.*
   Caractériser géométriquement g.
2. *Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement des coefficients 3, 2, 1.*
   Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.
3. *On suppose que le point M décrit la droite d'équation : $y=x$.*
   Quel est l'ensemble décrit par G ?

1.9.3 Problèmes proposés

Problème 1.9.1. *Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives* $z_A = 2 + i$; $z_B = 5 + 2i$ *et* $z_C = i$. s_1 *désigne la symétrie d'axe* (AB)

1. *a-) Démontrer que* S_1 *transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe* z' *tel que*

$$z' = (\tfrac{4}{5} + \tfrac{3}{5}i)\overline{z} + (-\tfrac{1}{5} + \tfrac{3}{5}i)$$

   b-) En déduire l'affixe de C'*, symétrique de C par rapport à* (AB).

   c-) Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' *soit imaginaire pur est la droite* (d) *d'équation* $4x + 3y = 1$

   d-) Vérifier que C' *appartient à* (d).

2. *a-) Démontrer que les droite* (d) *et* (AB) *sont sécantes en un point* Ω *dont on précisera l'affixe* w.

   b-) On désigne par s_2 *la symétrie d'axe* (d) *et par f la transformation définie par :* $f = s_2 \circ s_1$. *Justifier que f est une similitude directe et préciser son rapport.*

   c-) Déterminer les images des points C et Ω *par la transformation f.*

   d-) Justifier que f est une rotation.

3. *a-) Déterminer les couples d'entiers relatifs* $(x; y)$ *solutions de l'équation :* $4x + 3y = 1$

   b-) Déterminer les points de (d) *à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.*

Problème 1.9.2. *Dans le plan complexe d'unité graphique* 2cm*, on considère les points* A, B, C, D *et E d'affixes respectives :* $a = 2$; $b = 2 + 3i$; $c = 3i$; $d = -\frac{5}{2} + 3i$; $e = -\frac{5}{2}$

1. *Placer ces cinq points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.*

2. *On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.*

   Démontrer que OABC et ABDE sont des rectangles et qu'ils sont semblables.

3. *Etude d'une similitude indirecte transformant OABC en BAED.*

   a-) Montre que l'écriture complexe de la similitude indirecte s qui transforme O en B et qui laisse A invariant est : $z' = -\frac{3}{2}i\overline{z} + 2 + 3i$ *où* $\overline{z}$ *désigne le conjugué du nombre complexe z.*

   b-) Montrer que s transforme OABC en BAED.

c-) Démontrer que s est la composée de la réflexion d'axe (OA) suivie d'une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

Problème 1.9.3. La figure sera compléter tout au long de l'exercice.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, et C, d'affixes respectives : $-5+6i$; $-7-2i$; et $3-2i$. On admet que le point F, d'affixe $-2+i$ est le centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC. Soit H le point d'affixe -5.

1. *a-) Etant donné des nombres complexes z et z', on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'. Soient a et b deux nombres complexes.*

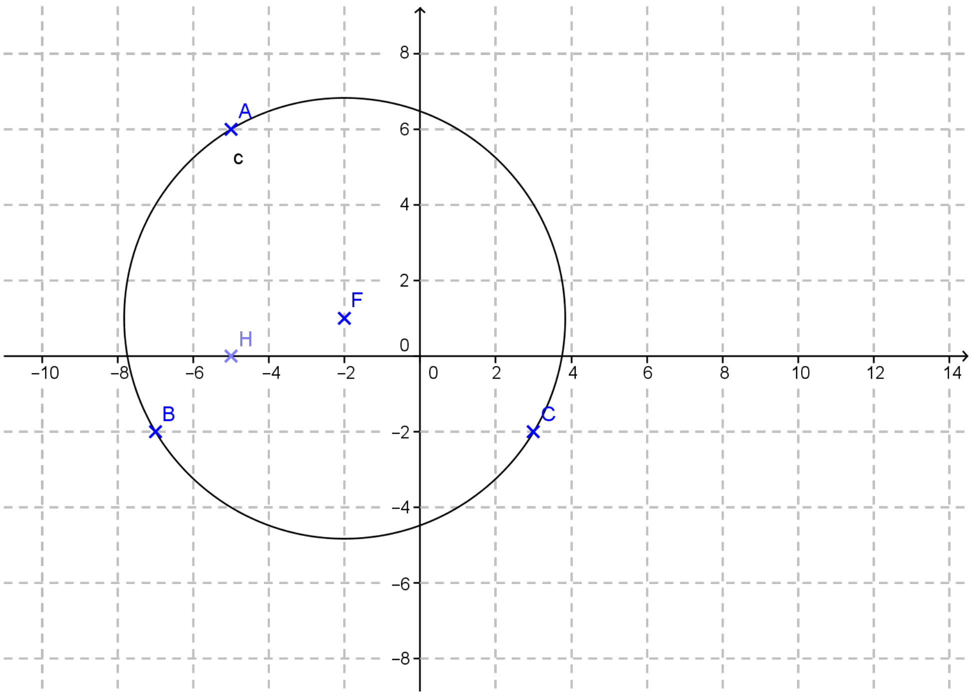
   Soit s la transformation d'écriture complexe :$z' = a\overline{z} + b$ qui, au point M associe le point M'. Déterminer a et b pour que A et C soient invariants par s. quelle est alors la nature de s ?

   b-) En déduire l'affixe du point E, symétrique du point H par rapport à la droite (AC).

   c-) Vérifier que E est un point du cercle Γ.

2. *Soit I le milieu de $[AC]$. Déterminer l'affixe du point G image de I par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$.*

   Démontrer que les points H, G et F sont alignés.



Problème 1.9.4. *Dans le plan complexe d'unité graphique 2cm, le but de cette exercice est d'étudier la similitude indirecte plane f d'écriture complexe : $i\sqrt{2}\overline{z} + 2i\sqrt{2} - 2$, et d'en donner deux décompositions.*

I-) __Restitution organisée des connaissances__.

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude plane directe autre qu'une translation est de la forme $z' = az + b$, où a et b sont des complexes et $a \neq 1$.

Déterminer en fonction de a et de b l'affixe du centre d'une telle similitude plane directe.

II-) ***Prémière décomposition de f***.

Soit g la similitude directe d'écriture complexe : $z' = i\sqrt{2}z + 2i\sqrt{2} - 2$

1. *Préciser les éléments caractéristiques de g.*
2. *Déterminer une réflixion s telle que $f = g \circ s$*

III-) ***Deuxième décomposition de f***

1. *Démontrer que f admet un unique point invariant noté Ω. Déterminer l'affixe ω de Ω.*
2. *Soit (D) la droite d'équation : $y = x + 2$.*
   Montrer que pour tout point N appartenant à (D), $f(N)$ appartient aussi à (D).
3. *Soit σ la réflexion d'axe (D) et k la transformation définie par : $k = f \circ \sigma$.*
   a-) Donner l'écriture complexe de σ.
   Indication : On pourra posé : $z' = a\overline{z} + b$ et utiliser deux points invariants par σ pour déterminer les nombres complexes a et b.
   b-) En déduire que l'écriture complexe de k est : $z' = \sqrt{2}z + 2\sqrt{2} - 2$
   c-) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation k.
4. *En déduire de ce qui précède une écriture de la similitude indirecte f comme composé d'une réflexion et d'une homothétie.*

Problème 1.9.5. *Dans le plan complexe d'unité 2cm, on considère les points A, C, D, et Ω d'affixes respectives : $1 + i$; 1 ; 3 ; $2 + \frac{1}{2}i$.*

Partie A *:*

1. *Soit Γ le cercle de centre Ω passant par A.*
   a-) Montrer que Γ passe par C et D.
   b-) Montrer que le segment $[AD]$ est le diamètre de Γ.
   c-) Faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer Γ. On note B la seconde intersection de Γ avec la droite (OA).
   d-) Montrer que le point O est extérieur au segment $[AB]$.
2. *Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblales mais pas isométriques.*
   Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en triangle OAD.

a-) Montrer S est une similitude indirecte autre que la réflexion.

b-) Quel est le centre de S ?.

***Partie B** :*

1. *a-) Déduire de la partie A.2. que l'on a $OA \times OB = OC \times OD$.*

   b-) En déduire le module de l'affixe z_B du point B. Déterminer un argument de z_B.

2. *Déterminer l'écriture complexe de S.*

3. *Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.*

1.10 Conclusion

Cette exemple de cours sur les similitudes indirectes planes ainsi présentées nous donne des éléments de base pour étudier les transformations indirectes du plan (c'est-à-dire qui ne conservent pas les angles orientés dans le plan). Mais malheureusement durant notre stage pratique au lycée Leclerc de Yaoundé, nous n'avons pas eu l'opportunité de travailler et d'évaluer les élèves sur cette notion car étant hors programme au Cameroun. Cette ressource est une modeste contribution dans le projet PréNum-AC dans le but d'aider les élèves dans leur apprentissage des mathématiques.

♠♣ Bibliographie et sitographie ♣♠

Bibliographie

[1] Saliou Touré et les autres, *Mathématiques Terminale SM*, Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), EDICEF, 2004

[2] Saliou Touré et les autres, *Mathématiques Première SM*, Collection Inter Africaine de Mathématiques (CIAM), EDICEF, 2004

[3] M. Monge et les autres, *Mathématiques Terminale C, tome 1*, BELIN, 1983

[4] M. Jean-Claude Thiénard, *Les transformations en géométrie, introduction à une approche historique*, IREM de Potiers

Sitographie

[5] *Le secret des similitudes*
tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc10/similitudealpha.php, 2012

[6] *Similitudes(géométrie)*
fr.wilkipédia.org/wiki/similitude, 2012

[7] *http ://www.educastream.com/similitudes-indirectes-terminale-s*

[8] *Similitudes du plan affine, similitudes du plan complexe*
Serge.mehl.free.fr/anx/similitudes_comples.html, 2012

[9] *http ://www.educastream.com/cours-maths-terminale-s*

[10] *http ://www.lyc-plaineneauphle-trappes.ac-versailles.fr/IMG/pdf/simil.pdf*

♠♣ Annexe 1 ♣♠

Extrait du programme officiel de Mathématiques de la classe de Terminale C du CONGO

OBJECTIF GENERAL I : connaître les éléments de base de la géométrie

Objectifs spécifiques	Contenus notionnels, Savoir
1.2 Décrire les Transformations ponctuelles du plan et de l'espace	Transformations du plan - Composée des homithéties, des translations - Groupe des homothéties, groupe des translations - Affinités - Isométries .Classification .Groupe des isométries - Similitudes : Généralités ; Similitudes Directes Similitudes Indirectes Transformations de l'espace - Symétrie orthogonale par rapport à une droite - Symétrie orthogonale par rapport à un plan - Isométries - Composée de deux symétries orthogonales par rapport à un plan - Rotation - Vissage

♠♣ Annexe 2 ♣♠

Extrait du programme officiel de Mathématiques de la classe de Terminale C du Cameroun

Contenu	Commentaire, Savoir, Savoir-faire
Similitudes directes du plan : Définition et propriétés.	On définira une similitude directe comme une transformation conservant la mesure des angles et multipliant les distances par un réel positif. Toute similitude directe est la composée d'une homothétie et d'un déplacement. Forme réduite d'une similitude directe. Les propriétés (images de figures simples, conservation des angles, du parallélisme, du barycentre, multiplication des aires par k^2) se déduisent de ces décompositions.
Exemples d'applications du plan définie par une application complexe. $z \mapsto f(z)$; cas des similitudes. Exemples d'applications ne conservant pas le barycentre.	Forme complexe d'une isométrie et d'une homothétie. Les élèves devront être capables de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe plane(centre, rapport, et angle) à partir de l'application $z \mapsto az + b$