# ESPACE VECTORIEL
# ET
# APPLICATIONS LINÉAIRES

Ressource élaborée par

**GUEYAP KOUNGA Brice Romuald**

Matricule : CM04-08SCI0405

Sous la direction de :

☞ **Dr. NDJEYA Selestin**

Chargé de Cours, E.N.S de Yaoundé I

☞ **M. TCHOUTIO Moïse**

Inspecteur National de Mathématiques

☞ **M. KAMDEM KAMDEM Gaetan F.**

P.L.E.G en Mathématiques

**Année Académique 2013 - 2014**

# Objectifs

1. Objectifs généraux de la ressource

   Les objectifs pédagogiques généraux de cette leçon sont :

   ➢ Assimiler les notions de base sur les espaces vectoriels c'est-à-dire les notions de :
   - Structures et sous-structures ;
   - Familles de vecteurs libres, liées, bases ;
   - Dimension d'un espace vectoriel ;
   - Somme de deux sous-espaces vectoriels.

   ➢ Assimiler les notions de base sur les applications linéaires c'est-à-dire les notions de :
   - Nature de l'application ;
   - Écriture de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée ;
   - Noyau, Image de l'application ;
   - Determinant d'une application linéaire.

2. Objectifs pédagogiques spécifiques

   A la fin de cette ressource, l'élève sera capable de :
   - Savoir définir la notion d'espaces vectoriels ;
   - Savoir montrer qu'une famille finie de vecteurs est une famille génératrice ;
   - Savoir montrer qu'une famille finie de vecteurs est une famille libre ;
   - Savoir montrer qu'une famille finie de vecteurs est une base ;
   - Savoir déterminer la dimension d'un espace vectoriel ;
   - Savoir définir une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre ;
   - Savoir effectuer des opérations sur les matrices carrées d'ordre au plus 3 ;
   - Savoir calculer le déterminant d'une matrice carrées d'ordre au plus 3 ;
   - Savoir calculer le déterminant d'une application linéaire.

# Liens avec les autres parties du programme

A- **Les parties du programme nécessaires au développement de la ressource et les contributions de ces parties**

- Les vecteurs : Ils facilitent les opérations sur les éléments d'un espace vectoriel appelés vecteurs.
- Géométrie de l'espace : droite vectorielle, plan vectoriel
- La notion d'ensemble
- Fonctions : image d'une fonction, antécédent d'une fonction
- Systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

B- **Les apports de la ressource à d'autres parties**

- Géométrie affine
- Les projections
- Les symétries

C- **Les différentes applications de la ressource**

De manière générale, les applications de la ressource sont plus visibles dans les applications de l'espace, le transport des structures et dans l'algèbre en général.

# Table des matières

**Objectifs** **i**

**Liens avec les autres parties du programme** **ii**

**Introduction** **1**

**1 ESPACE VECTORIEL** **2**

1.1 Structure d'espaces vectoriels . . . . . 2

1.2 Sous-espace vectoriel . . . . . 3

1.3 Combinaison linéaire des vecteurs d'une famille finie . . . . . 6

1.3.1 Famille génératrice . . . . . 8

1.3.2 Famille libre . . . . . 9

1.3.3 Base d'un espace vectoriel . . . . . 10

1.3.4 Dimension d'un espace vectoriel . . . . . 11

1.4 Sous-espace vectoriel supplémentaire . . . . . 13

1.4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . . . 13

1.4.2 Somme directe . . . . . 14

**2 APPLICATIONS LINÉAIRES** **16**

2.1 Généralités . . . . . 16

2.2 Matrice d'une application linéaire . . . . . 18

2.2.1 Quelques propriétés sur les matrices . . . . . 19

2.2.2 Déterminant d'une matrice . . . . . 22

2.3 Noyau d'une application linéaire . . . . . 22

2.4 Image d'une application linéaire . . . . . 24

2.5 Déterminant d'une application linéaire . . . . . 27

2.6 Matrices inverses . . . . . 28

**Exercices** **31**

**Bibliographie** **38**

# Introduction

Dans toutes les mathématiques, on rencontre des objets sur lesquels on peut définir deux (02) opérations naturelles dont l'une a exactement les propriétés de l'addition usuelle dans $\mathbb{R}$ et l'autre n'est rien d'autre qu'une multiplication par un nombre (réel ou complexe). C'est le cas des vecteurs de la géométrie plane ou de l'espace, et de bien d'autres exemples comme les ensembles de fonctions ou de suites.

Un espace vectoriel est une structure stable par combinaison linéaire. Les espaces vectoriels sont l'outil de base de l'algèbre linéaire et des mathématiques en générale. Ceci étant, si on se donne un «$\mathbb{R}$-espace vectoriel» $E$, est-ce que $E$ possède «peu» ou «beaucoup» de sous-espaces vectoriels ? Y a-t-il toujours un sous-espace vectoriel contenant un certain nombre de vecteurs donnés ? À-t-on dans $E$ l'équivalent des droites et de plans ? À partir de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels de $E$, peut-on en construire d'autres, par des opérations usuelles sur les ensembles comme la réunion et l'intersection ?

Ainsi, pour y répondre à ces diverses questionnement dans ce travail, on découvrira en particulier :

- La structure d'espaces vectoriels sur l'ensemble des nombres réels ;
- Une catégorie d'applications bien adaptée à la structure d'espaces vectoriels : les applications linéaires ;
- Pour ces applications, nous définirons les notions de noyau, d'images.
- Enfin, comment on peut associer à toute application linéaire, une matrice (un tableau de nombres) qui traduit toutes les informations de l'applications linéaire qu'elle représente.

Chapitre Un

# ESPACE VECTORIEL

## 1.1 Structure d'espaces vectoriels

**Définition 1.1.1.** *Soit $E$ un ensemble non vide dans lequel sont définies :*

- *Une application :* $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$ *appelée loi de composition interne et notée "+" ;*
- *Une application :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$ *appelée loi de composition externe à gauche et notée "$\cdot$".*

*Le triplet $(E,+,\cdot)$* ***est un espace vectoriel sur*** $\mathbb{R}$ *ou encore* ***un espace vectoriel réel*** *(on dit aussi* $\mathbb{R}$***-espace vectoriel****) si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour la loi de composition interne "+" :*
   - *elle est commutative :* $\forall (x,y) \in E^2, \quad x+y = y+x$ *;*
   - *elle est associative :* $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ *;*
   - *elle admet un élément dit* ***neutre****, noté* $0_E$*, tel que :* $\forall x \in E,\ x+0_E = 0_E+x = x$ *;*
   - *Tout élément $x \in E$ admet un* ***opposé****, noté $(-x)$, tel que :* $x+(-x) = (-x)+x = 0_E$.
2. *Pour la loi de composition externe "$\cdot$" :*
   - *elle admet "1" comme élément neutre :* $\forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$ *;*
   - *elle est associative :* $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$ *;*
   - *elle est distributive par rapport à l'addition dans $E$ :* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ *;*
   - *elle est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$ :* $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \ \forall x \in E$, $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Pour résumer l'axiome 1, on dit que $(E,+)$ est un **groupe commutatif** ou encore un **groupe abélien**.

Les éléments de $E$ sont appelés des **vecteurs** (parfois habillés d'une flèche : $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{0}$... parfois non !) et ceux de $\mathbb{R}$, des **scalaires**.
La loi de composition interne (notée "+") correspond à **l'addition** que vous connaissez, et l'externe (notée "·") à la **multiplication** habituelle (aussi on se permettra la plupart du temps d'écrire $\lambda x$ au lieu de $\lambda \cdot x$).

☞**Remarque 1.1.1.**

- *L'élément neutre est unique !*
- *Pour tout vecteur $x$, son opposé est unique !*

Avant de donner des exemples, énonçons d'abord quelques propriétés bien connues dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.1.1.**

*P1* - $\forall x \in E$, *on a :* $0x = 0_E$ *et* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda 0_E = 0_E$ ;

*P2* - $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, *on a :* $\lambda x = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0$ *ou* $x = 0_E)$

*P3* - $\forall x \in E, \ -x = (-1)x$ ;

*P4* - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x, y \in E$, *on a :* $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ *et* $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$ ;

*P5* - $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x, y \in E$, *on a :* $\lambda x = \mu x \Leftrightarrow (\lambda = \mu$ *ou* $x = 0_E)$
*et* $\lambda x = \lambda y \Leftrightarrow (\lambda = 0$ *ou* $x = y)$.

**Exemple 1.1.1.**

*a)* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un espace vectoriel ;*

*b)* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ *et plus généralement* $\mathbb{R}^n$ *sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$ *:*

*c) Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathfrak{F}(A, \mathbb{R})$ des applications de $A$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car elle est muni d'une structure d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ définie par :*
  - *La somme $f + g$ de deux éléments quelconques $f$ et $g$ de $\mathfrak{F}(A, \mathbb{R})$ est définie par : $\forall x \in A \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ;*
  - *Le produit $\lambda f$ du réel quelconque $\lambda$ par un élément quelconque $f$ de $\mathfrak{F}(A, \mathbb{R})$ est défini par : $\forall x \in A \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

## 1.2 Sous-espace vectoriel

Dans cette section, on va s'intéresser à certains sous-ensembles d'un espace vectoriel qui vont avoir à leur tour une structure d'espace vectoriel. La définition d'espace vectoriel étant lourde à vérifier, nous

verrons une caractérisation des espaces vectoriels qui nous permettra, à l'aide des espaces vectoriels de référence, d'éviter la définition d'origine.

**Activité 1.2.1.** *Considérons l'ensemble* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$.

*a°) Montrer que* $F$ *est un ensemble non vide.*

*b°) Montrer que* $F$ *est un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$.

*c°) Montrer que* $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$.

*d°) Montrer que* $\forall u \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u \in F$.

**Solution 1.2.1.**

*a°) On a* $0 + 0 = 0$, *donc* $(0, 0) \in F$. *Par suite* $F$ *est un ensemble non vide.*

*b°) Pour tout* $(x, y) \in F$, $(x, y) \in E$ *par définition. Donc* $F$ *est un sous-ensemble de* $E$ *(*$F \subset E$*).*

*c°) Soient* $u = (x, y), v = (a, b) \in F$, *montrons que* $u + v \in F$.
$u \in F \Rightarrow x + y = 0$ *et* $v \in F \Rightarrow a + b = 0$.
$u+v = (x, y)+(a, b) = (x+a, y+b)$. *Or* $(x+a)+(y+b) = (x+y)+(a+b) = 0+0 = 0$.
*Donc* $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$.

*d°) Soient* $u = (x, y) \in F$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *montrons que* $\lambda u \in F$.
$u \in F \Rightarrow x + y = 0$
$\lambda u = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. *Or* $\lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda 0 = 0$.
*Donc* $\forall u \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u \in F$.

✍✍✍***En pratique :*** *On dit dans ces conditions que* $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $E = \mathbb{R}^2$.

**Définition 1.2.1.** *Soit* $(E, +, \cdot)$ *un espace vectoriel et* $F$ *une partie non vide de* $E$. *On dit que* $F$ *est un* ***sous-espace vectoriel de*** $E$ *si la restriction des lois "+" et "·" de* $E$ *à* $F$ *fait de* $F$ *un espace vectoriel.*

Observons que tout sous-espace vectoriel de $E$ contient au moins le vecteur nul. La notion prend tout son intérêt grâce à la proposition suivante :

**Proposition 1.2.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel et $F$ un ensemble. $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies :*

*P1 -* $F \neq \emptyset$

*P2 -* $F \subset E$

*P3 - $F$ est stable par combinaison linéaire c'est-à-dire :* $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F$ *et* $\forall x \in F, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x \in F$

☞**Remarque 1.2.1.**

- *Tout sous-espace vectoriel de $E$ contient $0_E$.*
- *Dans la pratique, pour montrer que $F \neq \emptyset$, on montrera assez souvent que $0_E \in F$.*
- *La dernière condition peut être synthétisée par :* $\forall (x, y) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda \cdot y \in F$.

☞**Remarque 1.2.2.** $\{0_E\}$ *et $E$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.*

☞**Remarque 1.2.3.** *Ainsi, il est donc beaucoup plus facile de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel plutôt qu'un espace vectoriel. En effet toutes les propriétés propres aux lois (commutativité, associativité ...etc) restent vraies par restriction donc n'ont pas besoin d'être démontrées.*

**Exemple 1.2.1.**

*a)* $\mathbb{R}^2$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}$.

*b) Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $I$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}(I, \mathbb{R})$. De même, l'espace $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $I$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{F}(I, \mathbb{R})$. De plus, comme toute fonction dérivable est continue, il s'ensuit que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*

*c) L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En effet, le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2}$ n'appartient pas à $F$.*

✎✎✎**Méthode 1** (Montrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel)**.**

⋆ *On repère l'espace vectoriel $E$ (de référence) principal.*

⋆ *On montre que cet ensemble $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ à l'aide de la propriété ci-dessus.*

**Proposition 1.2.2.** *Soit $E$ un espace vectoriel. Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Preuve :** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- $F$ et $G$ étant des sous-espaces vectoriels de $E$, ils contiennent tous $0_E$.
  Donc $0_E \in F \cap G$. Par suite, $F \cap G$ est non vide.
- D'autre part on sait que $F \cap G$ est un sous-ensemble de $F$, donc $F \cap G$ est un sous-ensemble de $E$ car $F$ est un sous-ensemble de $E$.
- Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $x + \lambda y \in F \cap G$.
  Comme $x, y \in F \cap G$, il est clair que $x, y \in F$ et $x, y \in G$. Puisque $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, il en découle que $x + \lambda y \in F$ et $x + \lambda y \in G$. On en déduit que $x + \lambda y \in F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$. ■

**Exemple 1.2.2.** *Soit $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :*
$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + z = 0$ *et* $x - y + 2z = 0\}$. *L'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car l'ensemble $\mathcal{D}$ est l'intersection des sous-ensembles $F$ et $G$ de $\mathbb{R}^3$ définis par : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + z = 0\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0\}$. Ce sont deux plans passant par l'origine, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
*Ainsi, $\mathcal{D} = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est une droite vectorielle.*

**✖✖✖ATTENTION :** En général, la réunion $F \cup G$ n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de $E$.
En effet, considérons par exemple $E = \mathbb{R}^2$, et les sous-espaces vectoriels :
$F = \{(x, y) \in E : x = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in E : y = 0\}$.
Alors $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
car $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin F \cup G = \{(x, y) \in E : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ est la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.

## 1.3 Combinaison linéaire des vecteurs d'une famille finie

Dans toute cette section, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Rappel 1.3.1.** *On appelle famille (ou système) finie de $p$ vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ distincts ou non de $E$, le $p$-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$.*

**Activité 1.3.1.** *On donne dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -3)$ et $\overrightarrow{v}(-\frac{1}{2}, 7)$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.*

**Solution 1.3.1.** *On a : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$*
✍✍✍***En pratique :*** *On dit qu'on a écrit le vecteur $\overrightarrow{u}$ (respectivement $\overrightarrow{v}$) comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ de la base $\mathcal{B}$.*

**Définition 1.3.1.** *Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. On appelle* ***Combinaison linéaire de ces vecteurs****, le vecteur $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$ est un $p$-uplet quelconque de $\mathbb{R}^p$.*

On note $x$ sous la forme condensée suivante : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ ; les $\lambda_i$ sont appelés les coefficients de la combinaison linéaire.

**Théorème et Définition 1.3.1.** *Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une famille de $p$ vecteurs de $E$. L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sous-espace vectoriel de $E$.*
*On l'appelle le* ***sous-espace vectoriel engendré*** *par les $p$ vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$.*

**Exemple 1.3.1.**

*a) Cherchons le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $x_1 = (1, 2, 0)$ et $x_2 = (1, -1, 1)$. Ce sous-espace est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1$ et de $x_2$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tel que :*
*$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(1, -1, 1) = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$ où $(\lambda_1, \lambda_2)$ est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.*

*b) $\mathbb{R} \times \{0\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(1, 0)$. On peut remarquer que c'est aussi le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(19, 0)$ et plus généralement par n'importe quel vecteur $(a, 0)$ où $a$ est un réel non nul.*

### 1.3.1 Famille génératrice

**Activité 1.3.2.** *Considérons la famille* $S = \big((1,3),(-1,5)\big)$ *de* $\mathbb{R}^2$.
*Trouver, si possible, les réels* $\alpha$ *et* $\beta$ *tels que* $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$, *on ait :* $\overrightarrow{u} = \alpha(1,3) + \beta(-1,5)$.

**Solution 1.3.2.** *Soit* $\overrightarrow{u}(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *cherchons* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\overrightarrow{u} = \alpha(1,3) + \beta(-1,5)$.
$(a,b) = \alpha(1,3) + \beta(-1,5) \Leftrightarrow (a,b) = (\alpha, 3\alpha) + (-\beta + 5\beta) \Leftrightarrow (a,b) = (\alpha - \beta, 3\alpha + 5\beta)$.
*Ce qui nous conduit au système d'inconnues* $\alpha$ *et* $\beta$ *suivant :* $\begin{cases} a &= \alpha - \beta \\ b &= 3\alpha + 5\beta \end{cases}$ *qui a pour solution* $\alpha = \frac{5a+b}{8}$ *et* $\beta = \frac{-3a+b}{8}$.
*Finalement pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *on a :* $\overrightarrow{u} = \frac{5a+b}{8}(1,3) + \frac{-3a+b}{8}(-1,5)$.
✍✍✍***En pratique :*** *Lorsque les réels* $\alpha$ *et* $\beta$ *existent, on dit que la famille* $S = \big((1,3),(-1,5)\big)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

**Définition 1.3.2.** *On dit qu'une famille finie* $S = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ *de* $p$ *vecteurs de* $E$ *est une* ***famille génératrice****, si et seulement si tout vecteur* $x$ *de* $E$ *s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs* $x_i$ *de* $S$ *c'est-à-dire :* $\forall x \in E,\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ *tels que :* $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_p x_p$.

Si $E$ est engendré par une famille finie de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$, on note alors $E = \langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle$ ou $E = Vect(x_1, x_2, \cdots, x_p)$. On dit aussi que $S$ est un système générateur de $E$.

**Exemple 1.3.2.**

a) *La famille* $\{e_1 = (1;0), e_2 = (0;1)\}$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$ *puisque tout élément* $x = (x_1, x_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *peut s'écrire :* $x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$.
*La famille* $\{e_1 = (2;0), e_2 = (1;1)\}$ *en est une autre, prouvez la !*

b) *Dans l'espace* $\mathbb{R}_2[X]$ *des polynômes de degré au plus 2, la famille* $(1, X, X^2)$ *est une famille génératrice puisque tout polynôme de degré au plus 2 est combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.*

**Propriétés 1.3.1.**

*P1 - Toute famille contenant une famille génératrice est elle même génératrice.*

*P2 - Si $F_1$ est une famille génératrice que chacun de ses vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs d'une autre famille $F_2$, alors $F_2$ est aussi une famille génératrice.*

### 1.3.2 Famille libre

**Activité 1.3.3.** *Considérons la famille $S = \big((1,-3),(-1,2)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.*
*Montrer que si on a $\alpha(1,-3)+\beta(-1,2)=(0,0)$ alors $\alpha=\beta=0$.*

**Solution 1.3.3.** *Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\alpha(1,-3)+\beta(-1,2)=(0,0)$.*
$\alpha(1,-3)+\beta(-1,2)=(0,0) \Leftrightarrow (\alpha,-3\alpha)+(-\beta,2\beta)=(0,0) \Leftrightarrow (\alpha-\beta,-3\alpha+2\beta)=(0,0)$.
*Ce qui nous donne* $\begin{cases} \alpha-\beta &= 0 \\ -3\alpha+2\beta &= 0 \end{cases}$ *qui a pour solution $\alpha=0$ et $\beta=0$.*
✍✍✍***En pratique :*** *On dit dans ce cas que la famille $S = \big((1,-3),(-1,2)\big)$ est une famille libre. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est liée.*

**Définition 1.3.3.** *On dit qu'une famille finie $S=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ de $p$ vecteurs de $E$ est **libre**, si et seulement si $\forall \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p \in \mathbb{R}$ la relation $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_px_p=0_E$ entraîne $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0$.*
*Autrement dit, aucun vecteur de la famille $S$ n'est combinaison linéaire des autres : on dit qu'ils sont **linéairement indépendants**.*

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $S=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$ n'est pas libre, alors on dira que $S$ est une famille **liée** ou que les vecteurs $x_1,x_2,\cdots,x_p$ sont **linéairement dépendants**. Plus généralement, au moins un des vecteurs de cette famille s'écrit comme combinaison linéaire des $p-1$ autres vecteurs.

☞**Remarque 1.3.1.**

- *Toute famille contenant $0_E$ est liée.*
- *Toute famille dont les vecteurs ne sont pas deux à deux distincts est nécessairement liée. Par suite, les vecteurs de toute famille libre sont deux à deux distincts.*

- *Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre, trois vecteurs non coplanaires forment une famille libre.*

**Exemple 1.3.3.**

*a) Une famille composée d'un seul vecteur non nul est toujours libre.*

*b) la famille* $\{e_1 = (1;0), e_2 = (0;1)\}$ *est une famille libre de* $\mathbb{R}^2$.

*c) Soient les vecteurs* $x_1 = (1,2,3)$ *et* $x_2 = (-3,-6,-9)$ *de* $\mathbb{R}^3$. *On a :* $3x_1 + x_2 = (0,0,0)$ *ou encore* $x_2 = -3x_1$ *; la famille* $(x_1, x_2)$ *est donc liée.*

**Propriétés 1.3.2.** *Toute famille contenant une famille liée est elle même liée.*

### 1.3.3 Base d'un espace vectoriel

**Activité 1.3.4.** *Considérons la famille* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *de* $\mathbb{R}^2$.

*a°) Montrer que c'est une famille libre.*

*b°) Montrer que c'est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

**Solution 1.3.4.**

*a°) Montrons que la famille* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *est libre.*
*Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (0,0)$.
$\alpha(1,1) + \beta(1,-1) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha,\alpha) + (\beta,-\beta) = (0,0) \Leftrightarrow (\alpha+\beta, \alpha-\beta) = (0,0)$. *Ce qui nous donne* $\begin{cases} \alpha+\beta &= 0 \\ \alpha-\beta &= 0 \end{cases}$ *qui a pour solution* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 0$.
*Donc notre famille* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *est bel et bien une famille libre.*

*b°) Montrons que* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.
*Soit* $\overrightarrow{u}(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *cherchons* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que :* $\overrightarrow{u} = \alpha(1,1) + \beta(1,-1)$.
$(a,b) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \Leftrightarrow (a,b) = (\alpha,\alpha) + (\beta,-\beta) \Leftrightarrow (a,b) = (\alpha+\beta, \alpha-\beta)$.
*Ce qui nous conduit au système d'inconnues* $\alpha$ *et* $\beta$ *suivant :* $\begin{cases} a &= \alpha+\beta \\ b &= \alpha-\beta \end{cases}$ *qui a pour solution* $\alpha = \frac{a+b}{2}$ *et* $\beta = \frac{a-b}{2}$.
*Finalement pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *on a :* $\overrightarrow{u} = \frac{a+b}{2}(1,1) + \frac{a-b}{2}(1,-1)$.
*Donc notre famille* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}^2$.

✍✍✍***En pratique :*** *On vient de montrer que la famille* $\big((1,1),(1,-1)\big)$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.

**Définition 1.3.4.** *Une famille de vecteurs* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ *est une* ***base d'un espace vectoriel*** *si et seulement si cette famille est à la fois libre et génératrice, c'est-à-dire pour tout vecteur* $x$ *de* $E$*, il existe un unique* $p$*-uplet* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$ *de* $\mathbb{R}^p$ *tel que :* $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_p e_p$.
*Ainsi, on dit que* $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p)$ *sont les composantes de* $x$ *dans la base* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$.

**Exemple 1.3.4.**

*a) La base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *est la famille des deux vecteurs* $(e_1, e_2)$ *où* $e_1 = (1,0)$ *et* $e_2 = (0,1)$.

*b) La famille* $\Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

☞**Remarque 1.3.2.** *De manière générale,*

- *Tout espace vectoriel n'admet pas forcement une base. Par exemple* $E = \{0_E\}$ *n'admet pas de base par convention.*
- *Tout espace vectoriel n'admet pas forcement une famille génératrice.*
- *La base d'un espace vectoriel lorsqu'elle existe n'est pas unique.*

### 1.3.4 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 1.3.5.** *Soit* $E$ *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*, non réduit au singleton* $\{0_E\}$ *(c'est-à-dire* $E \neq \{0_E\}$*). Si* $E$ *possède une base de* $p$ *vecteurs, alors toute autre base de* $E$ *a également* $p$ *vecteurs.*
*L'entier naturel non nul* $p$ *est appelé la* ***dimension de*** $E$ *et on dit alors que* $E$ *est un espace vectoriel de* ***dimension*** $p$ *et est notée par :* $\dim E = p$.

**Exemple 1.3.5.** *La dimension de* $\mathbb{R}$ *est* $1$*, celle de* $\mathbb{R}^2$ *est* $2$ *et, plus généralement, celle de* $\mathbb{R}^n$ *est* $n$.

☞**Remarque 1.3.3.**

- $\emptyset$ *est une base de* $\{0_E\}$ *et* $\dim(\{0_E\}) = 0$.
- *Si* $p = 1$ *alors une base de* $E$ *est constituée d'un seul vecteur. Ainsi, on dit que* $E$ *est une* ***droite vectorielle****.*
- *Si* $p = 2$ *alors une base de* $E$ *est constituée de deux vecteurs. Ainsi, on dit que* $E$ *est un* ***plan vectoriel****.*

**Théorème 1.3.1** (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit* $E$ *un espace vectoriel de dimension* $n$ *et soit* $\mathcal{B}$ *une base quelconque de* $E$*. Soit* $S = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ *un système de* $p$ *vecteurs libres de* $E$*, avec* $p \leq n$*. Alors si :*

1. $p = n$*, alors* $S$ *est une base de* $E$ *;*
2. $p < n$*, on peut compléter la famille* $S$ *par* $n - p$ *vecteurs libres* $(e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n)$ *de la base* $\mathcal{B}$ *de telle manière que* $(e_1, e_2, \cdots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_n)$ *soit une base de* $E$*.*

**Corollaire 1.3.1** (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit* $E \neq \{0_E\}$ *un espace vectoriel de dimension finie.*

*(i)* *De toute famille génératrice de* $E$*, on peut extraire une base de* $E$*.*

*(ii)* *Toute famille libre de* $E$ *peut être complété en une base de* $E$*.*

**Corollaire 1.3.2** (Caractérisation des bases)**.** *Soit* $E$ *un espace vectoriel de dimension finie* $p$ *et* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *une famille de vecteurs de* $E$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i)* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *est libre.*

*(ii)* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *est génératrice de* $E$*.*

*(iii)* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *est une base de* $E$*.*

**Preuve :** D'après la définition d'une base, $(iii)$ implique trivialement $(ii)$ et $(i)$.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est libre, on peut compléter en une base de $E$ via le théorème de la base incomplète. Or toutes les bases de $E$ on exactement $p$ éléments, donc en fait $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est déjà une base de $E$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Si $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est génératrice de $E$, on peut extraire une base de $E$ via le théorème de la base incomplète. Or toutes les bases de $E$ on exactement $p$ éléments, donc en fait $(x_1, x_2, ..., x_p)$ est déjà une base de $E$. ■

✎✎✎**Méthode 2** (Montrer qu'une famille de vecteurs $\mathcal{B}$ est une base de $E$)**.**

⋆ *Soit on montre qu'elle est libre et que* $\dim \mathcal{B} = \dim E$.

⋆ *Soit on montre qu'elle est génératrice et que* $\dim \mathcal{B} = \dim E$..

**Activité 1.3.5.** *Montrer que la famille* $\Big((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1)\Big)$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.

**Solution 1.3.5.** *Comme* $\mathbb{R}^3$ *est de dimension trois, et comme la famille considérée est constituée de trois éléments, nous saurons que cette famille est une base de* $\mathbb{R}^3$ *quand nous aurons montré qu'elle est libre ou génératrice.*
*Montrons qu'elle est libre. Soient* $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.
*On suppose que* $\alpha(0,1,2) + \beta(1,2,0) + \lambda(2,0,1) = (0,0,0)$.
*Alors on a :* $(\beta + 2\lambda, \alpha + 2\beta, 2\alpha + \lambda) = (0,0,0)$ *ce qui nous donne* $\alpha = -2\beta$, $\beta = -2\lambda$ *et* $\lambda = -2\alpha$. *Alors* $\alpha = -2\beta = 4\lambda = -8\alpha$, *et donc* $\alpha = 0$, *puis* $\beta = \lambda = 0$ *également.*
*Donc notre famille considérée est libre. Par conséquent elle est une base de* $E$.

**Théorème 1.3.2.** *Tout sous-espace vectoriel* $F$ *d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $E$ *de dimension finie est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$, *de plus* $\dim F = \dim E$ *si et seulement si* $E = F$.

## 1.4 Sous-espace vectoriel supplémentaire

### 1.4.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

**Définition 1.4.1.** *Si* $F$ *et* $G$ *sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel* $E$, *alors la* ***somme*** *de ces deux sous-espaces vectoriels est définie par :*
$F + G = \{x \in E : \exists x_1 \in F \text{ et } \exists x_2 \in G \text{ tel que } : \ x = x_1 + x_2\}$.

**Théorème 1.4.1.** *La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Preuve :** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$, montrons que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- $0_E \in F+G$, car $0_E = 0_E + 0_E$ et $F$, $G$ étant des sous-espaces vectoriels de $E$, ils contiennent tous $0_E$.Par suite, $F+G$ est non vide.
- D'autre part $F+G$ est un sous-ensemble de $E$, car par définition, c'est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ vérifiant $\exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que : $x = x_1 + x_2$.
- Soient $x, y \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $x + \lambda y \in F+G$.
  Comme $x, y \in F+G$, il est clair qu'ils existent $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$ tels que : $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$.
  Ainsi, $x + \lambda y = (x_1 + x_2) + \lambda(y_1 + y_2) = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$. Puisque $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, il en découle que $x_1 + \lambda y_1 \in F$ et $x_2 + \lambda y_2 \in G$. On en déduit que $x + \lambda y \in F+G$.

Donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$. ■

**Exemple 1.4.1.** *Considérons dans $\mathbb{R}^3$, les sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ définis par : $F = \langle(0,1,2)\rangle$ la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (0,1,2)$ et $G = \langle(1,0,2)\rangle$ celle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,0,2)$.*
*Alors $F+G = \langle(0,1,2),(1,0,2)\rangle$ est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (0,1,2)$ et $\overrightarrow{v} = (1,0,2)$.*

☞**Remarque 1.4.1.** *$F+G$ est le sous espace vectoriel de $E$ engendré par $F \cup G$.*

**Théorème 1.4.2** (Formule de Grassmann)**.** *Si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $E$ de dimension finie, alors $F+G$ est de dimension finie et :* $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

### 1.4.2 Somme directe

Étant donné deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace vectoriel $E$.
Si $F \cap G = \{0_E\}$, alors la somme des sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ est appelée **somme directe de $F$ et $G$** et est notée par :
$F \oplus G = \{x \in E : \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que : $x = x_1 + x_2$, avec $F \cap G = \{0_E\}\}$.

Si $F$ et $G$ sont en somme directe, on note $F + G = F \oplus G$. Autrement dit, la réunion d'une base de $F$ et d'une base de $G$ est une base de $E$.

**Définition 1.4.2.** *Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sont dits* ***supplémentaires*** *si et seulement si leur somme directe est égale à $E$ c'est-à-dire $F \oplus G = E$.*

Autrement dit, $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.
Dans ce cas, on dit aussi que $G$ (respectivement $F$) est un **sous-espace supplémentaire** de $F$ (respectivement $G$) dans $E$.

**Exemple 1.4.2.** *Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.*
*On a clairement $F \cap G = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.*
*D'autre part, on a $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, alors $F + G = \mathbb{R}^2$.*
*Par suite, $F$ et $G$ sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^2$ et on a : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.*

**Proposition 1.4.1.** *Tout sous-espace vectoriel $F$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie admet un supplémentaire $G$ et on a dans ce cas,* $\dim F + \dim G = \dim E$.

☞**Remarque 1.4.2.** *Il n'y a pas unicité du supplémentaire.*

**Corollaire 1.4.1.** *Deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sont dits supplémentaires si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et*
$\dim F + \dim G = \dim E$.

Chapitre Deux

# APPLICATIONS LINÉAIRES

On formalise dans ce chapitre le deuxième concept abstrait fondamental en algèbre linéaire : celui d'application linéaire. Le terme « **linéarité** » apparaît souvent en Mathématiques : linéarité de la somme, de la dérivation, de l'intégration(...). Voici précisemment ce qui se cache derrière ce mot.

## 2.1 Généralités

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

**Activité 2.1.1.** *Considérons l'application* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$.

*a°) Montrer que* $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2,\ f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.

*b°) Montrer que* $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha\overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u})$.

**Solution 2.1.1.**

*a°) Soient* $\overrightarrow{u}(x,y), \overrightarrow{v}(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f((x+a, y+b)) = (x+a)+(y+b) = (x+y)+(a+b) = f(\overrightarrow{u})+f(\overrightarrow{v})$.

*b°) Soient* $\overrightarrow{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha\overrightarrow{u}) = f((\alpha x, \alpha y)) = \alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = \alpha f(\overrightarrow{u})$.

✍✍✍***En pratique :*** *On dit dans ces conditions que $f$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.*

**Définition 2.1.1.** *Soit $f$ une application définie de $E$ vers $F$.*
*On dit que $f$ est une* ***application linéaire*** *si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

*i* - $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E \quad f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$.

*ii* - $\forall \overrightarrow{u} \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha f(\overrightarrow{u})$.

Autrement dit, une application linéaire est une application qui préserve la structure d'espace vectoriel.

☞**Remarque 2.1.1.**

- *Les deux conditions précédentes sont équivalentes à la condition suivante :*
  $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\overrightarrow{u} + \alpha \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + \alpha f(\overrightarrow{v})$.
- *Si $f$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.*
- *Lorsque l'espace d'arrivée $F = \mathbb{R}$, les applications linéaires sont appelées* ***formes linéaires****.*

**Exemple 2.1.1.**

*a) Une homothétie vectorielle de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & k\overrightarrow{u} \end{array}$, est une application linéaire.*

*b) La dérivation est une application linéaire de $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (ensemble de fonctions dérivables et de dérivées continues sur $\mathbb{R}$) dans $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (ensemble de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).*

**Définition 2.1.2.**

→ *Un* ***homomorphisme*** *est une application linéaire définie de $E$ vers $F$.*

→ *Un* ***endomorphisme*** *de $E$ est une application linéaire définie de $E$ vers $E$.*

→ *Un* ***isomorphisme*** *est un homomorphisme bijectif.*

→ *Un* ***automorphisme*** *est un endomorphisme bijectif.*

**Exemple 2.1.2.** *L'application $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & k\overrightarrow{u} \end{array}$ $(k \in \mathbb{R}^*)$ encore appelée homothétie vectorielle de rapport $k$, est un automorphisme de $E$.*

**Proposition 2.1.1.** *Soient $E, F$ et $G$ trois espaces vectoriels réels.*
*La composée $f \circ g$ de deux applications linéaires $f : F \to G$ et $g : E \to F$ est une application linéaire de $E$ dans $G$.*

**Preuve :** Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
$f \circ g(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}) = f(g(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v})) = f(g(\overrightarrow{u}) + \alpha g(\overrightarrow{v}))$ "Car $g$ est linéaire".
Donc $f \circ g(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}) = f(g(\overrightarrow{u}) + \alpha g(\overrightarrow{v})) = f(g(\overrightarrow{u})) + \alpha f(g(\overrightarrow{v}))$ "Car $f$ est linéaire".
Donc $f \circ g(\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}) = f(g(\overrightarrow{u})) + \alpha f(g(\overrightarrow{v})) = f \circ g(\overrightarrow{u}) + \alpha f \circ g(\overrightarrow{v})$.
D'où la composée $f \circ g$ est une application linéaire de $E$ dans $G$. ■

**Théorème et Définition 2.1.1** (Détermination de la forme analytique de $f$)**.** *Une application linéaire est entièrement déterminée si les vecteurs de sa base sont connus.*

**Activité 2.1.2.** *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $E$ et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que :*
$f(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ *et* $f(\overrightarrow{k}) = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.
*Donner la forme analytique de l'endomorphisme $f$.*

**Solution 2.1.2.** *Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ un élément de $E$ et $\overrightarrow{u'}(x', y', z')$ un élément de $E$ tel que :*
$\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u})$ *; où* $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{u} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ *et* $\overrightarrow{u'} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k} &= f(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}) \\
&= xf(\overrightarrow{i}) + yf(\overrightarrow{j}) + zf(\overrightarrow{k}) \quad \textit{car } f \textit{ est linéaire} \\
&= x(2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + y(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}) + z(-\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \\
x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k} &= (2x + y - z)\overrightarrow{i} + (x - y + 2z)\overrightarrow{j} + (x + 3y - z)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

*Ainsi, on obtient par identification :* $(S)\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x - y + 2z \\ z' = x + 3y - z \end{cases}$

$(S)$ *est la forme analytique de l'endomorphisme $f$.*

## 2.2 Matrice d'une application linéaire

**Définition 2.2.1.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $E$. On considère l'endomorphisme $f$ définie par $\mathcal{B}$ tel que :*
$f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ *et* $f(\overrightarrow{k}) = a''\overrightarrow{i} + b''\overrightarrow{j} + c''\overrightarrow{k}$
*avec* $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' \in \mathbb{R}$.
*On appelle* ***matrice*** *de l'application linéaire $f$ dans la base $\mathcal{B}$, le tableau carré noté par :*

$$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \quad ou \quad M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$$

*On peut aussi écrire cette matrice sous la forme :* $M_{(f,\mathcal{B})} = (f(\overrightarrow{i}), f(\overrightarrow{j}), f(\overrightarrow{k}))$

Ce tableau est une matrice carrée réelle d'ordre trois, à trois lignes et à trois colonnes. Les réels $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ sont appelés les **coefficients de la matrice**.

**Notation 2.2.1.** *Nous noterons par $\mathcal{M}_2$, l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2 et par $\mathcal{M}_3$, l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3.*

### 2.2.1 Quelques propriétés sur les matrices

Soient $f$ et $g$ deux applications linéaires ayant respectivement pour matrice dans la même base $\mathcal{B}$, $M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$, $M_{(g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

P1 - **Addition de deux matrices**

$M_{(f+g,\mathcal{B})} = M_{(f,\mathcal{B})} + M_{(g,\mathcal{B})}$

$$M_{(f,\mathcal{B})} + M_{(g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & x'+a' & x''+a'' \\ y+b & y'+b' & y''+b'' \\ z+c & z'+c' & z''+c'' \end{pmatrix}$$

Donc, $M_{(f+g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} x+a & x'+a' & x''+a'' \\ y+b & y'+b' & y''+b'' \\ z+c & z'+c' & z''+c'' \end{pmatrix}$

P2 - **Multiplication d'une matrice par un réel**

$M_{(\lambda f,\mathcal{B})} = \lambda M_{(f,\mathcal{B})}$

$$\lambda M_{(f,\mathcal{B})} = \lambda \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x' & \lambda x'' \\ \lambda y & \lambda y' & \lambda y'' \\ \lambda z & \lambda z' & \lambda z'' \end{pmatrix}$$

Donc, $M_{(\lambda f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x' & \lambda x'' \\ \lambda y & \lambda y' & \lambda y'' \\ \lambda z & \lambda z' & \lambda z'' \end{pmatrix}$

P3 - **Multiplication de deux matrices**

$M_{(f\circ g,\mathcal{B})} = M_{(f,\mathcal{B})} \times M_{(g,\mathcal{B})}$

$$M_{(f,\mathcal{B})} \times M_{(g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xa + x'b + x''c & xa' + x'b' + x''c' & xa'' + x'b'' + x''c'' \\ ya + y'b + y''c & ya' + y'b' + y''c' & ya'' + y'b'' + y''c'' \\ za + z'b + z''c & za' + z'b' + z''c' & za'' + z'b'' + z''c'' \end{pmatrix}$$

Donc, $M_{(f\circ g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} xa + x'b + x''c & xa' + x'b' + x''c' & xa'' + x'b'' + x''c'' \\ ya + y'b + y''c & ya' + y'b' + y''c' & ya'' + y'b'' + y''c'' \\ za + z'b + z''c & za' + z'b' + z''c' & za'' + z'b'' + z''c'' \end{pmatrix}$.

✎✎✎**Méthode 3** (Calcul du produit de deux matrices)**.** *Soient $i, j = 1, 2, 3$. Pour obtenir le coefficient situé à l'intersection de la $i^{me}$ ligne et de la $j^{me}$ colonne de $M_{(f\circ g,\mathcal{B})}$, on effectue le produit scalaire du vecteur de la $i^{me}$ ligne de $M_{(f,\mathcal{B})}$ et celui de la $j^{me}$ colonne de $M_{(g,\mathcal{B})}$.*

**✖✖✖ATTENTION :** En général, la multiplication "$\times$" des matrices n'est pas commutative ($M_{(f,\mathcal{B})} \times M_{(g,\mathcal{B})} \neq M_{(g,\mathcal{B})} \times M_{(f,\mathcal{B})}$).

En effet, il suffit de prendre $M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_{(g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Alors on a $M_{(f,\mathcal{B})} \times M_{(g,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $M_{(g,\mathcal{B})} \times M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Théorème 2.2.1.** $(\mathcal{M}_2, +, \bullet)$ *est un espace vectoriel réel de dimension* 4.

☞**Remarque 2.2.1.**

- *L'élément neutre pour la loi "+", appelé* ***matrice nulle****,est la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- *L'élément neutre pour la loi "×", appelé* ***matrice unité*** *ou* ***matrice identité****, est notée* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- *La base canonique de* $\mathcal{M}_2$ *est :* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

☞**Remarque 2.2.2.** *Une application linéaire est aussi déterminée par la donnée de sa matrice dans une base donnée.*

*Si* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ *et* $M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$. *Soit* $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$ *l'image de* $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ *par* $f$.

*Alors,* $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + a'y + a''z \\ bx + b'y + b''z \\ cx + c'y + c''z \end{pmatrix}$

*On a finalement, par identification,* $(S) \begin{cases} x' &= ax + a'y + a''z \\ y' &= bx + b'y + b''z \\ z' &= cx + c'y + c''z \end{cases}$

**Activité 2.2.1.** *Dans la base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, *on donne :* $M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

*Donner la forme analytique de* $f$.

**Solution 2.2.1.** *D'après ce qui précède, la forme analytique de* $f$ *est donnée par :*

$(S) \begin{cases} x' &= -2x + 3y \\ y' &= -1x + 5y + z \\ z' &= 2y - 3z \end{cases}$

### 2.2.2 Déterminant d'une matrice

**Définition 2.2.2.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *une matrice de* $\mathcal{M}_2$.

*On appelle déterminant de* $A$ *le réel noté :* $\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Si $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3$, on aura :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}.$$

Si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées quelconques, alors on a :
$\det(A \times B) = (\det A) \times (\det B) = \det(B \times A)$.

## 2.3 Noyau d'une application linéaire

**Activité 2.3.1.** *Soit* $E$ *un espace vectoriel de dimension* 3 *rapporté à une base* $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. *Soit* $f$ *l'endomorphisme de* $E$ *qui à tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de composantes* $(x, y, z)$ *dans* $\mathcal{B}$, *associe le vecteur* $\overrightarrow{u'}$ *de composantes* $(x', y', z')$ *dans* $\mathcal{B}$ *telles que :*

$$\begin{cases} x' &= -2x + y + z \\ y' &= x - 2y + z \\ z' &= x + y - 2z \end{cases}$$

*Déterminer l'ensemble des vecteurs* $\overrightarrow{u} \in E$ *tel que :* $f(\overrightarrow{u}) = 0_E$.

**Solution 2.3.1.** *Par définition,* $f$ *est une application linéaire.*

*Soit* $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in E$. $f(\overrightarrow{u}) = 0_E \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{cases}$

*En résolvant ce système par la méthode de substitution, on trouve* $x = y = z$.
*Donc* $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} = x(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = x(1, 1, 1)$.

*D'où l'ensemble cherché est la droite vectoriel de $E$ engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e}(1,1,1)$.*
✍✍✍***En pratique :*** *Cet ensemble est appelé noyau de l'application linéaire $f$.*

**Définition 2.3.1.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*On appelle* ***noyau de*** *$f$, l'ensemble des vecteurs de $E$ qui ont pour image le vecteur nulle de $F$. On le note* $\text{Ker}f = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = 0_F\}$.

La notation Ker$f$ vient du mot allemand "Kern" qui signifie noyau.

**Théorème 2.3.1.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*L'ensemble* Ker$f$ *est un sous-espace vectoriel de $E$.*

**Preuve :** On a : $\text{Ker}f = \{\overrightarrow{u} \in E / f(\overrightarrow{u}) = 0_F\}$.
Puisque $f$ est une application linéaire, on a $f(0_E) = 0_F$, il résulte que Ker$f$ n'est pas vide.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux éléments quelconques de Ker$f$.
On a : $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = 0_F + 0_F = 0_F$.
Donc le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ appartient donc à Ker$f$.
Soient $\overrightarrow{u}$ un élément quelconque de Ker$f$ et $\lambda$ un réel quelconque.
On a : $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) = \lambda 0_F = 0_F$. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ appartient donc à $Ker\ f$.
L'ensemble Ker$f$ est non vide ; il est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire ; c'est donc un sous-espace vectoriel de $E$. ■

**Théorème 2.3.2.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*L'application $f$ est* ***injective*** *si et seulement si :* $\text{Ker}f = \{0_E\}$.

**Preuve :** Supposons que l'application $f$ est injective.
Soit $\overrightarrow{u} \in E$. Alors $\overrightarrow{u} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = 0_F \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = f(0_E) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = 0_E$, car $f$ est injective .
Donc $\text{Ker}f = \{0_E\}$.
Réciproquement supposons que $\text{Ker}f = \{0_E\}$.
Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ tels que : $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v})$.

$f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v}) = 0_F \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 0_F$, car $f$ est une application linéaire
$\Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = 0_E$ car $\mathrm{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
Donc $f$ est une application injective. ■

**Activité 2.3.2.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.*
*L'endomorphisme $f$ est-il injectif ?*

**Solution 2.3.2.** *L'endomorphisme $f$ a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$,*
$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et pour expression analytique le système :* $(S) \begin{cases} x' &= x + y + z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= x + y - z \end{cases}$
*Cherchons $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{u}) = 0_E$.*
$f(\overrightarrow{u}) = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$
*Donc le vecteur $\overrightarrow{u}(x, y, z) = \overrightarrow{u}(0, 0, 0) \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = 0_E$.*
*Donc $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. D'où l'endomorphisme $f$ est injectif.*

## 2.4 Image d'une application linéaire

**Activité 2.4.1.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Considérons l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par sa matrice*
$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

*a°) Déterminer l'expression analytique de $f$.*

*b°) Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z) \in E$. Déterminer l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v}(a, b, c) \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*

**Solution 2.4.1.**

*a°)* *Soient* $\overrightarrow{u}(x,y,z) \in E$ *et* $\overrightarrow{u'}(x',y',z') \in E$ *l'image du vecteur* $\overrightarrow{u}$ *par* $f$.

*Alors on a :* $\overrightarrow{u'} = f(\overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$

*Par identification, l'expression analytique de* $f$ *est :* $(S) \begin{cases} x' &= -2x+y+z \\ y' &= x-2y+z \\ z' &= x+y-2z \end{cases}$

*b°)* $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2x+y+z \\ b &= x-2y+z \\ c &= x+y-2z \end{cases} \Leftrightarrow \quad a+b+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-b-c.$

*Donc* $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = (-b-c)\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = b(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + c(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$
$= b(-1,1,0) + c(-1,0,1).$

*D'où l'ensemble cherché est le plan vectoriel de* $E$ *engendré par les vecteurs* $\overrightarrow{e_1}(-1,1,0)$ *et* $\overrightarrow{e_2}(-1,0,1)$.

✍✍✍***En pratique :*** *Cet ensemble est appelé image de l'application linéaire* $f$.

**Définition 2.4.1.** *Soit* $f$ *une application linéaire d'un espace vectoriel réel* $E$ *dans un espace vectoriel réel* $F$.
*On appelle* ***image de*** $f$, *l'ensemble des vecteurs de* $F$ *qui ont au moins un antécédent dans* $E$. *C'est-à-dire l'ensemble* $f(E)$ *noté* $\mathrm{Im}f = \{\overrightarrow{v} \in F \ / \ \exists \overrightarrow{u} \in E : f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}\}$.

**Théorème 2.4.1.** *Soit* $f$ *une application linéaire d'un espace vectoriel réel* $E$ *dans un espace vectoriel réel* $F$.
*L'ensemble* $\mathrm{Im}f$ *est un sous-espace vectoriel de* $F$.

**Preuve :** On a : $\mathrm{Im}f = \{\overrightarrow{v} \in F \ / \ \exists \overrightarrow{u} \in E : f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}\}$.
Le vecteur $0_F$ est l'image par $f$ du vecteur $0_E$ (car $f$ est une application linéaire) et par suite $\mathrm{Im}f$ n'est pas vide.
Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux éléments quelconques de $\mathrm{Im}f$. Il existe donc deux éléments $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ de $E$ tels que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $f(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}$.
On a alors : $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'} = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{u'}) = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'})$.

Il résulte que $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'}$ est un élément de Im$f$.
Soient $\overrightarrow{v}$ un élément quelconque de Im$f$ et $\lambda$ un réel quelconque. Il existe donc un élément $\overrightarrow{u}$ de $E$ tel que : $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$.
On a alors : $\lambda\overrightarrow{v} = \lambda f(\overrightarrow{u}) = f(\lambda\overrightarrow{u})$. Il en résulte que $\lambda\overrightarrow{v}$ est un élément de Im$f$.
L'ensemble Im$f$ est non vide ; il est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire ; c'est donc un sous-espace vectoriel de $F$. ■

**Théorème 2.4.2.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*L'application $f$ est* ***surjective*** *si et seulement si :* Im$f = F$.

**Preuve :** L'application $f$ est surjective $\Leftrightarrow \forall\overrightarrow{v} \in F, \exists\overrightarrow{u} \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ $\Leftrightarrow$ Im$f = F$. ■

**Activité 2.4.2.** *Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Considérons l'endomorphisme $f$ de $E$ défini par sa matrice*
$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
*Determiner* Im$f$. *L'endomorphisme $f$ est-il surjectif ?*

**Solution 2.4.2.** *Soit $\overrightarrow{v}(a,b,c) \in E$, Cherchons $\overrightarrow{u}(x,y,z) \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*

$$f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= a \quad (1) \\ x-y+z &= b \quad (2) \\ x+y-z &= c \quad (3) \end{cases}$$

$(2)+(3) \Leftrightarrow 2x = b+c \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{b+c}{2}}$.
$(1)+(2) \Leftrightarrow 2x+2z = a+b \Leftrightarrow 2z = a-c \Leftrightarrow \boxed{z = \frac{a-c}{2}}$.
$(1)+(3) \Leftrightarrow 2x+2y = a+c \Leftrightarrow 2y = a-b \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{a-b}{2}}$.
*Donc $\overrightarrow{u}(\frac{b+c}{2}, \frac{a-c}{2}, \frac{a-b}{2})$ existe et est bel et bien un vecteur de $E$. Par suite,* Im$f = E$.
*Conclusion : L'endomorphisme $f$ est surjectif.*

☞**Remarque 2.4.1.** *Une application linéaire est* ***bijective*** *si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.*

D'autre part, lorsque $E$ est de dimension finie, on a :

**Théorème 2.4.3** (Théorème du Rang)**.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*On a alors :* $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E$.

**Corollaire 2.4.1.** *Soit $f$ une application linéaire d'un espace vectoriel réel $E$ dans un espace vectoriel réel $F$.*
*Si $E$ et $F$ sont de même dimension finie, les propositions suivantes sont équivalentes :*

*(i)- $f$ est injective*

*(ii)- $f$ est surjective*

*(iii)- $f$ est bijective*

**Preuve :** Montrons que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
$f$ est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker} f = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f = \dim E$ (D'après le Théorème 2.4.3) $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim F$ (car $E$ et $F$ sont de même dimension)
$\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F \Leftrightarrow f$ est surjective.
Dire que $f$ est injective équivaut donc à dire que $f$ est surjective, donc que $f$ est bijective.
■

## 2.5 Déterminant d'une application linéaire

**Définition 2.5.1.** *Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $E$. Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $M_{(f,\mathcal{B})}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ tels que : $f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$.*

*On appelle **déterminant** de l'endomorphisme $f$, le réel noté* $\det f$ *défini par :* $\det f = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

C'est le determinant des vecteurs $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$.
Donc on a : $\det f = \det(f(\overrightarrow{i}); f(\overrightarrow{j})) = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{b} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = ad - bc.$

☞**Remarque 2.5.1.** *Le déterminant d'un endomorphisme $f$ est aussi le determinant de sa matrice. Donc* $\det f = \det M_f$.

**Théorème 2.5.1.** *Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel réel $E$. l'application $f$ est bijective si et seulement si* $\det f \neq 0$.

**Théorème 2.5.2.** *Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel réel $E$. On a :* $\det(f \circ g) = \det(g \circ f) = (\det f) \times (\det g)$.

## 2.6 Matrices inverses

**Définition 2.6.1.** *Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $E$. Soient $f$ un endomorphisme bijectif de $E$ et $M_{(f,\mathcal{B})}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $f$ admet une bijection réciproque notée $f^{-1}$.*

*La matrice de l'application $f^{-1}$ est appelée l'**inverse de la matrice**(ou **matrice inverse**) de $M_{(f,\mathcal{B})}$ et est notée : $M_{(f^{-1},\mathcal{B})} = M^{-1}_{(f,\mathcal{B})}$.*

☞**Remarque 2.6.1.** *Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $E$. Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $M_{(f,\mathcal{B})}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ tels que : $f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ et $f(\overrightarrow{j}) = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$.*

- *$M_{(f,\mathcal{B})}$ est inversible si et seulement si* $\det M_{(f,\mathcal{B})} \neq 0$.
- $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E \Leftrightarrow M_{(f,\mathcal{B})}M_{(f^{-1},\mathcal{B})} = M_{(f^{-1},\mathcal{B})}M_{(f,\mathcal{B})} = I_2$
$\Leftrightarrow \det M_{(f^{-1},\mathcal{B})} \times \det M_{(f,\mathcal{B})} = 1.$
- *Nous avons la relation suivante :*

$$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{(f^{-1},\mathcal{B})} = \frac{1}{\det M_{(f,\mathcal{B})}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

.

- *$\mathcal{B}$ est une base de $E$ si et seulement si* $\det \mathcal{B} \neq 0$.

☞**Remarque 2.6.2.** *Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $E$. Soient $f$ un endomorphisme de $E$ et $M_{(f,\mathcal{B})}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ tels que : $f(\overrightarrow{i}) = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, $f(\overrightarrow{j}) = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{k}) = a''\overrightarrow{i} + b''\overrightarrow{j} + c''\overrightarrow{k}$. $M_{(f,\mathcal{B})}$ est inversible si et seulement si $\det M_{(f,\mathcal{B})} \neq 0$. Dans cette condition, on a :*

$$M_{(f,\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow M_{(f^{-1},\mathcal{B})} = \frac{1}{\det M_{(f,\mathcal{B})}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

.

✎✎✎**Méthode 4** (Détermination de l'inverse d'une matrice)**.** *Soient $i, j = 1, 2, 3$.*

1. *On calcule son déterminant.*
2. *Pour obtenir le coefficient situé à l'intersection de la $i^{me}$ ligne et de la $j^{me}$ colonne de $M_{(f^{-1},\mathcal{B})}$, on procède comme suit :*
   - ⋆ *On supprime les vecteurs de la $j^{me}$ ligne et de la $i^{me}$ colonne de $M_{(f,\mathcal{B})}$ ;*
   - ⋆ *On calcul le déterminant des coefficients restants ;*
   - ⋆ *On multiplie le résultat obtenu par $(-1)^{i+j}$.*

**Exemple 2.6.1.** *Calculez l'inverse de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

*Calcul du déterminant de $A$.*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) - (2-2) + (2-4) = -1.$$

*Donc* $\det A = -1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*La matrice inverse de $A$ cherchée est donnée par :* $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

# Exercices

## EXERCICES PAR ARTICULATION

**Exercice 1.** *Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :*

***a.*** $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$

***b.*** $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$

***c.*** $C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t \text{ et } y = z\}$

***d.*** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy \geq 0\}$

***e.*** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$

***f.*** $F = \{f \in \mathbb{R}, \mathbb{R} : f(0) = 1\}$

***g.*** $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y2) = 0\}$

***h.*** $H = \{f \in \mathbb{R}, \mathbb{R} : f \text{ croissante }\}$

***i.*** $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 = 0\}$

***j.*** $J = \{f \in \mathbb{R}, \mathbb{R} : f(1) = 0\}$

***k.*** $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = x + y + z = 0\}$

**Exercice 2.** *Soient $x$, $y$ et $z$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis par : $x = (2, 1)$, $y = (6, 3)$ et $z = (1, 3)$.*

1. *Que peut-on dire des familles $(x, y)$, $(y, z)$, $(x, z)$ et $(x, y, z)$ ?*
2. *Soit $t$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par : $t = (7, 11)$.*
   *Le vecteur $t$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par $x$ et $z$ ?*
3. *Quel est le sous-espace vectoriel engendré par $x$ et $y$ ?*

**Exercice 3.** *Soient $x$, $y$, $z$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par : $x = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $y = (\sqrt{3}, 1, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ et $z = (0, 5, \frac{5}{2})$.*

1. *Que peut-on dire des familles $(x, y)$, $(y, z)$, $(x, z)$ et $(x, y, z)$ ?*
2. *Quels sont les sous-espaces vectoriels engendrés par chacune de ces familles ?*
3. *Le vecteur $t$ de $\mathbb{R}^3$ défini par : $t = (10, 10, 0)$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x, y, z)$ ?*

**Exercice 4.** *Soit $E$ l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace rapporté à une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ définis par :* $\overrightarrow{u_1} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{i}$ *et* $\overrightarrow{u_3} = -2\overrightarrow{k} - 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$.
*Quelle est la dimension de $F$ ?*

**Exercice 5.** *Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par leurs composantes dans la base canonique : $\overrightarrow{e_1}(0,1,-1)$, $\overrightarrow{e_2}(2,3,1)$, $\overrightarrow{e_3}(5,0,1)$.*

1. *Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de composantes $(1,1,1)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Quelle sont ses composantes dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ ?*
3. *Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de composantes $(1,1,1)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Quelle sont ses composantes dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ ?*

**Exercice 6.** *Soit $\mathcal{P}_3$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, défini par : $\mathcal{P}_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c)\}$.*

1. *Montrer que $\mathcal{P}_3$ est un espace vectoriel réel.*
2. *Soient $e_0$, $e_1$, $e_2$ les trois éléments de $\mathcal{P}_3$ définis par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.*
   - *a- Démontrer que la famille $(e_0, e_1, e_2)$ est une base de $\mathcal{P}_3$ (Cette base est appelée la base canonique de $\mathcal{P}_3$).*
   - *b- En déduire la dimension de $\mathcal{P}_3$.*

*Nous convenons de dire, dans la suite, que $\mathcal{P}_3$ est l'ensemble des fonctions trinômes ou même, par abus de langage, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.*

**Exercice 7.** *Soient $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel défini à l'exercice précédent et $(e_0, e_1, e_2)$ sa base canonique. Soient $f$, $g$, $h$ les trois éléments de $\mathcal{P}_3$ définis par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x^2 + 3$, $h(x) = -x^2 - x + 2$.*

1. *Démontrer que la famille $(f, g, h)$ est une base de $\mathcal{P}_3$.*
2. *Soit $p$ le vecteur de $\mathcal{P}_3$ dont les composantes dans la base $(f, g, h)$ sont $(5, -2, 1)$. Quelle sont les composantes de $p$ dans la base canonique ?*
3. *Soit $q$ l'élément de $\mathcal{P}_3$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x) = 3x^2 + x + 6$. Quelles sont les composantes de $q$ dans la base $(f, g, h)$ ?*

**Exercice 8.** *Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des fonctions trinômes et soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathcal{P}_3$. Soient $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ quatre vecteurs de $\mathcal{P}_3$ donnés par leurs composantes respectives sur la base canonique : $f_1(1,2,3)$, $f_2(0,2,-1)$, $f_3(2,5,0)$, $f_4(3,7,3)$.*

1. *Soit $x$ un réel quelconque. Calculer : $(5f_1 + 2f_3)(x)$.*
2. *Soient $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $f_1$ et $f_2$ et $F'$ le sous-espace vectoriel engendré par $f_3$ et $f_4$. Quelle sont les dimensions respectives de $F$ et de $F'$ ?*
3. *Donner une base pour chacun d'eux.*

**Exercice 9.** *Considérons les sous-ensembles $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \langle (0,1,0) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer une base de $F$.*
3. *En déduire $\dim F$ et $\dim G$.*
4. *Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.*

**Exercice 10.** *Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = Vect\{(1,1,1)\}$.*

1. *Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel.*
2. *Déterminer une base de $F$.*
3. *Calculer $F \cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$. Que conclure ?*

**Exercice 11.** *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-x, y+z, 2z)$.*

1. *Montrer que $f$ est une application linéaire.*
2. *Calculer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. $f$ admet-elle un inverse ?*
3. *Même question avec $f(x,y,z) = (x-y, x+y, y)$.*

## EXERCICES DE SYNTHÈSE

**Exercice 12.** *Soient $E$ un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $E$. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f_k$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $f_k(\overrightarrow{i}) = (1-k)\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $f_k(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i} + (1-k)\overrightarrow{j}$. On défini l'ensemble $F_k = \{\overrightarrow{u} \in E : f_k(\overrightarrow{u}) = k\overrightarrow{u}\}$.*

1. *Écrire la matrice de l'endomorphisme $f_k$ dans la base $\mathcal{B}$.*
2. *Démontrer que $F_k$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*
3. *Déterminer le(s) réel(s) $k$ pour que $F_k$ contient au moins un vecteur non nul.*

4. *Donner une base de $F_k$ pour chaque valeur de $k$ trouvée.*
5. *Soient $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ les vecteurs qui engendrent les bases de $F_k$ ainsi trouvée. Démontrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base de $E$.*
6. *Pour chaque valeur de $k$ trouvée, écrire la matrice de $f_k$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.*

**Exercice 13.** *Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont sa matrice dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

1. *Déterminer $f(2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k})$.*
2. *Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.*
3. *Montrer que $\mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.*
4. *Calculer $M^2$ et $M^3$.*

**Exercice 14.** *Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont sa matrice dans la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $f^{-1}$.*
2. *Déterminer une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$, $f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$.*
3. *Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ en fonction des vecteurs de la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.*
4. *Déterminer la matrice des applications $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$.*

**Exercice 15.** *Dans chacun des cas, calculer le déterminant des matrices suivantes et leur matrice inverse si possible :*

***a.*** $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ ***b.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$ ***c.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ ***d.*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

***e.*** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ ***f.*** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***g.*** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***h.*** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

**Exercice 16.** *On considère les matrices carrées suivantes :* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. *Calculer, dans chaque cas, les opérations suivantes :*

***a.*** $A + B$ ***b.*** $A - B$ ***c.*** $A \times B$ ***d.*** $B \times A$ ***e.*** $A^{-1}$
***f.*** $B^{-1}$ ***g.*** $(A + B)^{-1}$ ***h.*** $(A \times B)^{-1}$ ***i.*** $(B \times A)^{-1}$ ***j.*** $A^{-1} \times B^{-1}$
***k.*** $B - A$

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**Exercice 17.** *Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :* $f(1, 0, 0) = (-2, -2, -4)$, $f(0, 1, 0) = (-3, -1, -4)$ *et* $f(0, 0, 1) = (3, 2, 5)$.

1. *Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer $f \circ f(x, y, z)$.*
3. *Soit $N = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 0\}$ et $I = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$.*
   *Montrer que $N$ et $I$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner des bases $\mathcal{B}_N$ et $\mathcal{B}_I$.*
4. *Montrer que la réunion des deux bases $\mathcal{B}_N$ et $\mathcal{B}_I$ est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.*
5. *Écrire la matrice $M_{(f,\mathcal{B})}$.*

**Exercice 18.** *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice sur $\mathcal{B}$ est :* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*On pose $u_1 = e_2 - e_1$, $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = -e_3$.*

1. *Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer $Kerf$ et $\mathrm{Im} f$.*
3. *Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

**Exercice 19.** *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

1. *Donner l'application linéaire $f$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique.*

2. *L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?*
3. *soient $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 4)$ et $w = (-1, 3, 2)$.*
   (a) *Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Donner la matrice de $f$ dans cette base.*

**Exercice 20.** *Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Déterminer des vecteurs non nuls $u$, $v$ et $w$ tels que : $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$.*
2. *Vérifier que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.*
3. *Déterminer la matrice $B$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.*
4. *Calculer $B^2$, $B^3$.*

**Exercice 21.** *On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $I = (1, 2, 3)$, $J = (2, 0, 5)$, $K = (0, 2, 1)$, $l = (-2, 3, 16)$ et $L = (4, 7, 32)$.*

1. *Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même telle que : $f(i) = I$, $f(j) = J$ et $f(k) = K$.*
2. *La déterminer.*
3. *Donner* $\mathrm{Ker} f$ *et* $\mathrm{Im} f$.
4. *Existe-t-il une application linéaire $g$ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même qui vérifie en plus des conditions vérifiées par $f$ la condition $g(l) = L$ ?*

**Exercice 22.** *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3)$.*
*Soit* $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. *On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ don la matrice dans la base canonique est $A$.*

1. *Déterminer* $\mathrm{Ker} f$ *et* $\mathrm{Im} f$.
2. *Montrer que la famille $\mathcal{U} = (e_1 - 2e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_2 + 2e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
3. *Déterminer la matrice $B$ de $f$ dans la base $\mathcal{U}$.*
4. *Pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, calculer $B^n$ et $A^n$.*

**Exercice 23.** *Soient trois vecteurs $e_1$, $e_2$, $e_3$ formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note $\phi$ l'application linéaire définie par : $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.*

1. *Écrire la matrice $A$ de $\phi$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$. Déterminer le noyau de cette application.*
2. *On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $e_1$, $e_2$, $e_3$ en fonction de $f_1$, $f_2$, $f_3$. Les vecteurs $f_1$, $f_2$, $f_3$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ?*
3. *Calculer $\phi(f_1)$, $\phi(f_2)$, $\phi(f_3)$ en fonction de $f_1$, $f_2$, $f_3$. Écrire la matrice $B$ de $\phi$ dans la base $(f_1, f_2, f_3)$.*
4. *On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$. Quelle relation lie $A$, $B$, $P$ et $P^{-1}$ ?*

**Exercice 24.** *Soient $P$ un plan vectoriel réel de base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\varphi$ un endomorphisme de $P$, de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

1. *Soient $\overrightarrow{v}(1,1)$, $\overrightarrow{v_1}(1,2)$, $\overrightarrow{w}(-1,-1)$, $\overrightarrow{w_1}(2,1)$ les vecteurs de coordonnées dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Déterminer $a$, $b$, $c$ et $d$ pour que l'on ait : $\overrightarrow{w} = \varphi(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{w_1} = \varphi(\overrightarrow{v_1})$.*
2. *Montrer que l'endomorphisme $\varphi$ trouvé est bijective (On montrera que $\varphi$ est injectif et surjectif).*
3. *Calculer la matrice de $\varphi^{-1}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

# Bibliographie


[1] Arnaud BODIN, Application Linéaire, http ://www.exo7.emath.fr/ficpdf, 2012.

[2] ARRETE N°53/D/43/MINEDUC/SG/IGP/ESG portant définition des programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement sécondaire général, Août 1998.

[3] Bernard YCART, Espaces vectoriels, Université Joseph Fourier, Grenoble, Maths en Ligne, Novembre 2011.

[4] Charles MVOMO OTAM et les autres, Majors en Mathématiques Terminales C-E, ASVA EDUCATION, Mars 2012.

[5] Christophe BERTAULT, Espaces vectoriels de dimension finie, MPSI.

[6] International Journal of Technologies in Higher Education, http ://www.profetic.org/revue, 2007.

[7] Jean-Louis ROUGET, Feuille d'exercices, http ://www.maths-france.fr, 2008.

[8] Pierre H. Cours de Mathématique en ECE1 au Lycée Joachim Du Bellay, http ://88.163.125.176/ece/, Avril 2008.

[9] Pinel D. Espaces vectoriels & Applications linéaires, document 779, http ://www.revisermonconcours.fr, Mars 2013.