Systèmes linéaires et applications

MANN MANYOMBE Martin Luther
dirigé par
Pr. FOUPOUAGNIGNI MAMA

Yaoundé, le 14 juillet 2014

⋆ ⋆ **Chapitre Un** ⋆ ⋆

Systèmes linéaires comme outil de modélisation transdisciplinaire

Introduction

La notion de systèmes linéaires est un concept qui se rencontre en mathématique et dans divers domaines tels que les sciences physiques, l'économie, l'hydraulique, la chimie. Dans ce chapitre, nous faisons ressortir l'importance des systèmes linéaires en le présentant comme un outil de résolution de problèmes que l'on retrouve non seulement en mathématiques mais aussi dans beaucoup de disciplines d'où sa transdisciplinarité.

1.1 Systèmes linéaires en interpolation polynômiale

On se donne un ensemble de points $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$ pour connaître la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction f par un polynôme de degré au plus n. On cherche dans ce cas un polynôme P tel que : $P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$ $\qquad (1)$

Un tel polynôme interpole la fonction mesurée aux points des mesures x_i. Le théorème d'interpolation de Lagrange nous assure de l'unicité du polynôme P de degré au plus n [8]. $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ où les coefficients a_i, $i = 0, \ldots, n$ sont à déterminer. La condition (1) conduit au système de $n+1$ équations linéaires en a_i :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u> Pour déterminer un polynôme d'interpolation, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires.

1.2 Systèmes linéaires en équations différentielles

On voudrait résoudre l'équation différentielle du second ordre à coéfficient constant :

$$\alpha u"(x) + \beta u'(x) + \gamma u(x) = ax^2 + bx + c \qquad (2)$$

où u est une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et (α, β, γ), (a, b, c) différents de $(0, 0, 0)$ donnés.

La solution générale de (2) est la somme de la solution générale de l'équation homogène $\alpha u"(x) + \beta u'(x) + \gamma u(x) = 0$ et d'une solution particulière de (2).

La forme générale de la solution générale de l'équation homogène dépend du discriminant de l'équation caractéristique associée à (2) : $\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$.

Recherche d'une solution particulière

Une solution particulière de (2) est un polynôme de degré au plus 2. Soit $u_p(x) = a'x^2 + b'x + c'$ une solution particulière de (2) où a', b' et c' sont des réels à déterminer. On a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha u_p^{"}(x) + \beta u_p^{'}(x) + \gamma u_p(x) \\ &= \alpha(2a') + \beta(2a'x + b') + \gamma(a'x^2 + b'x + c') \\ &= \gamma a'x^2 + (2\beta a' + \gamma b')x + 2\alpha a' + \beta b' + \gamma c' \end{aligned}$$

Par identification des termes, on obtient le système d'équations suivant : $\left\{ \begin{aligned} 2\alpha a' + \beta b' + \gamma c' &= c \\ 2\beta a' + \gamma b' &= b \\ \gamma a' &= a. \end{aligned} \right.$

La résolution de ce système permet de déterminer une solution particulière de (2).

En général, une solution particulière de l'équation différentielle : $\alpha u"(x) + \beta u'(x) + \gamma u(x) = P_n(x)$ avec P_n polynôme de degré au plus n est un polynôme Q_n de degré au plus n. Pour déterminer Q_n, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires.

1.3 Systèmes linéaires en géométrie analytique

1.3.1 Cas d'un changement de base

Soient (e_1, e_2, e_3) et (u_1, u_2, u_3) deux bases de $\mathbb{R}^3$ tels que : $u_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $u_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3 + e_3$ et $u_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ avec $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ des réels ([9]).

Soit X un vecteur de l'espace tel que $X = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On cherche à déterminer les coordonnées de X dans la base (u_1, u_2, u_3). Ceci revient à déterminer un triplet (x, y, z) de réels tel que $X = xu_1 + yu_2 + zu_3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} X & = & xu_1 + yu_2 + zu_3 \\ & \Updownarrow & \\ \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 & = & x(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + y(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + z(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \\ \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 & = & (a_1x + b_1y + c_1z)e_1 + (a_2x + b_2y + c_2z)e_2 + (a_3x + b_3y + c_3z)e_3 \end{array}$$

Le système (e_1, e_2, e_3) étant une base de l'espace, nous déduisons :

$$X = xu_1 + yu_2 + zu_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2z = \beta \\ a_3x + b_3y + c_3z = \gamma \end{array} \right.$$

Conclusion : Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base $\mathcal{B}_2$ connaissant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1$ et les coordonnées des vecteurs de base de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires.

1.3.2 Application affine

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ est une application affine si et seulement si elle conserve le barycentre ([12]). Son expression analytique est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + by + cz + d \\ y' = a'x + b'y + c'z + d' \\ z' = a"x + b"y + c"z + d" \end{array} \right. \qquad (3)$$

avec (a, b, c), (a', b', c') et $(a", b", c")$ différents de $(0, 0, 0)$.

Soit $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine d'expression analytique (3). L'ensemble des points invariants par f est : $Inv(f) = \{M \in \mathcal{E} : f(M) = M\}$.

On voudrait classifier les applications affines en fonction de l'ensemble de leurs points invariants.

Pour déterminer cet ensemble, on est amener à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ax + by + cz + d \\ y = a'x + b'y + c'z + d' \\ z = a"x + b"y + c"z + d" \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (S) \left\{ \begin{array}{l} (a-1)x + by + cz + d = 0 \\ a'x + (b'-1)y + c'z + d' = 0 \\ a"x + b"y + (c"-1)z + d" = 0 \end{array} \right.$$

- Si le système (S) n'a pas de solution alors $Inv(f) = \emptyset$. Dans ce cas, l'application affine f n'a pas de point invariant.
- Si le système (S) a une unique solution alors l'ensemble $Inv(f)$ est un singleton. Dans ce cas l'application affine f a un unique point invariant.

– Si le système (S) a une infinité de solution alors $Inv(f)$ est soit un plan ; soit une droite. Dans ce cas l'application affine a une infinité de points invariants.

Conclusion : Pour déterminer l'ensemble des plans invariants d'une application affine, on est amené à résoudre un système d'équations linéaires. L'ensemble solution de ce système peut permettre de classifier les applications affines.

1.4 Systèmes linéaires en programmation linéaire

L'objectif de la programmation linéaire est de trouver la valeur optimale d'une fonction linéaire sous un système d'équations de contraintes linéaires. La fonction à optimiser est baptisée "fonction économique". Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire ([2], [15]).

Soit une fonction économique Z telle que : $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
où les x_i sont des variables qui influent sur la valeur de Z et les c_i les poids respectifs de ces variables modélisant l'importance relative de chacune de ces variables sur la valeur de la fonction économique. Les contraintes relatives aux variables s'expriment par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_n \end{cases}$$

En ajoutant les variables d'écarts $s_1, s_2, \ldots, s_m$, le problème revient donc à minimiser ou maximiser la fonction $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + s_m = b_n \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \text{ et } s_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.$$

Cas pratique : En économie

Une entreprise fabrique et vend des articles de type a_1 et de type a_2. Les prix unitaires des deux types d'articles sont différents. Pour fabriquer ces articles, l'entreprise utilise trois machines A, B et C.

Pour fabriquer un article a_1, il faut utiliser les machines A et B pendant 1 heure chacune et la machine C pendant 3 heures.

Pour fabriquer un article de type a_2, on utilise les machines A et C pendant 1 heure chacune et la machine B pendant 2 heures.

Mais, les machines ne sont disponibles que 60 heures pour A, 90 heures pour B et 150

heures pour C. La fabrication et la vente d'un article de type a_1 génère un bénéfice de 10 000F et pour un article de type a_2, 5 000F. On note x et y les nombres respectifs d'articles a_1 et d'articles a_2 à fabriquer.
Combien faut-il fabriquer d'articles a_1 et d'articles a_2 pour obtenir dans ces conditions un bénéfice maximum ? Quel est ce bénéfice maximum ?

Solution :

• Recherche d'un programme de production :

Choix inconnues : x désigne le nombre d'articles de type a_1 et y le nombre d'articles de type a_2. Le couple $(x; y)$ est un programme de production.

Mise en équation :

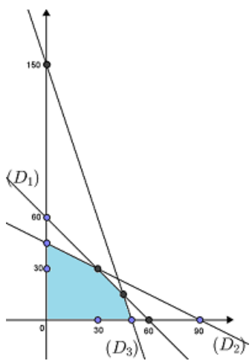
Le temps d'utilisation de la machine A pour fabriquer x articles de type a_1 et y articles de type a_2 est (en heure) : $x+y$. La machine A n'étant disponible que pendant 60 heures, on obtient la première contraintes : $(I_1) : x \cdot 1 + y \cdot 1 \leq 60$.

Le temps d'utilisation de la machine B pour fabriquer x articles de type a_1 et y articles de type a_2 est (en heure) : $x + 2y$. La machine B n'étant disponible que pendant 90 heures, on obtient la première contraintes : $(I_2) : x \cdot 1 + 2y \leq 90$.

Le temps d'utilisation de la machine C pour fabriquer x articles de type a_1 et y articles de type a_2 est (en heure) : $3x + y$. La machine C n'étant disponible que pendant 150 heures, on obtient la première contraintes : $(I_3) : 3x + y \cdot 1 \leq 150$.

De plus, x et y désignant des nombres d'articles, on a donc les deux contraintes : $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$. On obtient ainsi le système d'inéquations linéaires (Σ) dont on recherchera les solutions dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(\Sigma) \begin{cases} x + y \leq 60 & (I_1) \\ x + 2y \leq 90 & (I_2) \\ 3x + y \leq 150 & (I_3) \end{cases}$, $x, y \geq 0$.

Résolution du système de contraintes :



(D_1) est la droite d'équation : $x + y = 60$. Cette droite détermine deux demi-plans ouverts de frontière (D_1). $(\mathcal{P}_1)$ est celui des deux demi-plans qui contient et qui représente l'ensemble des solutions de (I_1).

(D_2) est la droite d'équation : $x + 2y = 90$. Cette droite détermine deux demi-plans ouverts de frontière (D_2). $(\mathcal{P}_2)$ est celui des deux demi-plans qui contient et qui représente l'ensemble des solutions de (I_2).

(D_3) est la droite d'équation : $3x+y=150$. Cette droite détermine deux demi-plans ouverts de frontière (D_3). $(\mathcal{P}_3)$ est celui des deux demi-plans qui contient et qui représente l'ensemble des solutions de (I_3).

• **Recherche d'une solution optimale :**

Le bénéfice réalisé sur un programme de production $(x;y)$ est : $b = 10000x + 5000y$. L'entreprise voudrait maximiser son bénéfice.

Désignons par (L_m) la droite d'équation : $10000x + 5000y = m$. Cette droite a pour coefficient directeur -2 et pour ordonnée à l'origine : $\frac{m}{5000}$. Pour que le bénéfice soit maximum, la droite (L_m) doit passer par un point dont le couple de coordonnées est un programme de production et avoir l'ordonnée à l'origine la plus grande ordonnée à l'origine. Parmi les droites de coefficient directeur -2, c'est celle qui passe par le point de coordonnées $(45;15)$ qui a la plus grande ordonnée à l'origine.

• **Conclusion :**

C'est en fabriquant 45 articles de type a_1 et 15 articles de type a_2 que le bénéfice est maximal. Dans ce cas, il vaut : 52500 F.

1.5 Systèmes linéaires en électricité

Un réseau électrique est constitué de dipôles actifs et passifs dont les bornes sont reliées entre elles par des fils conducteurs (on ne considère que des dipôles linéaires). Un noeud est un point commun à plusieurs conducteurs. Une branche est une portion de circuit comprise entre deux noeuds. Lorsqu'on parcourt plusieurs branches du réseau en revenant au point de départ après n'être passé qu'une fois en chaque noeud, on dit que l'on a parcouru une maille.

Pour étudier un tel réseau, on fixe sur chaque branche un sens arbitraire pour les intensités de courant et sur chaque maille un sens arbitraire de parcours (indépendant des sens choisis pour les intensités). **Loi des noeuds** ([3])

En aucun point du réseau, il ne peut y avoir accumulation des charges. Donc si l'on compte positivement les intensités qui arrivent en un noeud et négativement celles qui s'en éloignent, la somme algébrique des intensités est nulle. On obtient ainsi l'équation du noeud.

Lois des mailles ([3])

Dans chaque branche :

1. Les intensités sont comptées positivement si leur sens est le même que le sens de parcours sur la maille.
2. Les forces électromotrices sont comptées positivement si le générateur abaisse le potentiel, négativement dans le cas contraire (c'est-à-dire que les forces électromotrices sont

affectées du signe du premier pôle rencontré dans le sens de parcours de la maille). Quand on fait le tour complet d'une maille, la somme algébrique des différences de potentiel entre les différents noeuds est nulle. On obtient ainsi l'équation de cette maille.

On considère un réseau électrique constitué de b branches donc b courants inconnus, connectées par n noeuds et formant m mailles. On cherche à déterminer les courants dans toutes les branches du circuit.

Le noeud d'indice k est la jonction de p branches (d'indice j) parcourues par des courants I_j. Au noeud k la loi des noeuds s'écrit sous la forme algébrique suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0 \qquad (4)$$

La maille d'indice k contient q branches. La différence de potentiel entre les extrémités de la branche j s'écrit U_j. Comme la maille constitue un parcours fermé, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = 0 \qquad (5)$$

En procédant uniquement à des regroupements en série, on peut transformer toute branche j de la maille k en un générateur de force électromotrice (f.e.m) E_j en série avec une résistance R_{jk} parcourue par le courant I_j (si la branche ne contient pas de générateur alors $E_j = 0$). La loi des mailles peut donc aussi s'écrire sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{n} E_j - \sum_{j=1}^{n} R_{jk} I_j = 0 \qquad (6)$$

On obtient un système d'équations linéaires de d'inconnues I_M de la forme :

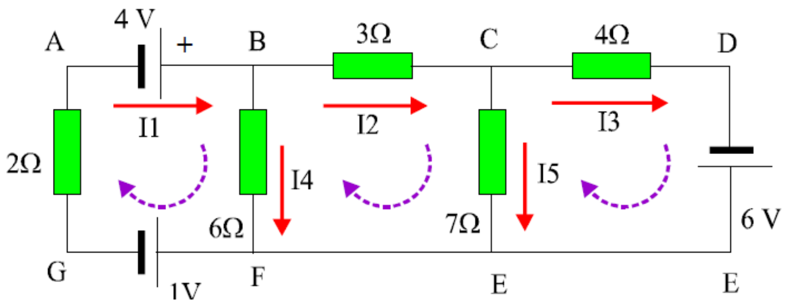
$$\begin{cases} R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \cdots + R_{1M}I_M = E_1 \\ R_{21}I_1 + R_{22}I_2 + \cdots + R_{2M}I_M = E_2 \\ \cdots \\ R_{M1}I_1 + R_{M2}I_2 + \cdots + R_{MM}I_M = E_M \end{cases}$$

Cas pratique :

On cherche les intensités des courants dans toutes les branches du circuit ci-dessous

Le choix du sens des courants dans les cinq branches est arbitraire. Il y a pour cet exemple trois courants à calculer I_1, I_2, I_3 car la loi des noeuds en B et C donne : $I_4 = I_1 - I_2$ et $I_5 = I_2 - I_3$.

- Pour la maille $ABFGA$, on obtient d'après (5) : $U_{AB} + U_{BF} + U_{FG} + U_{GA} = 0$. En utilisant (6), on a $-4 + 1 + 6(I_1 - I_2) + 2I_1 = 0$.
- Pour la maille $FBCEF$ en utilisant la relation (6), on a : $-6(I_1 - I_2) + 3I_2 + 7(I_2 - I_3) = 0$.
- Pour la maille $ECDE$ en utilisant la relation (6), on a : $-7(I_2 - I_3) + 4I_3 - 6 = 0$.



On obtient le système suivant : $\begin{cases} 8I_1 - 6I_2 = 3 \\ -6I_1 + 16I_2 - 7I_3 = 0 \\ -7I_2 + 11I_3 = 6 \end{cases}$

Conclusion : Dans un circuit électrique, lorsqu'on veut déterminer les intensités des courants dans toutes les branches de ce circuit, l'interprétation des lois physique (loi des noeuds, loi des mailles) conduit à un système d'équations linéaires d'inconnues les intensités des courants. La résolution de ce système permet de déterminer les intensités et le sens des courants dans toutes les branches de ce circuit.

1.6 Systèmes linéaires en chimie

On considère un mélange de m éléments chimiques. On a prédéterminé que les atomes différents peuvent se combiner pour produire n composés. Soit x_j le nombre de moles du composé j ($\mathcal{N}x_j$ est le nombre de molécules du composé j où $\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro), a_{ij} est le nombre d'atomes d'un élément i dans une molécule de composé j et $\mathcal{N}b_i$ est le nombre d'atomes de l'élément i dans le mélange. On veut identifier x_j c'est-à-dire la composition exacte du mélange. L'équation de bilan des masses donne le système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

auxquelles s'ajoutent des contraintes naturelles $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Cas pratique

Votre livre de diététique indique qu'un menu "bien équilibré" doit contenir 32 g de protéines, 30 mg de vitamines C, $0,3$ g de calcium et 900 calories. Par ailleurs vous décidez de composer votre menu de viande, de salade, de lait et d'épinards. Le tableau ci-dessous indique la teneur en protéines, vitamines, calcium et calories de ces aliments par 100 gr :

	Protéines	Vitamines	Calcium	Calories
viande	20 g	0	0,01	325
salade	1 g	15 mg	0,04 g	80
lait	3,3 g	1,5 mg	0,12 g	70
épinards	2,3 g	50 mg	0,07 g	22

On voudrait déterminer les quantités nécessaire de chaque aliments de ce menu pour qu'il soit équilibré.

Solution

• **Choix des inconnues :** Soient x, y, z et t les quantités respectives de viande, salade, lait et épinards nécessaire pour un menu "équilibré".

• **Mise en équation :**

La teneur de ce menu en protéine est (en g) : $20x + y + 3,3z + 2,3t$. La teneur en protéine nécessaire pour un menu équilibré étant de 32 g, on obtient l'équation : $20x+y+3,3z+2,3t = 32$.

La teneur de ce menu en vitamine est (en mg) : $15y + 1,5z + 50t$. La teneur en vitamine nécessaire pour un menu équilibré étant de 30 mg, on obtient l'équation : $15y+1,5z+50t = 30$.

La teneur de ce menu en Calcium est (en g) : $0,01x + 0,04y + 0,12z + 0,07t$. La teneur en vitamine nécessaire pour un menu équilibré étant de $0,3$ g, on obtient l'équation : $0,01x + 0,04y + 0,12z + 0,07t = 0,3$.

La teneur de ce menu en Calories est : $325x + 80y + 70z + 22t$. La teneur en protéine nécessaire pour un menu équilibré étant de 900, on obtient l'équation : $325x+80y+70z+22t = 900$.

Ainsi, pour déterminer la composition de ce menu afin qu'il soit "bien équilibré", il faut résoudre le système d'équations linéaires suivant : $$\begin{cases} 20x + y + 3,3z + 2,3t = 32 \\ 15y + 1,5z + 50t = 30 \\ 0,01x + 0,04y + 0,12z + 0,07t = 0,3 \\ 325x + 80y + 70z + 22t = 900. \end{cases}$$

Conclusion : Pour déterminer la composition exacte d'un mélange de produits chimiques, l'équation bilan des masses de ce mélange conduit à un système d'équations linéaires dont la résolution permet de trouver la composition du mélange.

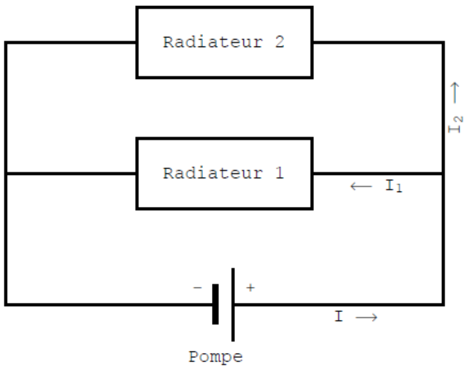
1.7 Systèmes linéaires en hydraulique

L'hydraulique est l'étude des écoulements. Les écoulements dans lesquels l'eau remplit complètement la canalisation sont dits écoulements à charge. C'est le cas notamment des réseaux d'eau potable ([4]).

Imaginons une pompe qui actionne un circuit hydraulique dont le liquide tourne en circuit fermé, par exemple le chauffage central d'un immeuble ([3]). Ses caractéristiques sont :

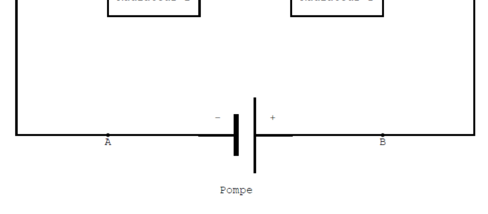
1. la pression entre l'entrée et la sortie de la pompe ;
2. la résistance que le radiateur oppose au passage du liquide (rétrécissement du tuyau) ;
3. le débit du liquide dans la tuyauterie.

Considérons d'abord le cas où deux radiateurs différents sont montés en parallèle comme l'indique la figure ci-dessous :
Connaissant le débit qui sort de la pompe, quel est le débit qui entre dans la pompe ?



Connaissant le débit qui sort de la pompe et celui qui entre dans le premier radiateur, quel est le débit qui entre dans le deuxième radiateur ?
• Le débit qui entre dans la pompe est égal à celui qui en sort sinon la pompe perdrait de l'eau (fuite) ou recevrait un apport d'eau. On a la règle générale : **Sur une portion du circuit non ramifiée, le débit est partout le même**.
• Le débit qui entre dans le deuxième radiateur est $I_2 = I - I_1$; sinon le circuit hydraulique perdrait de l'eau (fuite) ou recevrait un apport d'eau. Pour un embranchement (ou un noeud), **la somme des débits entrants est égale à la somme des débits sortants :** $I = I_1 + I_2$.

Considérons ensuite un circuit dans lequel deux radiateurs différents sont montés en série comme l'indique la figure ci-dessous :
La différence de pression entre deux points A et B est : $\Delta P_{AB} = P_B - P_A$ où P_A est la



pression au point A et P_B la pression au point B. Entre les points B et C, E et A, il n'y a qu'une conduite d'eau. Donc la pression est transmise intégralement c'est-à-dire $P_C = P_B$ et $P_E = P_A$; par suite $\Delta P_{BC} = 0$ et $\Delta P_{EA} = 0$.

Étant donné que le circuit est fermé, on a la règle générale suivante : **la somme des augmentations de pression est égale à la somme des chutes de pression**. On a : $\Delta P_{AB} = \Delta P_{CB} + \Delta P_{DC} + \Delta P_{ED} + \Delta P_{AE}$.

Pour un circuit hydraulique quelconque constitué de plusieurs branches dont on veut déterminer le débit dans chaque branche, en combinant les équations obtenues par les règles ci-dessus, on obtient un système d'équations linéaires.

Cas pratique : Réseaux de canalisation d'eau ([8])

Soit un réseau fermé de noeuds P_i et d'arêtes $E_{i,j}$ reliant les noeuds P_i et P_j. A chaque noeud est associé un potentiel U_i. Dans chaque arête circule un fluide dont l'intensité (ou le débit) est proportionnel à la différence des potentiels $q_{i,j} = k_{i,j}(u_i - u_j)$.

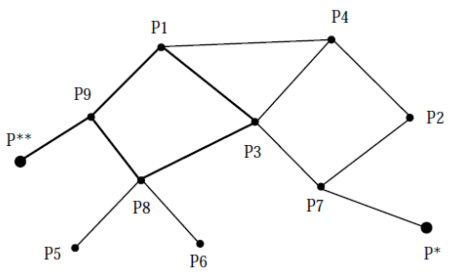


FIGURE 1.1 – Réseau de canalisation d'eau

Le réseau est alimenté à partir de noeuds sources. La loi de conservation impose que le débit total est nul si le noeud est isolé (à l'intérieur du réseau), ce qui se traduit par le système d'équation linéaire suivant :

$$\sum_{j\in V(i)} q_{i,j} = \sum_{j\in V(i)} k_{i,j}(u_i - u_j) = 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, 9$$

avec $V(i)$ = ensemble des voisins du noeud P_i et $u^* = u^{**} = u$ donnée sur les noeuds sources p^* et p^{**}.

On a : $V(1) = \{3, 4, 9\}$, $V(2) = \{4, 7\}$, $V(3) = \{1, 4, 7, 8\}$, $V(4) = \{1, 2, 3\}$, $V(5) = \{8\}$, $V(6) = \{8\}$, $V(7) = \{2, 3, P^*\}$, $V(8) = \{3, 5, 6, 9\}$ et $V(9) = \{1, 8, P^{**}\}$.

Pour alléger les notations, on prend $k_{i,j} = 1$, les équations du système linéaire sont :

$$\begin{aligned}
(u_1 - u_9) + (u_1 - u_4) + (u_1 - u_3) &= 3u_1 - u_9 - u_3 - u_4 = 0 \\
(u_2 - u_7) + (u_2 - u_4) &= 2u_1 - u_4 - u_7 = 0 \\
(u_3 - u_1) + (u_3 - u_7) + (u_3 - u_8) + (u_3 - u_4) &= 4u_3 - u_1 - u_4 - u_7 - u_8 = 0 \\
(u_4 - u_1) + (u_4 - u_3) + (u_4 - u_2) &= 3u_4 - u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\
u_5 - u_8 &= 0 \\
u_6 - u_8 &= 0 \\
(u_7 - u_3) + (u_7 - u_2) + (u_7 - u) &= 3u_7 - u_2 - u_3 - u = 0 \\
(u_8 - u_5) + (u_8 - u_6) + (u_8 - u_9) + (u_8 - u_3) &= 4u_8 - u_3 - u_5 - u_6 - u_9 = 0 \\
(u_9 - u_8) + (u_9 - u_1) + (u_9 - u) &= 3u_9 - u_1 - u_8 - u = 0
\end{aligned}$$

Les équations 5 et 6 implique $u_5 = u_6 = u_8$. En remplaçant u_6 et u_8 par u_5 dans les autres équations, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases}
3u_1 - u_3 - u_4 - u_9 = 0 \\
2u_1 - u_4 - u_7 = 0 \\
-u_1 + 4u_3 - u_4 - u_5 - u_7 = 0 \\
-u_1 - u_2 - u_3 + 3u_4 = 0 \\
-u_2 - u_3 + 3u_7 = u \\
-u_3 + 2u_5 - u_9 = 0 \\
-u_1 - u_5 + 3u_9 = u
\end{cases}$$

La résolution de ce système permet de déterminer d'une part le potentiel (pression) en chaque noeud et d'autre part le debit dans chaque branche du circuit.

Conclusion : Pour déterminer le débit ou la pression dans un circuit hydraulique, on est amener à résoudre un système linéaire.

1.8 Problèmes d'approximation numérique

De nombreux phénomènes physiques sont régis par un loi de diffusion : répartition de température, concentration de produits chimiques ou potentiel électrique. Dans tous les cas, on cherche à discrétiser les équations et à résoudre numériquement les équations mises en jeu. Pour des soucis de précision, de stabilité, de pertinence des résultats, on est amené à résoudre des systèmes linéaires ou non linéaires de grandes tailles. nous donnons un exemple illustratif :

Equation de la chaleur unidimensionnelle ([8])

La distribution de la température $u(x)$ au point x d'une plaque dont les cotés ont une température imposée $u = 0$ sur le bord et qui reçoit un apport calorifique extérieur de densité f est modelisée par une équation aux dérivées partielles. Soit $\Omega = [0, 1]$ désignant la plaque, la

température vérifie :
$$\begin{cases} -u"(x) = f(x), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad , x \in [0,1],\ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \qquad (7).$$
On s'intéresse à l'approximation de l'équation (7) afin de calculer u de manière approchée. On va pour cela introduire la méthode de discrétisation dite par différences finies. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h = \frac{1}{n+1}$ le pas de discrétisation c'est-à-dire la distance entre deux points de discrétisation et pour $i = 0, \ldots, n+1$, on définit les points de discrétisation $x_i = ih$ qui sont les points où l'on va écrire l'équation $-u" = f$ en vue de se ramener à un système discret c'est-à-dire à un système avec un nombre fini d'inconnues $u_1, \ldots, u_n$ avec $u_0 = u_{n+1} = 0$.
On écrit la formule de Taylor sur un point générique x_i. On a :

$$-u"(x_i) = \frac{1}{h^2}(-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})) + \mathcal{O}(h^2) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

On note par u_i une approximation de la solution exacte au point $u(x_i)$ et on obtient le système linéaire
$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) = f_i \quad \text{i=1,\ldots,n} \\ u_0 = u(0) = 0 \\ u_{n+1} = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ce système s'écrit encore : $\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \\ 0 & -1 & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$

Chapitre Deux

Problématique de la mise en équation dans l'application des systèmes linéaires

Introduction

La résolution des problèmes est une activité importante dans l'enseignement des mathématiques. Elle permet de montrer aux élèves l'importance des mathématiques dans la vie. Elle peut permettre de donner du sens, ou encore, montrer la pertinence et l'utilité d'une notion ou d'un savoir-faire. Les systèmes linéaires s'inscrivent dans ce sens car formidable outil de résolution de problèmes. De nombreux problèmes de la vie courante peuvent être satisfaits à l'aide des systèmes via une mise en équation. Cependant, la mise en équation est-elle sans difficultés pour les élèves ? Sinon, quelles sont les causes ? Pour y répondre, nous ferons dans la suite un état des lieux et quelques analyses.

2.1 État des lieux

Les performances des élèves dans la "mathématisation" (mise en équation) sont très mauvaises.

• Aux examens certificatifs ([14])

D'après les observatoires des examens consultés à l'inspection de pédagogie chargé des sciences, sur des échantillons de 100 copies, les taux de réussite dans les exercices faisant appel à la mise en équation sont les suivants :

– Région de l'Est : session 2013

Examens	ENIEG (Probatoire)	Probatoire FIG	Probatoire A_4
Taux de réussite	21%	15%	6%

– Région du Nord : session 2013

Examens	Probatoire CG-ACC	BACC CG-ACC	BACC BT-ESF
Taux de réussite	45%	44%	26%

2.2 Analyse du problème

2.2.1 Étude des manuels du programme

Dans le but de repérer l'existence de techniques enseignées en rapport avec la mise en équation et de savoir l'intérêt que les manuels du programme accorde à la résolution des problèmes se ramenant aux systèmes linéaires, nous avons choisi d'étudier les ouvrages suivants :

- Mathématiques $1^{ère}$ SE, collection inter africaine de mathématiques (CIAM), EDICEF ;
- Majors en Mathématiques Première SE, "collection ASVA EDUCATION" ;
- Majors en Mathématiques Terminale SE, "collection ASVA EDUCATION" ;
- Mathématiques Terminale SE, collection inter africaine de mathématiques (CIAM), EDICEF.

Pour simplifier la lecture de l'analyse tirée de ces manuels, nous désignons respectivement CIAM $1^{ère}$ SE, CIAM T^{le} SE, MAJORS $1^{ère}$ SE et MAJORS T^{le} SE.

Dans ces manuels, nous nous sommes intéressés de plus près au chapitre "SYSTÈMES LINEAIRES". On peut certes voir quelques différences entre ces manuels. En classe de première, les auteurs de CIAM semblent accorder plus d'importance à l'aspect "mathématisation de situations extra-mathématiques" que ceux de MAJORS ; ils multiplient notamment un peu plus les exemples de résolution de problèmes concrets dans les travaux pratiques (04 exemples résolus). Ce constat est le même en classe de terminale car les auteurs de CIAM consacrent une partie du chapitre sur les systèmes linéaires aux problèmes se ramenant aux systèmes linéaires tandis que ceux de MAJORS n'y reviennent plus.

Mais finalement, l'étude approfondie du chapitre en parallèle dans CIAM $1^{ère}$, T^{le} SE et MAJORS $1^{ère}$ SE permet de tirer des conclusions communes sur le rapport institutionnel à l'objet "méthode de mise en équation de problèmes concrets". On peut constater d'après ces manuels que la "mise en équation" est vue comme un réel enjeu d'apprentissage. Un autre indice est la place assez importante que la "mise en équation" prend dans les travaux pratiques ou exercices résolus (plusieurs exercices présentés dans cette partie du chapitre sont des exemples de mise en équation de problèmes concrets).

Dans ces manuels, une partie est constituée de connaissances théoriques sur la résolution de systèmes linéaires : définitions et méthodes de résolution (méthode de GAUSS), et une autre partie est constituée de travaux pratiques (exemples résolus). Dans cette dernière partie, aucune méthode de résolution de problèmes n'est décrite explicitement. Néanmoins, à travers les exemples résolus dans ces manuels, nous identifions quatre étapes dans la méthode de mise en équation : choix des inconnues, mise en équation, résolution mathématique, contrôle et exploitation des résultats.

2.2.2 Étude des cahiers de cours

Avec la collaboration de mes camarades stagiaires nous avons au cours de notre stage pratique analysé les cahiers de cours et d'exercices de plusieurs élèves des classes de "$1^{ère}D$" et "$T^{le}D$" de différents lycées de Yaoundé. Cette analyse avait pour but d'identifier certaines causes des difficultés des élèves sur la mise en équation en rapport avec les pratiques de classe. Au cours de cette analyse, nous avons mis l'accent sur les cahiers de "$1^{ère}D$" classe dans lequel le programme officiel accorde une importance aux problèmes se ramenant aux systèmes linéaires.

Dans tous ces cahiers, la leçon sur les systèmes linéaires présentent une structure assez similaire avec une partie théorique où l'accent est mis sur les méthodes de résolution des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ et quelques exercices d'applications sur la résolution des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode de GAUSS.

Dans les cours analysés, il n'y a pas trace d'une méthodologie décrivant ou explicitant les étapes de la "mise en équation". On y voit très peu de travaux pratiques (la plupart deux exemples de problèmes et d'autres un seul). En observant de plus près ces exemples, pour la plupart, un système à résoudre est donné et suit donc l'énoncé d'un problème dont la mise en équation conduit au système donné plus haut. Dans la résolution de ces exemples, les étapes de résolution de problèmes tel que observé dans les manuels au programme n'ont pas été explicitées ; on y voit le système obtenu et les solutions algébriques du système. Nous constatons qu'aucune démarche n'a été mise en oeuvre pour que les élèves puissent de manière autonome retrouver la formulation mathématique d'un problème posé.

2.2.3 Avis des enseignants

L'enseignant joue un rôle de choix dans la transmission des connaissances mathématiques. Il est maître de ses méthodes d'enseignement et décide de la manière avec laquelle il aborde une notion, ainsi que du temps et de l'énergie qu'il consacre à cette tâche. Afin d'avoir l'avis des professionnels de l'enseignement sur cette difficulté des élèves, d'identifier les causes de difficultés des élèves d'une part et les causes des insuffisances observées dans les cahiers d'autres part, nous nous sommes rapprochés des enseignants et nous avons recueilli les informations cherchées via un questionnaire.

a) Présentation du questionnaire

Nous avons élaboré un questionnaire destiné aux enseignants de mathématiques ayant exercés dans les classes de première et terminale. Ce questionnaire doit nous rendre compte de l'avis des enseignants sur cette difficulté de mise en équation, de l'importance qu'ils accordent à cette tâche de "mathématisation" de problèmes concrets et de la manière dont ils s'y prennent pour faire comprendre aux élèves la méthode de mise en équation. C'est l'objet des questions 2, 3 et 4 de notre questionnaire. Enfin, notre questionnaire doit ressortir certaines causes des insuffisances observées dans les cahiers. C'est l'objet de la question 5. Nous nous sommes rapprochés des enseignants de certains lycée de la ville de Yaoundé (Lycée Général Leclerc, Lycée bilingue de Yaoundé, lycée d'Etoug-Ebé, Lycée de Tsinga, Lycée bilingue d'application, Lycée de la Cité-verte).

b) Analyse des réponses au questionnaire

Nous avons recueilli les réponses de 17 enseignants. Les réponses données par les enseignants ont été diverses. Les enseignants interrogés confirment la difficulté des élèves dans la mise en équation de problèmes concrets. Nous avons retenu les réponses qui nous paraissent remarquables.

A la question « 3- Dans la leçon SYSTÈMES LINÉAIRES mettez-vous l'accent sur la mise en équation dans la résolution des problèmes ? », la plupart des enseignants ont confirmé qu'ils le font à travers les exercices d'applications. Voici l'une des réponses : « oui, à travers les exercices d'applications ; mais même à travers ces exercices il n'est pas toujours facile de faire comprendre la notion aux élèves. Il faut varier les situations et faire beaucoup d'applications mais il n'y a pas suffisamment de temps ». Il ajoute : « Il n'y a pas de raison de ne pas mettre l'accent sur la mise en équation en classe de première car il est prescrit par le programme officiel ». Néanmoins, quatre enseignants nous ont confirmé qu'ils n'insistent pas sur la mise en équation car il n'y a pas suffisamment de temps et ils ajoutent : « Les problèmes de français et la complexité à interpréter certains énoncés font en sorte qu'il est difficile de faire cette partie de la leçon aux élèves ». A travers les diverses réponses données, nous remarquons qu'aucune démarche de mathématisation n'est faite en cours.

A la question « 4- Être apte à faire une bonne mise en équation est-il un savoir-faire qui mérite votre préoccupation lors de votre cours sur les systèmes linéaires ? », ils ont répondu : « oui, car dans les problèmes se ramenant aux systèmes linéaires, la mise en équation est une réelle difficulté chez les élèves ». Plusieurs enseignants ajoutent : « Elle permet de comprendre l'importance des mathématiques dans la vie mais le temps d'insister sur cela fait défaut ». Mais certains enseignants affirment ne pas se préoccuper de cela car selon eux, la mise en équation est à la portée des élèves puisqu'ils sont censés le faire dans les classes antérieures. Ils soulèvent quand même la difficulté des élèves à interpréter un problème.

A la question 5, concernant les observations faites dans les cahiers des élèves, la grande majorité des enseignants interrogés justifient cela d'une part au fait qu'il n'y a pas suffisamment de temps et d'autre part à la complexité à faire comprendre aux élèves. Pour d'autres, en plus du manque de temps, ils justifient aussi cela par la non régularité des problèmes se ramenant aux systèmes linéaires dans les épreuves des examens officiels.

Tableau synthétique des réponses

Les réponses aux questions sont rangées en trois catégories :
A) Je mets l'accent sur la mise en équation dans le cours enseignant aux élèves, une méthodologie de mise en équation.
B) Je mets l'accent sur la mise en équation dans les exercices mais il n'y a pas assez de temps pour varier les situations.
C) Je ne mets pas l'accent sur la mise en équation vu sa complexité, le manque de temps.

Questions	A	B	C
3	00	13	04
4	00	13	04
5	00	10	07
Total	00	36	15
Pourcentage	00	70,58	29,41

Commentaire des analyses

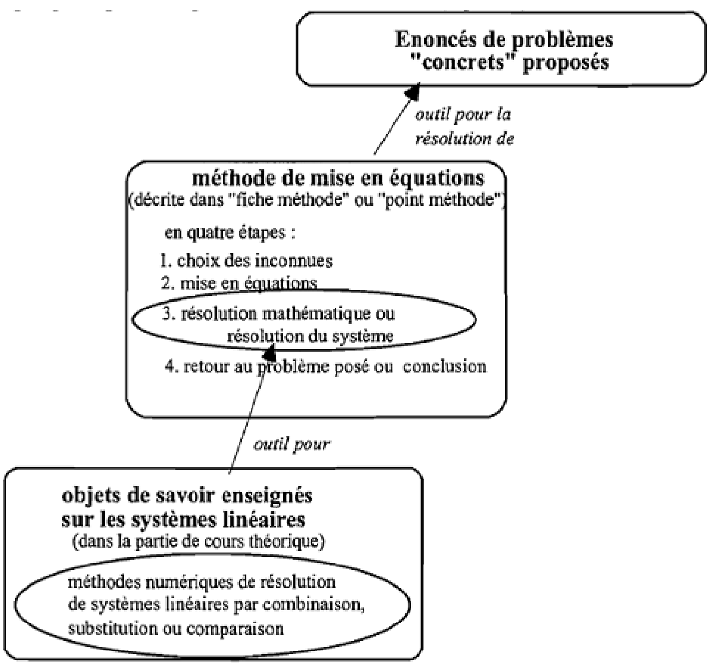
Il ressort de nos analyses que les manuels au programme notamment CIAM $1^{ère}$ et T^{le} SE et MAJORS $1^{ère}$ SE accordent une importance à la résolution de problèmes concrets se ramenant aux systèmes linéaires. Néanmoins, aucune méthodologie de mise en équation n'est clairement explicitée. C'est à travers les exemples résolus que l'on identifie les étapes de la "mise en équation" (choix des inconnues, mise en équation, résolution mathématique, conclusion). L'analyse des cahiers de cours fait ressortir quelques insuffisances rencontrées dans l'enseignement des systèmes linéaires notamment dans la partie de résolution de problèmes (absence d'une méthodologie, manque de travaux pratiques). On peut dire que les difficultés des élèves sur la mise en équation proviennent de ces insuffisances. L'analyse du questionnaire fait ressortir une autre cause : Celle de la complexité de certains énoncés où la difficulté se trouve dans ce cas au niveau de l'interprétation de l'énoncé. Pour contourner cette difficulté, un système est résolu avant le problème, ce qui pousse les élèves devant ce genre de problème, à plaquer le système résolu plus haut comme mise en équation du problème sans analyse adéquat.

2.3 Propositions

La notion de systèmes linéaires est un outil dont dispose les enseignants pour montrer l'importance des mathématiques dans la vie courante. Néanmoins son enseignement présente quelques insuffisances dans la partie de résolution des problèmes concrets.

Les expériences ayant montré que ce sont des faits et des vécus quotidiens qui restent en mémoire, il est donc important pour l'enseignant d'exposer la présence de la notion dans d'autres domaines, autrement dit de justifier sa transdisciplinarité. D'où la nécessite de donner aux enseignants un vaste champ d'applications des systèmes linéaires.

Du fait que les difficultés des élèves dans la mise en équation proviennent des insuffisances dans l'enseignement des systèmes linéaires, Nous prônons le fait qu'il faudrait enseigner dans le cours sur les systèmes linéaires, une méthodologie de mise en équation et faire des travaux pratiques où l'on varie les situations. En effet, La méthodologie de mise en équation s'inscrit dans le schéma suivant :



D'après le schéma ci-dessus, l'objectif principal du chapitre sur les systèmes linéaires est de donner aux élèves les outils pour la résolution des problèmes. Ainsi, après avoir consacré une première partie du cours aux différentes méthodes de résolution des systèmes linéaires, une deuxième partie doit être consacrée aux applications des systèmes linéaires (résolution de problèmes) dans lequel une méthodologie de mise en équation doit être enseignée aux élèves. L'enseignant pourrait à partir d'une activité introductrice dégager les étapes d'une mise en équation et déduire avec les élèves une méthodologie de mise en équation. A partir de cette méthodologie, il pourra impliquer les élèves en leur faisant résoudre plusieurs exercices variés de problèmes "concret" afin que ceux-ci puissent s'approprier cet outil de résolution de problèmes. Nous pensons également qu'il faudrait proposer aux élèves, des problèmes concrets dont l'objectif est la mise en équation, sans toutefois leur donner un système à résoudre au préalable et dont la mise en équation du problème conduit à ce système.

Du fait que les difficultés des élèves dans la mise en équation proviennent également de la complexité de certains énoncés, l'analyse des exercices du chapitre "SYSTÈMES LINÉAIRES" des manuels scolaires, nous montre que la méthode de "mise en équation" respecte quelques règles de contrat didactique. Nous proposons donc comme solution à cette difficulté, ces règles de contrat didactique tirées des travaux de COULANGE Lalina [5], décrivant les comportements des élèves et des enseignants pendant des activités de mise en équation.

- R_1 : Pour résoudre un problème "concret", il faut chercher à écrire un système linéaire à partir de l'énoncé.
- R_2 : Les grandeurs à prendre en compte comme inconnues apparaissent dans l'énoncé.
- R_3 : Les grandeurs à prendre en compte comme inconnues sont les grandeurs cherchées apparaissant dans la question à la fin de l'énoncé.

Les élèves pourront mieux s'en inspirer pour résoudre des exercices de problèmes se ramenant aux systèmes linéaires. Notons que la complexité des exercices sur les problèmes concrets provient lorsque les énoncés de ces exercices ne respectent pas ces règles. Illustrons ce propos par un exemple.

Exercice :

Un marchand vend des stylos à bille de marque "SCHNEIDER".
Du lundi au samedi, il vend ses stylos à un tarif normal puis applique un tarif réduit pour les vendre sur le marché du dimanche (ces deux tarifs sont les mêmes d'une semaine sur l'autre).
La première semaine, il vend 65 stylos au tarif normal et 18 stylos au tarif réduit le dimanche.
Son bénéfice hebdomadaire est alors de 939 francs.
La deuxième semaine, il vend 52 stylos au tarif normal et 12 stylos au tarif réduit le dimanche.
Son bénéfice hebdomadaire est alors de 756 francs.
Le tarif réduit représente-t-il un gain ou une perte pour le marchand ? De combien ?

Analyse a priori de cet exercice

La difficulté de cet exercice ne réside pas dans l'écriture du "bon" système linéaire à partir de l'énoncé mais dans le choix des inconnues à faire pour résoudre correctement ce problème (la résolution mathématique du système obtenu est assez simple). En effet, les inconnues à choisir pour écrire le "bon" système : bénéfices au tarif normal et réduit, ne sont pas explicitement citées dans les phrases à "traduire" sous forme d'équations ("La première semaine, elle vend 65 stylos au tarif normal et 18 stylos au tarif réduit le dimanche") et ne correspondent pas non plus à des grandeurs directement demandées par la question en fin d'énoncé ("le tarif réduit représente-t-il un gain ou une perte pour le marchand ? De combien ?").

Ainsi cet exercice se trouve en "rupture" par rapport aux règles R_2, R_3 : l'élève agissant dans le plus strict respect de ces règles va donc choisir comme inconnues les tarifs et non les bénéfices. Cependant si dans un premier temps, il obéit à ces règles, il est possible que l'incohérence de son résultat numérique (un tarif même "réduit" ne peut être négatif !) le conduise à un retour réflexif sur le choix des inconnues en doutant de la validité du système écrit. On en arrive ainsi à une typologie de réponses d'élèves à ce problème que l'on peut résumer par le tableau suivant :

<table>
<tr>
<td><u>Réponse de type 1</u>
Soient p_1 le tarif normal et p_2 le tarif réduit. En traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système
$$\begin{cases} 65p_1 + 18p_2 = 939 \\ 52p_1 + 12p_2 = 756 \end{cases}$$
En résolvant ce système, on trouve : $p_1 = 15$ et $p_2 = -2$.
D'où le tarif réduit représente une perte pour le marchand de 2 francs.</td>
<td>Réponse incorrecte mais conforme aux règles du contrat R_2 et R_3.
$\rightarrow$ possibilité de rétroaction</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

<u>Réponse de type 2</u>
Soient b_1 le bénéfice au tarif normal et b_2 le bénéfice au tarif réduit. En traduisant les hypothèses de l'énoncé, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} 65b_1 + 18b_2 = 939 \\ 52b_1 + 12b_2 = 756 \end{array}\right.$$

En résolvant ce système, on trouve : $b_1 = 15$ et $b_2 = -2$.
Donc le tarif réduit représente une perte pour le marchand de 2 francs.

</td>
<td>Réponse correcte</td>
</tr>
</table>

♣ Conclusion ♣

Au terme de notre travail, nous constatons que la notion de systèmes linéaires s'avère être un formidable outil de résolution de problèmes que l'on retrouve dans divers domaines. Il ressort de notre réflexion que les principales difficultés des élèves dans la mise en équation de problèmes concrets proviennent de la complexité des énoncés d'une part et des insuffisances dans l'enseignement des systèmes linéaires notamment sur la partie résolution de problèmes concrets d'autre part. A travers nos propositions, nous pensons que les enseignants pourront s'en inspirer pour accorder pendant la leçon sur les systèmes linéaires, une attention particulière sur la résolution de problèmes concrets. D'autre part, les élèves pourront s'en inspirer pour surmonter leurs difficultés dans la résolution de problèmes concrets se ramenant aux systèmes linéaires.