Systèmes linéaires

MANN MANYOMBE Martin Luther

Yaoundé, le 14 juillet 2014

Table des matières

1 Dénomination de la ressource et des contributeurs

- Titre de la ressource : **Systèmes linéaires**
- Nom de l'étudiant : **Mann Manyombe Martin Luther**
- Nom de l'encadreur de l'ENS : **Prof. Foupouagnigni Mama**
- Nom de l'inspecteur : **Mr Adjaba Biwoli**
- Nom de l'encadreur du lyçée : **Mr Fotsing Joseph**

2 Objectifs pédagogiques

2.1 Ojectifs généraux

Cette ressource vise essentiellement à :

– Résoudre des problèmes faisant appels aux systèmes linéaires ;

– Déployer un raisonnement mathématique à l'aide des connaissances sur les systèmes linéaires.

2.2 Objectifs pédagogiques spécifiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

– Définir les équations linéaires et les systèmes d'équations linéaires

– Reconnaître les différentes transformations élémentaires d'une équation linéaire

– Résoudre les systèmes d'équations par la méthode de Gauss

– Résoudre les systèmes par la méthode de combinaison

– Interpréter géométriquement un système dans $\mathbb{R}^3$.

Les outils préconisés sont :

(i) La méthode de Gauss

(ii) D'autres méthodes (combinaison, substitution).

Savoirs

- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires
  - Échange de deux lignes ;
  - Multiplication d'une ligne par un nombre non nul ;

  - Combinaison d'une ligne avec une autre ligne.

- Principe de la méthode de Gauss
- Interprétation géométrique
  - Position relative de deux plans de l'espace ;
  - Position relative de trois plans de l'espace.
- Utilisation des systèmes linéaires pour résoudre des problèmes

Savoirs-faire

- Transformer un système linéaire en un système équivalent ;
- Transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent par la méthode de Gauss ;
- Résoudre d'un système linéaire ;
- Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire.
- choisir les inconnues et faire la mise en équation

3 Liens avec les autres parties du programme

Les parties du programme en lien avec les systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$ sont :

- La géométrie dans l'espace ; en effet, l'étude des positions relatives de plusieurs plan de l'espace renvoie à la résolution du système linéaire formé à partir des équations des ces plans.
- Les primitives et intégrales ; en effet dans la recherche des primitives de certaines fonctions rationnelles, la décomposition en éléments simples nous conduit généralement à un système d'équations.

4 Introduction

En classe de Première la résolution des systèmes d'équations linéaires par une méthode d'élimination a été introduite ; rappelons simplement que l'idée de cette méthode est de transformer un système initial en un système facile à résoudre. Dans cette ressource, nous donnons quelques méthodes de résolutions des systèmes linéaires et l'interprétation géométrique de ces systèmes. L'apprenant doit être familier avec les méthodes de résolutions des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ (combinaison, substitution) et $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss) et l'interprétation géométrique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$.

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations faisant appels aux mêmes inconnues. Dans la vie courante et en science, les phénomènes dépendent le plus souvent de plusieurs paramètres. Leurs formulations mathématiques conduisent à des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Les systèmes d'équations interviennent dans plusieurs domaines notamment en Mathématiques, informatique, physique, économie, finances, etc... La résolution de systèmes linéaires s'avère être un formidable outil de résolution de problèmes.

La ressource intitulé Systèmes Linéaires est d'une grande importance, elle permettra à l'apprenant de résoudre des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, de déterminer les positions relatives de plusieurs plans dans l'espace (interprétation géométrique des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$), de résoudre des problèmes concrets se ramenant aux systèmes linéaires.

Il s'agira donc tour à tour de définir les notions d'équations et de systèmes d'équations linéaires ; de donner les différentes transformations élémentaires permettant de passer d'un système à un autre qui lui est équivalent ; de donner les méthodes de résolutions d'un système linéaire : l'accent sera mis sur la méthode de Gauss ; de donner une interprétation géométrique des systèmes linéaires et de résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes linéaires.

Pré-requis

Les exigences de ce cours partent des connaissances que l'apprenant a sur les notions suivantes :

- Equation de droite et équation du plan
- Equations et systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Solution d'un système linéaire
- Méthodes de résolution des systèmes dans $\mathbb{R}^2$

– Méthodes de Gauss, combinaison, substitution

– Résolution graphique des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Contrôle des pré-requis

Exercice 1. .

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(1)\begin{cases} 3x-6y=12 \\ -5x+10y=-20 \end{cases};\quad (2)\begin{cases} 2\ln x-\ln y=0 \\ 4\ln x+\ln y=3 \end{cases};\quad (3)\begin{cases} \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=1 \\ -x+\frac{3}{2}y=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} \frac{3}{x-1}+2(y-5)=5 \\ -\frac{2}{x-1}+7(y-5)=5 \end{cases};\quad (5)\begin{cases} 7x+5y=4 \\ -14x-10y=-20 \end{cases};\quad (6)\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x-3y=\sqrt{2}-1 \\ x-(\sqrt{2}+1)y=4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Exercice 2. .

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$(1)\begin{cases} 3x-2y=5 \\ -2x+5y=-8 \end{cases};\quad (2)\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+4y=9 \end{cases};\quad (3)\begin{cases} 2x-y=3 \\ -2x+y=-1. \end{cases}$$

Exercice 3. .

a) Dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ x-7y=0 \end{cases}$ a pour solution le couple

(i) $(1;7)$; (ii) $(7;1)$; (iii) $(-1;7)$; (iv) $(1;-7)$.

b) Le système $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ x-y-z=-4 \\ x+4y-5z=-6 \end{cases}$ a pour unique solution

(i) $(1;2;-3)$; (ii) $(-1;5;-1)$; (iii) $(1;2;3)$; (iv) $(-1;-2;3)$.

5 Généralités

Savoirs

- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires
  – Permutation de deux lignes ;
  – Multiplication d'une ligne par un nombre réel non nul ;
  – Combinaison d'une ligne avec une autre ligne.

Savoirs-faire

- Transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent ;
- Transformer un système d'équations linéaires en un système triangulaire équivalent par la méthode de Gauss.

Étapes	Activité enseignant	Activité élève	Point E/A	Observations	Temps
Activité 1	Donner l'activité aux élèves ; vérifier la prise de note ; Corriger l'activité en impliquant les élèves.	Les élèves réfléchissent, traite l'activité individuellement et corriger avec l'enseignant.	Faire rappeler un savoir ancien.	Traiter l'activité et échanger avec l'enseignant.	5 min.
Activité 2	Donner l'activité aux élèves ; vérifier la prise de note	Les élèves réfléchissent, traite l'activité individuellement et corriger avec l'enseignant.	Faire rappeler un savoir ancien.	Traiter l'activité et échanger avec l'enseignant.	5 min.
Activité 3, 4, 5, 6, 7	Donner respectivement ces activités aux élèves ; vérifier la prise de note	Les élèves réfléchissent, traite ces activités individuellement et corriger avec l'enseignant.	Faire rappeler un savoir ancien.	Traiter ces activités en groupe de 5 élèves et échanger avec l'enseignant.	30 min.

5.1 Equations linéaires

Activité 1. .

On donne les équations suivantes :

a) $5x+y+z+5=0$; b) $x-y^2-z^3+1=0$; c) $2x-3y=0$; d) $-2x+y-z-t-3=0$;

e) $x^2+3y^2-5z^2=0$; f) $2x-4y-7=0$; g) $5x-3y+6z=-2$; h) $-2x^2+5y+8=0$.

1. Donner pour chacune des équations ci-dessus, le nombre d'inconnues.

2. Parmi ces équations, lesquelles sont des équations linéaires ? Justifier.

3. Vérifier que le triplet $(1;2;3)$ est une solution des équations $x - y - z + 4 = 0$ et $x + 2y + z - 8 = 0$.

Définition 1. (Equation linéaire - Solution)

• Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b, \qquad (1)$$

où les nombres réels $a_1, a_2, \cdots, a_p$ et b sont donnés.

• Une solution dans $\mathbb{R}^p$ est un p-uplet $(s_1, \cdots, s_p)$ tel que, si l'on calcule $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ps_p$ on trouve b.

• Résoudre l'équation (1) dans $\mathbb{R}^p$, c'est trouver l'ensemble de tous les p-uplets solutions.

Exemple 1. .

• $2x + 3y = 4$ est une équation linéaire à 2 inconnues x et y. Dans $\mathbb{R}^2$, ses solutions sont les couples de la forme $(x; \frac{4-2x}{3})$, $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble de ces solutions est représenté dans un repère du plan par la droite d'équation : $2x + 3y - 4 = 0$. C'est pour cette raison et par analogie, que l'on appelle « linéaire » toute équation dont les inconnues sont au premier degré.

• L'équation $3x - y + z = 1$ est une équation linéaire à 3 inconnues x, y et z. Une solution de cette équation est le triplet $(1;1;-1)$ car $3(1) - (1) - 1 = 1$.

Exemple 2. .

L'équation $x = 2$ est linéaire ; on peut la considérer comme une équation linéaire à deux inconnues car elle peut s'écrire :$x + 0y = 2$. Dans $\mathbb{R}^2$ ses solutions sont les couples $(2;y)$, $y \in \mathbb{R}$. Leur ensemble est représenté par la droite (D) d'équation $x = 2$.

Remarque 1. Une équation linéaire a une infinité de solutions.

5.2 Systèmes d'équations linéaires

Activité 2. .

On donne les systèmes suivants :

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 5y = 2 \end{cases} ; \quad \text{(b)} \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases} ; \quad \text{(c)} \begin{cases} 15x + 2y = 8 \\ -7x - y = -4 \end{cases} ;$$

(d) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} 2x^2+3y=5 \\ 5x^2-4y=-8 \end{cases}$; (f) $\begin{cases} \frac{5}{x+1}-\frac{2}{y+2}=14 \\ -\frac{3}{x+1}+\frac{5}{y+2}=3. \end{cases}$

1. Donner pour chacun des systèmes ci-dessus, le nombre d'équations et le nombre d'inconnues.

2. Parmi ces systèmes, lesquelles sont des systèmes d'équations linéaires ? Justifier

3. Soit le système (S) $\begin{cases} 2x-3y+5z=0 & L_1 \\ 3x-5y+2z=1 & L_2 \\ 2x-5y+3z=2 & L_3 \end{cases}$

   (a) Vérifier que le triplet $(-\frac{11}{10}; -\frac{9}{10}; -\frac{1}{10})$ est une solution de L_1, L_2 et L_3.

   (b) Conclure.

4. Soient les systèmes (S) et (S') suivants :

   (S) $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ x-y-z=-4 \\ x+4y-5z=-6 \end{cases}$; (S') $\begin{cases} 2x+4y+2z=16 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=2 \\ \frac{1}{2}x+2y-\frac{5}{2}z=-3. \end{cases}$

   (a) Vérifier que le triplet $(1,2,3)$ est solution de (S) et (S')

Définition 2. .

Un système de n équations linéaires $(L_1, \cdots, L_n)$ à p inconnues $(x_1; \cdots; x_p)$ est un système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1, & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2, & L_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n, & L_n \end{cases}$$

où les réels $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{np}$ d'une part et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ d'autre part sont donnés.

Remarque

Les coefficients a_{ij} des inconnues sont notés avec un double indice. Le premier indice i sert à repérer la ligne, c'est-à-dire l'équation ; le second indice j repère la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle est placé le coefficient a_{ij} ; par exemple :

a_{12} désigne le coefficient de x_2 dans la première équation L_1 ;

a_{2p} désigne le coefficient de x_p dans la deuxième équation L_2.

De façon générale, a_{ij} désigne le coefficient de x_j dans la i-ième équation L_i.

Lorsque tous les réels $b_1, \cdots, b_n$ sont nuls, on dit que le système est homogène.

Définition 3. .

• Dire qu'un p-uplet de réels $(s_1; \cdots; s_p)$ est solution du système (S) signifie que ce p-uplet est solution dans $\mathbb{R}^p$ de chaque équation $L_1, \cdots, L_n$.

• Résoudre un système c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses solutions.

Remarque 2. Lorsqu'un système n'a pas de solutions, on dit que son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est l'ensemble vide. On note alors : $\mathcal{S} = \varnothing$.

Définition 4. (Systèmes équivalents)

Dire que deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues sont équivalents signifie qu'ils ont le même ensemble de solutions.

Il résulte directement de cette définition que pour trois systèmes (S_1), (S_2), (S_3) à p inconnues, si (S_1) et (S_2) sont équivalents, et si (S_2) et (S_3) sont équivalents, alors (S_1) et (S_3) sont équivalents.

Exemple 3. .

• Le système $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -x + 3y + z = \frac{11}{3} \end{cases}$ est un système de deux équations à trois inconnues ;

• Le système $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}$ est un système de trois équations à trois inconnues ;

• Le système $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

Exemple 4. .

Le système (S) $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$ a pour solution triplet $(1; 2; 3)$ car ce triplet est solution de chaque équation du système (S).

6 Transformations élémentaires

6.1 Préliminaires

6.1.1 Equations L et αL

Activité 3. .

Notons L l'équation $3x - 12y + 6z = 24$.

• Qu'obtient-t-on en divisant par 3 chacun de ses coefficients et son second membre ?

On note $\frac{1}{3}L$ l'équation $x - 4y + 2z = 8$ et on donne les triplets $(4; 1; 4)$ et $(8; 1; 2)$.

• Vérifiez que ces triplets sont des solutions communes à L et $\frac{1}{3}L$.

Solution

• Notons L l'équation $3x - 12y + 6z = 24$. En divisant par 3 chacun de ses coefficients et son second membre, nous obtenons l'équation $\frac{1}{3}L$ suivante : $x - 4y + 2z = 8$.

• On donne les triplets $(4; 1; 4)$ et $(8; 1; 2)$. On a $3(4) - 12(1) + 6(4) = 24$ et $4 - 4(1) + 2(4) = 8$; de même $3(8) - 12(1) + 6(2) = 24$ et $8 - 4(1) + 2(2) = 8$ ce qui prouve bien que ces triplets sont des solutions communes à L et $\frac{1}{3}L$.

Propriété 1. .

Les équations L et αL (avec $\alpha \neq 0$) ont même ensemble de solutions.

Exemple 5. .

Notons par L l'équation linéaire dans $\mathbb{R}^4$ suivante : $2x - 5y + 3z + t = 5$. En multipliant par 2 chaque coefficient et le second membre de L, on obtient l'équation $4x - 10y + 6z + 2t = 10$. Cette équation se note $2L$. Les équations L et $2L$ ont même ensemble de solutions. En effet, soit (a, b, c, d) une solution de L, alors $2(a) - 5(b) + 3(c) + d = 5 \quad (*)$. En multipliant $(*)$ par 2, on obtient $4(a) - 10(b) + 6(c) + 2d = 10$. Donc (a, b, c, d) est aussi solution de $2L$. Ainsi, toute solution de L est aussi solution de $2L$.

Le quadruplet $(-3; -1; 2; 0)$ est une solution commune à L et $2L$.

6.1.2 Equations $L + \alpha L'$

Activité 4. .

Notons L l'équation $x - 5y + 3z = 8$ et L' l'équation $2x - 3y + 2z = 5$.

• Que donne l'équation $-2L$?

• Déterminer l'équation $-2L + L'$.

• Vérifier que les triplets $(0; -1; 1)$ et $(\frac{1}{7}; -\frac{11}{7}; 0)$ sont des solutions communes d'une part de L et L' et d'autre part de L et $-2L + L'$.

• Que pouvons-nous conjecturer ?

Propriété 2. .

L et L' sont deux équations à p inconnues :

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \cdots + a_px_p &= c \quad (L) \\ b_1x_1 + \cdots + b_px_p &= d \quad (L') \end{aligned}$$

Alors, les solutions communes à L et L' sont les solutions communes de L et $L' + \alpha L$, pour tout réel non nul α.

Exemple 6. .

On donne les équations $(L_1) : x + 3y - 4z = 2$ et $(L_2) : 2x - y + z = 3$.

L'équation $-2L_1$ est l'équation $-2x - 6y + 8z = -4$.

L'équation $-2L_1 + L_2$ est l'équation obtenue en ajoutant membre à membre l'équation $-2L_1$ et l'équation L_2 ; c'est donc l'équation $-2x - 6y + 8z + 2x - y + z = 3 - 4$ c'est-à-dire $-7y + 9z = -1$.

6.2 Transformations élémentaires d'un système (S)

(S) est un système de n équations linéaires à p inconnues, notées de haut en bas $L_1, L_2, \cdots, L_n$.

6.2.1 Transformation $L_i \longleftrightarrow L_j$

Activité 5. On donne le système $(S) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 & L_1 \\ 2x - y + z = 3 & L_2. \end{cases}$

• Quel système obtient-on en permutant les équations L_1 et L_2 ?

• On note (T) le système obtenu. Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Propriété 3. .

La transformation $L_i \longleftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute les équations L_i et L_j.

Cette transformation permet d'obtenir un système (T) équivalent au système (S).

Exemple 7. .

Les systèmes $(S)\begin{cases} 2x+3y=5 & L_1 \\ x-y=8 & L_2 \end{cases}$ et $(T)\begin{cases} x-y=8 & L_1 \\ 2x+3y=5 & L_2 \end{cases}$ sont équivalents.
En effet, le couple $(\frac{29}{5}; -\frac{11}{5})$ est une solution commune à (S) et (T).

Le système (T) est obtenu par la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$.

6.2.2 Transformation $L_i \longleftarrow \alpha L_j$ (avec α réel non nul)

Activité 6. .

Soit le système $(S)\begin{cases} 3x-12y+6z=24 & L_1 \\ x+3y-4z=2 & L_2 \end{cases}$

• Déterminer l'équation $-3L_2$.

• Déterminer le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-3L_2$.

• On note (T) le système obtenu. Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Propriété 4. .

Le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_i par αL_i (avec $\alpha \neq 0$) est équivalent au système (S).

Cette transformation est notée $L_i \longleftarrow \alpha L_i$.

Exemple 8. .

Les systèmes $(S)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ 2x-y+3z=-1 & L_2 \end{cases}$ et $(T)\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ -x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} & L_2 \end{cases}$ ont le même ensemble solution. Ils sont équivalents et le système (T) est obtenu par la transformation $L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$.

6.2.3 Transformation $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$

Activité 7. .

Soit le système $(S)\begin{cases} x-3y+2z=1 & L_1 \\ 2x-y+3z=9 & L_2 \\ 3x-2y+4z=11. & L_3 \end{cases}$

• Déterminer les équations $-2L_1+L_2$ et $-3L_1+L_3$.

• Déterminer le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-2L_1+L_2$ et l'équation L_3 par $-3L_1+L_3$.
On note (T) le système obtenu.

• Quelles transformations ont été faites dans (S) pour obtenir (T) ? Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Propriété 5. .

Le système (T) obtenu en remplaçant dans le système (S) l'équation L_i par l'équation $L_i + \alpha L_j$ est équivalent au système (S).

Cette transformation est notée $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$.

Exercice d'application. .

Dans chacun des cas suivants déterminer des transformations élémentaires permettant de passer du système (S) au système équivalent (S').

a) $(S)\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z + 8t = -6 \\ z - t = 3 \end{cases}$; $(S')\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ y + z - 2t = 1 \\ -10z + 8t = -6 \\ -2t = 24 \end{cases}$

b) $(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \end{cases}$ $(S')\begin{cases} 5x + y + z = -5 \\ 2x + 13y - 7z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

7 Méthodes de résolution d'un système linéaire

Savoirs

- Principe de la méthode de Gauss
- Principe de la méthode de combinaison

Savoirs-faire

- Résoudre un système linéaire

7.1 Principe de la méthode de Gauss

Activité 8. .

Considérons le système $(S)\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & L_1 \\ 2x - y + 3z = 9 & L_2 \\ 3x - 2y + 4z = 11. & L_3 \end{cases}$

Première étape

Le but est d'obtenir un système (S_1) de la forme suivante :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases}$$

où le symbole $\bullet$ désigne à chaque fois un nombre réel.

1. Pour cela, du système (S) gardons la ligne L_1, la ligne L_3 et effectuons la transformation $L_2 \longleftarrow -2L_1 + L_2$ pour annuler le coefficient de x dans L_2.

Nous obtenons le système (S') $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

2. A partir de (S'), gardons la ligne L_1, la ligne L_2 et effectuons la transformation $L_3 \longleftarrow -3L_1 + L_3$ pour annuler le coefficient de x dans L_3. Nous obtenons le système (S_1) :

$$(S_1) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & L_1 \\ 5y - z = 7 & L_2 \\ 7y - 2z = 8. & L_3 \end{cases}$$

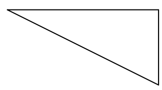
Deuxième étape

Le but est d'obtenir, à partir du système (S_1), un système (S_2) de la forme :

$$(S_2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ \bullet z = \bullet \end{cases}$$

Pour cela, du système (S_1) gardons la ligne L_1, la ligne L_2 et effectuons la transformation $L_3 \longleftarrow -\frac{7}{5}L_2 + L_3$. On obtient le système :

$$(S_2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ -\frac{3}{5}z = -\frac{9}{5}. \end{cases}$$

Un tel système est dit **triangulaire**. En effet, il est sous la forme du triangle 

Résoudre le système (S_2) et vérifier qu'il a un seul triplet $(x_0; y_0; z_0)$ solution du système (S).

★★ Méthode de GAUSS

La méthode de GAUSS consiste à transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des transformations élémentaires sur les lignes. Ainsi,

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de GAUSS, on procède comme suit :

- **On vérifie que dans la ligne L_1, le coefficient de la première inconnue est non nul, sinon on échange L_1 avec une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul.**
- **On garde la ligne L_1 et à l'aide de la transformation élémentaire [$L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$], on annule tous les coefficients de la première inconnue dans les autres lignes.**
- **On garde les lignes L_1 et L_2 et à l'aide de la transformation élémentaire [$L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$], on annule tous les coefficients de la deuxième inconnue dans les autres lignes.**
- **On recommence le procédé pour la troisième inconnue, jusqu'à obtention d'un système triangulaire.**

♦ **Exercice résolu 1**

Résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases} x + 3y - 4z = 2 & L_1 \\ 2x - y + z = 3 & L_2 \\ 3x - 2y + z = 1. & L_3 \end{cases}$

◊ Solution commentée

Commentaires et méthode	**Réalisation**
On conserve L_1 de (S_1) et on l'utilise pour éliminer l'inconnue x dans les équations L_2 et L_3. Ceci se fait par les transformations $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$. On obtient le système (S_2) équivalent à (S_1)	$(S_2)\begin{cases} x+3y-4z=2 & L_1 \\ -7y+9z=-1 & L_2 \\ -11y+13z=-5. & L_3 \end{cases}$
On conserve L_1 et L_2 de (S_2) ; on utilise L_2 pour éliminer l'inconnue y dans L_3. Ceci se fait par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_2$ et on obtient le système (S_3) équivalent à (S)	$(S_3)\begin{cases} x+3y-4z=2 & L_1 \\ -7y+9z=-1 & L_2 \\ -\frac{8}{7}z=-\frac{24}{7}. & L_3 \end{cases}$
Le système (S_3) est triangulaire. On le résoud par substitution « en remontant ».	$\begin{cases} x+3-4=2 \quad \textbf{donc} \quad x=2 \\ -7y+9=-1 \quad \textbf{donc} \quad y=4 \\ z=3 \end{cases}$
On conclut sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de système (S)	**Le triplet $(2;4;3)$ est la seule solution de système (S). On a** $\mathcal{S}=\{(2;4;3)\}$

♦♦ Exercice résolu 2

Résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases} 2x-y-z-t=-1 & L_1 \\ x-3y+z+t=-2 & L_2 \\ x+y-2z+4t=4 & L_3 \\ x-y+z-2t=-8 & L_4 \end{cases}$

◊◊ **Solution commentée**

Commentaires et méthode	**Réalisation**
Comme précédemment, il est avantageux de placer en première ligne l'une des équations L_2, L_3, L_4, car le coefficient de x est 1. Utilisons par exemple la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$, on obtient les système (S_1).	$(S_1)\left\{\begin{array}{rl} x-3y+z+t=-2 & L_1 \\ 2x-y-z-t=-1 & L_2 \\ x+y-2z+4t=4 & L_3 \\ x-y+z-2t=-8 & L_4 \end{array}\right.$
Éliminons x dans les trois dernières équations par les transformations élémentaires $L_2 \longleftarrow L_2-2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4-L_1$. On obtient le système (S_2).	$(S_2)\left\{\begin{array}{rl} x-3y+z+t=-2 & L_1 \\ 5y-3z-3t=3 & L_2 \\ 4y-3z+3t=6 & L_3 \\ 2y-3t=-6 & L_4 \end{array}\right.$
Échangeons l'ordre des inconnues afin de profiter du fait que l'inconnue z ne figure pas dans L_4. On obtient le système (S_3).	$(S_3)\left\{\begin{array}{rl} x-3y+z+t=-2 & L_1 \\ -3z+5y-3t=3 & L_2 \\ -3z+4y+3t=6 & L_3 \\ 2y-3t=-6 & L_4 \end{array}\right.$
Par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3-L_2$, éliminons l'inconnue z dans L_3. On obtient le système (S_4).	$(S_4)\left\{\begin{array}{rl} x-3y+z+t=-2 & L_1 \\ -3z+5y-3t=3 & L_2 \\ -y+6t=3 & L_3 \\ 2y-3t=-6 & L_4 \end{array}\right.$
Par la transformation $L_4 \longleftarrow L_4+2L_3$ éliminons l'inconnue y dans L_4. On obtient (S_5).	$(S_5)\left\{\begin{array}{r} x-3y+z+t=-2 \\ -3z+5y-3t=3 \\ -y+6t=3 \\ 9t=0 \end{array}\right.$
Le système (S_5) est triangulaire ; il admet un seul quadruplet $(x;y;z;t)$ solution de (S). On a :	$\mathcal{S}=\{(-5;-3;-6;0)\}$

♦♦♦ Exercice résolu 3

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ 2x-y+3z=-1 & L_2 \\ -4x+5y-7z=4. & L_3 \end{cases}$

◊◊◊ Solution commentée

Commentaires et méthode	**Réalisation**
On garde L_1 et on l'utilise pour éliminer x dans les équations L_2 et L_3 par les transformations : $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 4L_1$. **On obtient le système (S_1) équivalent à (S).**	$(S_1) \begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ -3y+z=-3 & L_2 \\ 9y-3z=8. & L_3 \end{cases}$
On garde L_1 et L_2 de (S_1) et on utilise L_2 pour éliminer l'inconnue y dans L_3. **Pour cela on utilise la transformation $L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2$. On obtient (S_2) équivalent à (S_1).**	$(S_2) \begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ -3y+z=-3 & L_2 \\ 0=-1. & L_3 \end{cases}$
Ainsi le système (S_2) n'a pas de triplets solution car on a toujours $0 \neq -1$. **Le système (S) équivalent à (S_2) n'a donc pas de solution.**	$\mathcal{S} = \varnothing$

♦♦♦♦ Exercice résolu 4

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+2y+3z=11 & L_1 \\ -2x+y+2z=15 & L_2 \\ 3x+y+z=-4. & L_3 \end{cases}$

◊◊◊◊ Solution commentée

En procédant comme dans les exercices précédents, on obtient par les transformations $L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$, le système :

$$(S_1) \begin{cases} x+2y+3z=11 & L_1 \\ 5y+8z=37 & L_2 \\ -5y-8z=-37. & L_3 \end{cases}$$

Par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, on obtient le système (S_2) :

$$(S_2)\begin{cases} x+2y+3z=11 & L_1 \\ 5y+8z=37 & L_2 \\ 0=0. & L_3 \end{cases}$$

Ainsi, le triplet $(x;y;z)$ est solution de (S_2) (donc de (S)), dès qu'il est solution des deux premières équations de (S_2), c'est-à-dire que le système (S) est équivalent au système de deux équations à trois inconnues : $\begin{cases} x+2y+3z=11 \\ 5y+8z=37. \end{cases}$

On obtient alors $y=\frac{37-8z}{5}$, puis en substituant dans la première équation, on obtient $x=\frac{z-19}{5}$. Les solutions de (S) sont donc les triplets $\left(\frac{z-19}{5};\frac{37-8z}{5};z\right)$ où z est un réel quelconque.

Remarque 3. Notez qu'au lieu d'exprimer x et y en fonction de z, on aurait pu exprimer x et z en fonction de y.

7.2 Méthode par combinaison linéaire

Activité 9. .

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(S)\begin{cases} 2x-2y+5z=0 & L_1 \\ 5x+2y+3z=-2 & L_2 \\ 3x+4y+2z=-10 & L_3 \end{cases}$

1^{er} **étape** Conservons L_1 et éliminons l'inconnue z dans L_2 et L_3, on a :

- $-3L_1+5L_2$: $\begin{cases} -6x+6y-15z=0 \\ 25x+10y+15z=-10 \end{cases}$ On obtient : $19x+16y=-10$
- $-2L_1+5L_3$: $\begin{cases} -4x+4y-10z=0 \\ 15x+20y+10z=-50 \end{cases}$ On obtient : $11x+24y=-50$

2^{e} **étape** Résolvons ensuite par combinaison le système : $\begin{cases} 19x+16y=-10 \\ 11x+24y=-50 \end{cases}$

On multiplie la première ligne par -11 et la deuxième par 19 : $\begin{cases} -209x-176y=110 \\ 209x+456y=-950 \end{cases}$

Une addition membre à membre permet d'obtenir : $280y=-840$ i.e. $y=-3$ et par suite, on trouve $x=2$.

3^{e} **étape** On revient déterminer z dans l'une des équations du système initial (S). On trouve : $z=2$.

4^{e} **étape** On vérifie que le triplet $(2;-3;2)$ est effectivement solution du système (S).

★★ Description de la Méthode par combinaison linéaire

Pour résoudre un système linéaire (S) dans $\mathbb{R}^3$ par la combinaison linéaire, on procède comme suit :

- **On garde la ligne L_1 et à l'aide de la transformation élémentaire $[L_i \longleftarrow \lambda L_i + \beta L_j]$, on élimine un des inconnues dans les autres lignes ; on obtient alors un système (S_1) de deux équations à deux inconnues.**
- **On resoud par combinaison linéaire le système (S_1) obtenu et on détermine les deux inconnues du système (S_1).**
- **On revient déterminer la dernière inconnue en remplaçant dans l'une des équations du système (S), les valeurs des deux inconnues trouvées en résolvant le système (S_1).**
- **On vérifie que le triplet trouvé est effectivement solution du système initial (S).**

Exercice d'application. .

a) Résoudre les systèmes linéaires suivants (On utilisera la méthode de Gauss) :

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+y+2z=1 \\ 3x-3y-5z=2 \end{cases},\ (2)\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases},\quad (3)\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-y-3z=-3 \\ -2x-3y+4z=-4 \end{cases},$$

$$(4)\begin{cases} 3a+4b+c=7 \\ a+2b-c=13 \\ 2a-b+2c=5 \end{cases},\quad (5)\begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6 \end{cases},(6)\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8. \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants (On utilisera la méthode par combinaison linéaire) :

$$(1)\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ x-4y+2z=9 \\ -2x+y+z=-1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-y-z=7 \\ -x+y-2z=2 \end{cases}$$

7.3 Résolution des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$ et interprétations géométriques

Savoirs

- Interprétation géométrique
  - Position relative de deux plans de l'espace ;
  - Position relative de trois plans de l'espace.

Savoirs-faire

- Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire.

Rappels

L'espace est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

- Tout plan admet une équation du type $ax + by + cz + d = 0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque.
- Réciproquement :

  Soit a, b, c et d des réels non tous nuls.

  L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.

Conséquences

- Résoudre un système de deux équations de $\mathbb{R}^3$ revient à déterminer la position relative de 2 plans
- Résoudre un système de trois équations de $\mathbb{R}^3$ revient à déterminer la position relative de 3 plans

7.3.1 Systèmes linéaires de deux équations dans $\mathbb{R}^3$

Activité 10. .

Soit le système (S) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}$

1) Posons l'inconnue $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Quel système (S') obtient-t-on ?

2) Résoudre (S') et donner les solutions en fonction de λ.

3) Déduire les solutions de (S).

4) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x+y-z-1 = 0$ et $-x+y+2z+2 = 0$.

a) Déterminer la position de ces deux plans.

b) Déterminer les coordonnées d'un point $M_0 \in (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$.

c) Conclure.

Activité 11. .

Soit le système (S) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -3 \end{cases}$

1) Résoudre (S).

2) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x-y+z-5=0$ et $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+3=0$.

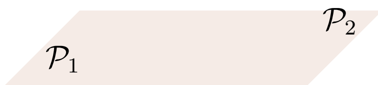
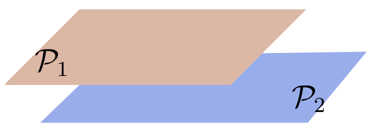
Déterminer la position de ces deux plans.

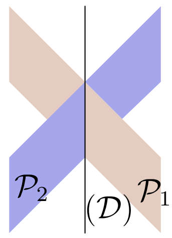
Proposition 1. .

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

Soit (Σ) le système linéaire formé des équations de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ avec (a,b,c) et (a',b',c') différents de $(0,0,0)$.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ) est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$	**Ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ)**	**Interprétation géométrique**
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$	(Σ) **a une infinité de solutions ;** $\mathcal{S}$ **est l'ensemble des triplets** $(x;y;z)$ **tels que :**$ax+by+cz+d=0$	
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$	(Σ) **n'a pas de solution ;** $\mathcal{S} = \varnothing$	

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\mathcal{D})$	(Σ) **a une infinité de solutions ;** $\mathcal{S}$ **est l'ensemble des triplets** $(x; y; z)$ **des points de** $\mathcal{D}$	

Exercice d'application.

Exercice 4. .

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 8 \\ x + y - 6z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} -3x - 5y + 2z = -1 \\ -3x - 5y + z = -2 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

a) Déterminer dans chaque cas trois triplets (x, y, z) de solution du système proposé ;

b) Donner dans chaque cas une interprétation graphique.

7.3.2 Systèmes linéaires de trois équations dans $\mathbb{R}^3$

Activité 12. .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 & L_1 \\ -x + y + 2z = -2 & L_2 \\ x + 2y + z = -1 & L_3 \end{cases}$

a) Montrer que le système (Σ) est équivalent au système (Σ') $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3y + 3z = -3 \end{cases}$

b) Résoudre (Σ') et déduire les solutions de (Σ).

c) Donner les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x + y - z - 1 = 0$; $-x + y + 2z + 2 = 0$; $x + 2y + z + 1 = 0$.

Activité 13. .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 & L_1 \\ 3x + 3y - z = 2 & L_2 \\ 2x + 4y = 3 & L_3 \end{cases}$

a) Déterminer le système triangulaire équivalent à (Σ).

b) Déduire les solutions de (Σ).

c) Donner les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x + y - z - 1 = 0$; $3x + 3y - z - 2 = 0$; $2x + 4y - 3 = 0$.

Activité 14. .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 & L_1 \\ -x + 3y - 2z = 7 & L_2 \\ 5x - 2y - z = -8 & L_3 \end{cases}$

a) Déterminer le système triangulaire équivalent à (Σ).

b) Déduire les solutions de (Σ).

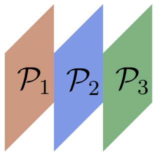
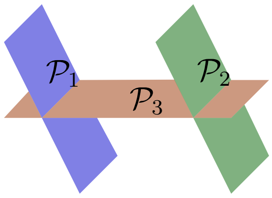
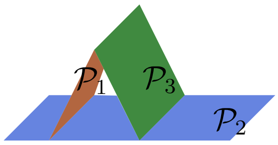
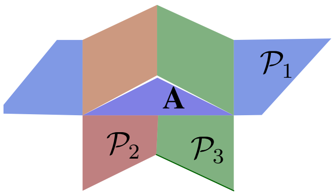
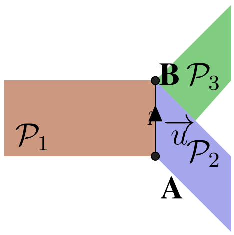
c) Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

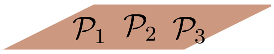
Proposition 2. .

Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives : $ax + by + cz + d = 0$**,** $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ **et** $a"x + b"y + c"z + d" = 0$ **avec** (a, b, c)**,** (a', b', c') **et** $(a", b", c")$ **différents de** $(0, 0, 0)$**.**

Soit (Σ) **le système linéaire formé des équations de** $\mathcal{P}_1$**,** $\mathcal{P}_2$ **et** $\mathcal{P}_3$**.**

Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ **des solutions de** (Σ) **est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de** $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$**.**

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$	**Interprétation géométrique**	**Ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ)**
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$	  	(Σ) **n’a pas de solution.** $\mathcal{S} = \varnothing$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{A\}$		(Σ) **a une seule solution :** $(x_A; y_A; z_A)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\mathcal{D})$		(Σ) **a une infinité de solutions.** $\mathcal{S}$ **est l’ensemble des triplets de coordonnées des points de** $(\mathcal{D})$

$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$		**(Σ) a une infinité de solutions. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $(\mathcal{P}_1)$**

Exemple 9. .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 & L_1 \\ -6x + 3y + 3z = 1 & L_2 \\ x + y = -3 & L_3 \end{cases}$

a) Résoudre ce système.

b) Donner une interpretation géométrique du résultat obtenu.

Solution

a) Conservons L_1 et éliminons x dans L_2 et L_3 à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient le système : $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 0 = 7 \\ -3y - z = 8 \end{cases}$

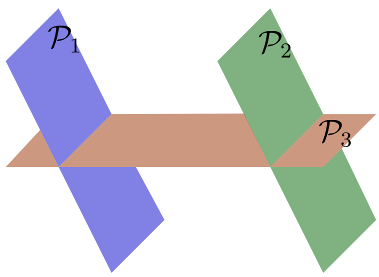
Donc le système (Σ) n'a pas de solution.

b) Interprétation géométrique

Soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x - y - z - 2 = 0$; $-6x + 3y + 3z - 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$.

Les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont disjoints.

Illustration graphique



Exercice d'application. .

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

$$(1)\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 4z = -3 \\ -4x + 3y - 7z = 1 \end{cases}, \quad (2)\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases}, \quad (3)\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x - 6y - 3z = 3 \\ -2x + 4y + 2z = -2 \end{cases}, \quad (5)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 4y + 6z = 3 \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{3}{2}z = 5 \end{cases}, \quad (6)\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 3y + z = 1. \end{cases}$$

8 Résolution de problèmes se ramenant aux systèmes linéaires

Savoirs

- Applications des systèmes linéaires
  - Utilisation des systèmes linéaires pour résoudre des problèmes

Savoirs-faire

- Choix des inconnues
- Mise en équation
- Résolution du système obtenu
- Conclusion

Dans cette partie, nous ne ferons que des exemples bien détaillées.

Activité 15. .

Déterminer une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions :
$f(0) = 0$ **; pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $f(x) = x + f(x-2)$**.**

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Supposons que f est définie par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

▲ **Mise en équation**

- La condition $f(0) = 0$ implique que $d = 0$.
- La condition $f(x) = x + f(x-2)$ implique que $a[x^3 - (x-2)^3] + b[x^2 - (x-2)^2] + 2c = x$.

Pour $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ respectivement, on obtient le système : $(\Sigma)\begin{cases} 8a + 4b + 2c = 2 \\ 26a + 8b + 2c = 3 \\ 56a + 12b + 2c = 4 \end{cases}$

La résolution de ce système permet d'obtenir : $a = 0$; $b = \frac{1}{4}$; $c = \frac{1}{2}$.

▲ **Solution du problème**

La fonction polynôme f est définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

★★ Description de la Méthode de "mise en équation"

La résolution de problèmes se ramenant aux systèmes linéaires comprend quatres grandes étapes :

1. **Choix des inconnues :**
   C'est l'étape dans laquelle on désigne les inconnues à chercher.
2. **Mise en équation :**
   C'est la phase d'interprétation de l'énoncé dans laquelle on écrit les relations existantes entre les inconnues définies plus haut. Ces relations aboutissent à un système linéaire.
3. **Résolution mathématique :**
   C'est l'étape dans laquelle on resoud le système linéaire en utilisant l'une des méthodes de résolution.
4. **Solution du problème ou conclusion :**
   c'est l'étape final dans laquelle on interprète les résultats obtenus de la résolution du système linéaire.

Exemple 10. .

Un potier fabrique trois types différents A, B, C de canaris.

• Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de 40 kg d'argile, 60 litres d'eau et 15 kg de bois de chauffage.

• Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de 18 kg d'argile, 20 litres d'eau et 7 kg de bois de chauffage.

• Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de 70 kg d'argile, 110 litres d'eau et 35 kg de bois de chauffage.

En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3656 kg d'argile, 5040 litres d'eau et 1494 kg de bois de chauffage.

Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Soit x le nombre de canaris de type A, y le nombre de canaris de type B et z le nombre de canaris de type C fabriqué en une semaine.

▲ **Mise en équation**

La quantité d'argile utilisée pour fabriquer les canaris de type A, B et C est (en Kg) : $40x + 18y + 70z$.

La quantité d'eau utilisée pour fabriquer les canaris de type A, B et C est (en litre) : $60x + 20y + 110z$.

La quantité de bois utilisée pour fabriquer les canaris de type A, B et C est (en Kg) : $15x + 7y + 35z$.

En une semaine, le potier utilise : 3656 kg d'argile, 5040 litres d'eau et 1494 kg . La traduction de cet énoncé conduit au système : $(\Sigma)\begin{cases} 40x + 18y + 70z = 3656 \\ 60x + 20y + 110z = 5040 \\ 15x + 7y + 35z = 1494 \end{cases}$

La résolution de ce système permet d'obtenir : $x = 38$; $y = 72$; $z = 12$.

▲ **Solution du problème**

En une semaine, le potier fabrique 38 canaris de type A, 72 canaris de type B et 12 canaris de type C.

Exemple 11. .

Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et $\frac{1}{3}$ d'heure pour C.

L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités du produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. Parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique-t-elle ?

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Désignons par :

a le nombre d'unités du produit A fabriquées en 100 heures de travail ;

b le nombre d'unités du produit B fabriquées en 100 heures de travail ;

c le nombre d'unités du produit C fabriquées en 100 heures de travail.

▲ **Mise en équation**

Contrainte sur le temps

Temps de fabrication, en heures du produit A : $5a$

Temps de fabrication, en heures du produit B : $3b$

Temps de fabrication, en heures du produit C : $\frac{1}{3}c$

On a : $5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100$.

Contrainte sur la production

Production totale de l'usine en 100 heures de travail : $a + b + c = 100$

La production de B est le tiers de la production de A : $a = 3b$

Système de contrainte

Les nombres réels a, b et c sont solutions du système d'équations : $(\Sigma)\left\{\begin{array}{r} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ a + b + c = 100 \\ a - 3b = 0 \end{array}\right.$

▲ **Résolution**

Conservons la ligne L_1 et éliminons a dans les lignes L_2 et L_3. Cela se fait à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow -L_1 + 5L_2$ et $L_3 \leftarrow -L_1 + 5L_3$ respectivement.

On obtient le système équivalent : $\left\{\begin{array}{r} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ -18b - \frac{1}{3}c = -100 \end{array}\right.$

Conservons maintenant les lignes L_1, L_2 et à l'aide de la transformation élémentaire $L_3 \leftarrow 9L_2 + L_3$ éliminons b dans L_3.

On obtient le système triangulaire $\left\{\begin{array}{r} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ \frac{125}{3}c = 3500 \end{array}\right.$

Ce système admet une seule solution : $(12; 4; 84)$

▲ **Solution du problème**

L'usine fabrique 12 unités du produit A, 4 unités du produit B et 84 unités du produit C en 100 heures de travail.

Exercices d'applications

Exercice 5. .

Déterminer le polynôme de degré 4 dont la courbe représentative dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, passe par les points O, $A(1; -\frac{13}{2})$, $B(2; -4)$ et admet en chacun des points A et B une tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$.

Exercice 6. .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $f'(x) = \frac{1}{2}$ et que $(\mathcal{C})$ admette pour asymptote la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$.

b) Déduire les primitives de la fonction f.

Exercice 7. .

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

On considère les points $A(-1; 2)$, $B(2; 4)$ et $C(4; 2)$.

1. Déterminer les nombres réels a, b et c pour que le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit circonscrit au triangle ABC.

2. Préciser le centre de ce cercle.

9 Exercices

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ chacun des systèmes suivants :

$$(1)\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases}, \quad (2)\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}, \quad (3)\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -4x - 5y + 7z = 1 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases},$$

$$(4)\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 8 \\ x + y - 6z = 0 \end{cases}, \quad (5)\begin{cases} -3x - 5y + 2z = -1 \\ -3x - 5y + z = -2 \end{cases}, \quad (6)\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases},$$

$$(7)\begin{cases} x + 2y^2 + 3z^3 = 7 \\ 2x + 3y^2 + 4z^3 = 11 \\ x - y^2 - z^3 = 0 \end{cases}, \quad (8)\begin{cases} -2x + y - z - t = 3 \\ x - 2y + z - 2d = 7 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + 2y - 2z = 15 \end{cases}, \quad (9)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 8x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - 4y + 3z = -1. \end{cases}$$

Exercice 9. .

1. Résous le système suivant : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7. \end{cases}$
2. Détermine la fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ telle que sa courbe représentative passe par les points de coordonnées $A(1, 0), B(-1, 4)$ et $C(2, 7)$.

Exercice 10. .

Déterminer un polynôme P de degré trois vérifiant les conditions :

$$P(1) = -9\,; P(2) = -9\,; P(3) = 4\,; P(4) = 45\,;$$

Exercice 11. .

On considère les systèmes (S) et (S') suivants :

$$(S)\begin{cases} 3x-2y+5z=21 \\ -2x+y+3z=0 \\ 5x+3y-2z=-11 \end{cases} ; (S')\begin{cases} 3|x|+\dfrac{4}{2y+1}+5\sqrt{z-2}=21 \\ -2|x|-\dfrac{2}{2y+1}+3\sqrt{z-2}=0 \\ 5|x|-\dfrac{6}{2y+1}-2\sqrt{z-2}=-11 \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).
2. En déduire la résolution du système (S').

Exercice 12. .

L'unité de longueur est le centimètre. On considère dans le plan un triangle ABC tel que $AB = c$, $BC = a$ et $AC = b$.

Sachant que a, b et c vérifie le système $\begin{cases} a+b-c=4 \\ a+b+c=10 \\ a^2+b^2+c^2=34 \end{cases}$

1. Calculer a, b et c (on pourra dans un premier temps combiner les deux premières équations de manière à obtenir le nombre c ; puis se ramener à un système symétrique en a et b).
2. En déduire la nature du triangle ABC et calculer la valeur exacte de l'aire du triangle ABC.

Exercice 13.

1. Résoudre le système $(I)\begin{cases} x+y+z=46350 \\ 26x+11y+36z=1263600 \\ 26x-z-15=0 \end{cases}$.
2. Une station d'essence affiche les prix suivants à la pompe par litre :

   essence super : 437 Fcfa   pétrole :191 Fcfa   gasoil : 354 Fcfa.

   Pour un montant total de 139035 Fcfa, un entrepreneur remplit trois bidons. L'un avec du super, l'autre avec du gasoil et le dernier avec du pétrole. Le bidon de gasoil contient 15 litres de plus que celui du pétrole. La capacité totale des trois bidons est de 385 litres.

   Trouver les capacités respectives de chacun des trois bidons

Exercice 14.

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z=44 \\ x+2y+3z=54 \\ x+6z+18z=108 \end{cases}.$$

2. Dans une entreprise, le salaire mensuel des employés est de $7040F$, celui des techniciens le double et celui des cadres $21120F$. La masse salariale mensuelle de cette entreprise s'élève à $380160F$, pour un salaire moyen de $8640F$.

Pour des raisons économiques, la direction doit diminuer la masse salariale de 2%. Cette diminution se repartie alors de la façon suivante : une baisse de 1% sur le salaire des employés, de 3% sur celui des techniciens et de 6% sur celui des cadres.

On désigne respectivement par a le nombre d'employés, b le nombre de techniciens et c le nombre de cadres.

(a) traduire les données précédentes par trois égalités vérifiées par les nombres entiers a, b et c (on justifiera clairement chaque égalité).

(b) En déduire l'effectif de chaque catégorie de salarié.

Exercice 15. .

Trois frères ont acheté un vigne pour 100000 F. Le cadet dit qu'il pourrait la payer seul si le second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a ; le second dit que, si l'aîné lui donnait seulement le tiers de son argent, il paierait la vigne seul ; enfin, l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet pour payer seul la vigne.

Combien chacun avait-il d'argent ?

Exercice 16. .

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement $25F$; $60F$ et $80F$. Elle achète un total de 12 fruits pour un somme de $640F$.

Déterminer le nombre de fruit de chaque variété.

Exercice 17. .

Au marché, trois clientes achètent les mêmes variétés de fruits.

La première achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes ; elle paie $620F$.

La deuxième achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papayes ; elle paie $530F$.

La troisième achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes. Combien doit-elle payer ?

Exercice 18. .

Une fillette à qui sa mère avait confié $100F$ a acheté des fruits pour toute la famille : des pamplemousses à 3F, des melons à $7F$ et des ananas à $8F$, l'un.

Après avoir dépensé tout l'argent, elle peinait à porter son cabas lourd de 20 fruits.

Combien avait-elle acheté de chaque espèce ?

Exercice 19. .

Dans un désert, il y a des serpents, des scorpions et des souris. Chaque matin, chaque serpent mange une souris.

Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent et chaque soir, chaque souris mange un scorpion.

Au bout d'une semaine il ne reste qu'une souris. Combien y en avait-il au début ?

Exercice 20. .

Sachant que 75 boeufs ont brouté en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares, et que 81 boeufs ont brouté en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares, on demande combien il faudra de boeufs pour brouter en 18 jours l'herbe d'un pré de 96 ares.

Exercice 21. primitive d'une fonction rationnelle

On se propose de trouver une primitive de la fonction f définie sur $]2,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]2,+\infty[, f(x) = \frac{3x^3+2x^2-4x+1}{x^4+x^3-5x^2+x-6}.$$

1. Déterminer quatre réels a, b, c, d tels que

$$\forall x \in]2,+\infty[, f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$

2. En déduire une primitive de f sur $]2,+\infty[$.

Exercice 22.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel $x \neq 5$:

$$\frac{x^2+x+1}{x-5} = ax+b+\frac{c}{x-5}.$$

En déduire que la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-5}$ admet une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel x, on ait :

$$x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c.$$

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(x-1)^{2002}$.