Systèmes Linéaires

Mann Manyombe Martin Luther

Yaoundé le, 26 février 2014

Table des matières

1 Dénomination de la ressource et des contributeurs

- Titre de la ressource : **Systèmes linéaires**
- Nom de l'étudiant : **Mann Manyombe Martin Luther**
- Nom de l'encadreur de l'ENS : **Prof. Foupouagnigni Mama**
- Nom de l'inspecteur : **Mr Adjaba Biwoli**
- Nom de l'encadreur du lyçée : **Mr Fotsing Joseph**

2 Objectifs pédagogiques

2.1 Ojectifs généraux

Cette ressource vise essentiellement

– Résoudre des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss;
– Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$;
– Utiliser les systèmes linéaires dans la résolution des problèmes.

2.2 Objectifs pédagogiques spécifiques

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

– Définir les équations linéaires et les systèmes d'équations linéaires
– Reconnaître les différentes transformations élémentaires d'une équation linéaire
– Maîtriser le principe de la méthode de Gauss pour la résolution des systèmes
– Résoudre les systèmes d'équations par la méthode de Gauss
– Résoudre les systèmes par la méthode de combinaison
– Interpréter géométriquement un système dans $\mathbb{R}^3$.

Les outils préconisés sont :

(i) La méthode de Gauss

(ii) D'autres méthodes (combinaison, substitution).

Savoirs

- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires
  – Échange de deux lignes;
  – Multiplication d'une ligne par un nombre non nul;
  – Combinaison d'une ligne avec une autre ligne.
- Principe de la méthode de Gauss
- Interprétation géométrique
  – Position relative de deux plans de l'espace;
  – Position relative de trois plans de l'espace.

Savoirs-faire

- Transformer un système linéaire en un système équivalent ;
- Transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent par la méthode de Gauss ;
- Résoudre ~~d'~~un système linéaire ;
- Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire.

3 Liens avec les autres parties du programme

Les parties du programme en lien avec les systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$ sont :

– La géométrie dans l'espace

– Les primitives et intégrales ; en effet dans la recherche des primitives de certaines fonctions rationnelles, la décomposition en éléments simples nous conduit généralement à un système d'équations.

– Etudes des fonctions

4 Introduction

En classe de Première la résolution des systèmes d'équations linéaires par une méthode d'élimination a été introduite ; rappelons simplement que l'idée de cette méthode est de transformer un système initial en un système facile à résoudre. Dans cette ressource, nous donnons quelques méthodes de résolutions des systèmes linéaires et l'interprétation géométrique de ces systèmes. L'apprenant doit être familier avec les méthodes de résolutions des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ (combinaison, substitution) et $\mathbb{R}^3$ (pivot de Gauss) et l'interprétation géométrique des systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$.

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations faisant appel~~s~~ aux mêmes inconnues. Dans la vie courante et en science, les phénomènes dépendent le plus souvent de plusieurs paramètres. Leurs formulations mathématiques conduisent à des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Les systèmes d'équations interviennent dans plusieurs domaines notamment en Mathématiques, informatique, physique, économie, finances, etc... La résolution de systèmes linéaires s'avère être un formidable outil de résolution de problèmes.

La ressource intitulé Systèmes Linéaires est d'une grande importance, elle permettra à l'apprenant de résoudre des systèmes d'équations à plusieurs inconnues, de déterminer les positions relatives de plusieurs plans dans l'espace (interprétation géométrique des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$), de résoudre des problèmes concrets se ramenant aux systèmes linéaires.

Il s'agira donc tour à tour de définir les notions d'équations et de systèmes d'équations linéaires ; de donner les différentes transformations élémentaires permettant de passer d'un système à un autre qui lui est équivalent ; de donner les méthodes de résolutions d'un système linéaire : l'accent sera mis sur la méthode de Gauss ; de donner une interprétation géométrique des systèmes linéaires et de résoudre des problèmes se ramenant aux systèmes linéaires.

Pré-requis

Les exigences de ce cours partent des connaissances que l'apprenant a sur les notions suivantes :

- Equation de droite et équation du plan
- Equations et systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$
- Solution d'un système linéaire
- Méthodes de résolution des systèmes dans $\mathbb{R}^2$
- Méthodes de Gauss, combinaison, substitution
- Résolution graphique des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Contrôle des pré-requis

Exercice 1. .

Reconnaître les systèmes suivants

(a) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ -x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 15x + 2y = 8 \\ -7x - y = -4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ 5x^2 - 4y = -8 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \frac{5}{x+1} - \frac{2}{y+2} = 14 \\ -\frac{3}{x+1} + \frac{5}{y+2} = 3 \end{cases}$

Exercice 2. .

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 3x - 6y = 12 \\ -5x + 10y = -20 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + 2(y-5) = 5 \\ -\frac{2}{x-1} + 7(y-5) = 5 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} 7x + 5y = 4 \\ -14x - 10y = -20 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x - 3y = \sqrt{2} - 1 \\ x - (\sqrt{2}+1)y = 4\sqrt{2} \end{cases}$.

Exercice 3. .

Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -2x + 5y = -8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ -2x + 4y = 9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

Exercice 4. .

a) Dans $\mathbb{R}^2$, le système $\begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ x - 7y = 0 \end{cases}$ a pour solution le couple

(i) $(1; 7)$ (ii) $(7; 1)$ (iii) $(-1; 7)$ (iv) $(1; -7)$.

b) Le système linéaire $\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y - z = -4 \\ x + 4y - 5z = -6 \end{cases}$ a pour unique solution

(i) $(1; 2; -3)$ (ii) $(-1; 5; -1)$ (iii) $(1; 2; 3)$ (iv) $(-1; -2; 3)$.

5 Généralités

Savoirs

- Opérations élémentaires sur les lignes d'un système d'équations linéaires
  - Échange de deux lignes ;
  - Multiplication d'une ligne par un nombre non nul ;
  - Combinaiso[illegible]'une ligne avec une autre ligne.

Savoirs-faire

- Transformer un système linéaire en un système équivalent,
- Transformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent par la méthode de Gauss.

5.1 Equations linéaires

Définition. (**Equation linéaire - Solution**)

• Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

où les nombres $a_1, a_2, \cdots, a_p$ et b sont donnés.
• Une solution dans $\mathbb{R}^p$ est un p-uplet $(s_1, \cdots, s_p)$ tel que, si l'on calcule $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ps_p$ on trouve b.
• Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}^p$, c'est trouver l'ensemble de tous les p-uplets solutions.

Exemple
. $2x + 3y = 4$ est une équation linéaire à 2 inconnues.
Dans $\mathbb{R}^2$, ses solutions sont les couples $(x; \frac{4-2x}{3})$.
Vous savez que l'ensemble de ses solutions est représenté après choix d'un repère du plan par la droite d'équations : $2x + 3y - 4 = 0$.
C'est pour cette raison et par analogie, que l'on appelle « linéaire » toute équation dont les inconnues sont au premier degré.

Exemple
. L'équation $x = 2$ est linéaire ; on peut la considérer comme une équation linéaire à deux inconnues car on peut l'écrire :$x + 0y = 2$.
Dans $\mathbb{R}^2$ ses solutions sont les couples $(2; y)$.
Leur ensemble est représenté par la droite (D) d'équation $x = 2$.

Remarque. En général, une équation linéaire a une infinité de solutions.

5.2 Systèmes d'équations linéaires

Définition

Un système de n équations linéaires $(L_1, \cdots, L_n)$ à p inconnues $(x_1; \cdots; x_n)$ est un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & L_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & L_n \end{array}\right.$$

où les réels $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{np}$ d'une part et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ d'autre part sont donnés.

Notations

Les coéfficients des inconnues sont notés avec un double indice : a_{ij}. Le premier indice i sert à repérer la ligne, c'est-à-dire l'équation ; le second indice j repère la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle est placé le coefficient a_{ij} ; par exemple :
a_{12} désigne le coefficient de x_2 dans la première équation ;
a_{2p} désigne le coefficient de x_p dans la deuxième équation.
De façon générale, a_{ij} désigne le coefficient de x_j dans la i-ième équation.
Lorsque tous les réels $b_1, \cdots, b_n$ sont nuls, on dit que le système est homogène.

Définition

- **Dire qu'un p-uplet de réels $(s_1; \cdots; s_p)$ est solution du système (S) signifie que ce p-uplet est solution dans $\mathbb{R}^p$ de chaque équation $L_1, \cdots, L_n$.**
- **Résoudre un système c'est trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions.**

Remarque. Lorsqu'un système n'a pas de solutions, on dit que son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est l'ensemble vide. On note alors : $\mathcal{S} = \varnothing$.

5.3 Systèmes équivalents

Définition

Dire que deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues sont équivalents signifie qu'ils ont le même ensemble de solutions.

Il en résulte directement de cette définition que pour trois systèmes $(S_1), (S_2), (S_3)$ à p inconnues, si (S_1) et (S_2) sont équivalents, et si (S_2) et (S_3) sont équivalents, alors (S_1) et (S_3) sont équivalents.

6 Transformations élémentaires

6.1 Préliminaires

6.1.1 Equations L et αL

Activité . .

Notons L l'équation $3x - 12y + 6z = 24$.

- Qu'obtient-t-on en divisant par 3 chacun de ses coéfficients et son second membre ?

On note $\frac{1}{3}L$ l'équation $x - 4y + 2z = 8$ et on donne les triplets $(4; 1; 4)$ et $(8; 1; 2)$.

- Vérifiez que ces triplets sont des solutions communes à L et $\frac{1}{3}L$.
- Que pouvons-nous conclure ?

Solution

- Notons L l'équation $3x - 12y + 6z = 24$. En divisant par 3 chacun de ses coéfficients et son second membre, nous obtenons l'équation $\frac{1}{3}L$ suivante : $x - 4y + 2z = 8$.
- On donne les $(4; 1; 4)$ et $(8; 1; 2)$. On a $3(4) - 12(1) + 6(4) = 24$ et $4 - 4(1) + 2(4) = 8$; de même $3(8) - 12(1) + 6(2) = 24$ et $8 - 4(1) + 2(2) = 8$ ce qui prouve bien que ces triplets sont des solutions communes à L et $\frac{1}{3}L$.
- Nous pouvons conclure les équations L et $\frac{1}{3}L$ ont même ensemble de solutions.

Propriété . .

Les équations L et αL (avec $\alpha \neq 0$) ont même ensemble de solutions.

Exemple

. Notons par L l'équation linéaire dans $\mathbb{R}^4$ suivante : $2x-5y+3z+t = 5$. En multipliant par 2 chaque coefficient et le second membre de L, on obtient l'équation $4x-10y+6z+2t = 10$. Cette équation se note $2L$. Il est clair que les équations L et $2L$ ont même ensemble de solutions car toute solution de L est aussi solution de $2L$.

Le quadruplet $(-3; -1; 2; 0)$ est une solution commune à L et $2L$.

6.1.2 Equations $L + \alpha L'$

Activité . .

Notons L l'équation $x - 5y + 3z = 8$ et L' l'équation $2x - 3y + 2z = 5$.

- Que donne l'équation $-2L$?
- Déterminer l'équation $-2L + L'$.
- Vérifier que les triplets $(0; -1; 1)$ et $(\frac{1}{7}; -\frac{11}{7}; 0)$ sont des solutions communes d'une part à L et L' et d'autre part à L et $-2L + L'$.
- Que pouvons-nous conclure ?

Solution

On note L l'équation $x - 5y + 3z = 8$ et L' l'équation $2x - 3y + 2z = 5$.

• L'équation $-2L$ est : $-2x + 10y - 6z = -16$.

• L'équation $-2L + L'$ est par définition l'équation obtenue en ajoutant membre à membre l'équation $-2L$ et l'équation L'. C'est donc l'équation : $-2x + 10y - 6z + 2x - 3y + 2z = -16 + 5$ c'est-à-dire $7y - 4z = -11$.

• On verifie très aisement que les triplets $(0; -1; 1)$ et $(\frac{1}{7}; -\frac{11}{7}; 0)$ sont des solutions communes d'une part à L et L' et d'autre part à L et $-2L + L'$.

• On peut conlure que les solutions communes à L et L' sont les solutions communes à L et $-2L + L'$.

Propriété . .

L et L' sont deux équations à p inconnues :

$$\begin{array}{rcll} a_1x_1 + \cdots + a_px_p & = & c & L \\ b_1x_1 + \cdots + b_px_p & = & d & L' \end{array}$$

Alors, les solutions communes à L et L' sont les solutions communes à L et $L' + \alpha L$, pour tout réel α.

Exemple

. On donne les équations $(L_1) : x + 3y - 4z = 2$ et $(L_2) : 2x - y + z = 3$.
L'équation $-2L_1$ est l'équation $-2x - 6y + 8z = -4$.
L'équation $-2L_1 + L_2$ est l'équation obtenue en ajoutant membre à membre l'équation $-2L_1$ et l'équation L_2 ; c'est donc l'équation $-2x - 6y + 8z + 2x - y + z = 3 - 4$ c'est-à-dire $-7y + 9z = -1$.

6.2 Transformations élémentaires d'un système (S)

(S) est un système de n équations linéaires à p inconnues, notées de haut en bas $L_1, L_2, \cdots, L_n$.

6.2.1 Transformation $L_i \longleftrightarrow L_j$

Activité. On donne le système $(S) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 & L_1 \\ 2x - y + z = 3 & L_2 \end{cases}$.

• Quel système obtient-on en permutant les équations L_1 et L_2 ?

• On note (T) le système obtenu. Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Solution

On donne le système $(S) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 & L_1 \\ 2x - y + z = 3 & L_2 \end{cases}$.

• En permutant les équations L_1 et L_2, on obtient le système suivant :

$$(T)\begin{cases} 2x - y + z = 3 & L_1 \\ x + 3y - 4z = 2 & L_2 \end{cases}.$$

• Puisque les systèmes (S) et (T) ont les mêmes équations, ils ont même ensemble de solutions. Donc les systèmes (S) et (T) sont équivalents (Voir définition 1.4).

Propriété

La transformation $L_i \longleftrightarrow L_j$ signifie que l'on permute les équations L_i et L_j. Cette transformation permet d'obtenir un système (T) équivalent au système (S).

Exemple

. Les systèmes $(S)\begin{cases} 2x + 3y = 5 & L_1 \\ x - y = 8 & L_2 \end{cases}$ et $(T)\begin{cases} x - y = 8 & L_1 \\ 2x + 3y = 5 & L_2 \end{cases}$ ont même ensemble de solutions car le couple $(\frac{29}{5}; -\frac{11}{5})$ solution de (S) est aussi solution de (T). Ils sont donc équivalents.

Le système (T) est obtenu par la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$.

6.2.2 Transformation $L_i \longleftarrow \alpha L_j$ (avec α réel non nul)

Activité

Soit le système $(S)\begin{cases} 3x - 12y + 6z = 24 & L_1 \\ x + 3y - 4z = 2 & L_2 \end{cases}$

• Déterminer l'équation $-3L_2$.

• Déterminer le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-3L_2$.

• On note (T) le système obtenu. Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Solution

Soit le système $(S)\begin{cases} 3x - 12y + 6z = 24 & L_1 \\ x + 3y - 4z = 2 & L_2 \end{cases}$

• L'équation $-3L_2$ est $-3x - 9y + 12z = -6$.

• Le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-3L_2$ est le système

$$(T)\begin{cases} 3x - 12y + 6z = 24 \\ -3x - 9y + 12z = -6 \end{cases}.$$

• D'après la propriété 1.1, les équations L_2 et $-3L_2$ ont même ensemble de solutions ; donc les systèmes (S) et (T) ont même ensemble de solutions. Ils sont donc équivalents.

Le système (T) est obtenu par la transformation $L_2 \longleftarrow -3L_2$.

Propriété

Le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_i par αL_i (avec $\alpha \neq 0$) est équivalent au système (S).
Cette transformation est notée $L_i \longleftarrow \alpha L_j$.

Exemple

. Les systèmes $(S)\begin{cases} x+y+z=1 \quad L_1 \\ 2x-y+3z=-1 \quad L_2 \end{cases}$ et $(T)\begin{cases} x+y+z=1 \quad L_1 \\ -x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z=\frac{1}{2} \quad L_2 \end{cases}$ ont même ensemble solutions. Ils sont équivalents et le système (T) est obtenu par la transformation $L_2 \longleftarrow -\frac{1}{2}L_2$.

6.2.3 Transformation $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$

Activité . .

Soit le système $(S)\begin{cases} x-3y+2z=1 \quad L_1 \\ 2x-y+3z=9 \quad L_2 \\ 3x-2y+4z=11 \quad L_3 \end{cases}$.

- Déterminer les équations $-2L_1+L_2$ et $-3L_1+L_3$.
- Déterminer le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-2L_1+L_2$ et l'équation L_3 par $-3L_1+L_3$.

On note (T) le système obtenu.

- Quelles transformations ont été faite dans (S) pour obtenir (T) ? Que pouvons-nous dire des systèmes (S) et (T) ?

Solution

Soit le système $(S)\begin{cases} x-3y+2z=1 \quad L_1 \\ 2x-y+3z=9 \quad L_2 \\ 3x-2y+4z=11 \quad L_3 \end{cases}$.

- L'équation $-2L_1+L_2$ est : $5y-z=7$ et l'équation $-3L_1+L_3$ est : $7y-2z=8$.
- Le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_2 par $-2L_1+L_2$ et l'équation L_3 par $-3L_1+L_3$ est le système : $(T)\begin{cases} x-3y+2z=1 \quad L_1 \\ 5y-z=7 \quad L_2 \\ 7y-2z=8. \quad L_3 \end{cases}$
- Les transformations qui ont été faite dans (S) pour obtenir (T) sont : $L_2 \longleftarrow -2L_1+L_2$ et $L_3 \longleftarrow -3L_1+L_3$.

D'après la propriété 1.2., les solutions communes à L_1, L_2 et L_3 sont les solutions communes à L_1, $-2L_1+L_2$ et $-3L_1+L_3$. Donc Les systèmes (S) et (T) ont même ensemble de solutions et on peut conclure qu'ils sont équivalents.

Propriété . .

Le système (T) obtenu en remplaçant dans le système (S) l'équation L_i par l'équation $L_i+\alpha L_j$ est équivalent au système (S).
Cette transformation est notée $L_i \longleftarrow L_i+\alpha L_j$.

Exercice d'application . .

Dans chacun des cas suivants déterminer les transformations élémentaires permettant de passer du système (S) au système équivalent (S').

a) $(S)\begin{cases} x-y+z+t=1 \\ y+z-2t=1 \\ -10z+8t=-6 \\ z-t=3 \end{cases}$ $(S')\begin{cases} x-y+z+t=1 \\ y+z-2t=1 \\ -10z+8t=-6 \\ -2t=4 \end{cases}$

b) $(S)\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ $(S')\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2z=1 \\ 3y+z=2 \end{cases}$

c) $(S)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 5x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \end{cases}$ $(S')\begin{cases} 5x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

d) $(S)\begin{cases} -3x-5y+2z=-1 \\ -x+3y+z=-2 \end{cases}$ $(S')\begin{cases} -x-\frac{5}{3}y+\frac{2}{3}z=-\frac{1}{3} \\ -2x+6y+2z=-4 \end{cases}$

7 Méthodes de résolution d'un système linéaire

Savoirs

- Principe de la méthode de Gauss
- Principe de la méthode de combinaison

Savoirs-faire

- Resoudre un système linéaire

7.1 Principe de la méthode de Gauss

Activité . .

Considérons le système $(S)\begin{cases} x-3y+2z=1 \quad L_1 \\ 2x-y+3z=9 \quad L_2 \\ 3x-2y+4z=11. \quad L_3 \end{cases}$

Première étape

Le but est d'obtenir un système (S_1) de la forme suivante :

$$\begin{cases} x-3y+2z=1 \\ \bullet y+\bullet z=\bullet \\ \bullet y+\bullet z=\bullet \end{cases}$$

où le symbole $\bullet$ désigne à chaque fois un nombre.

1. Pour cela, du système (S) gardons la ligne L_1, la ligne L_3 et éffectuons la transformation $L_2 \longleftarrow -2L_1 + L_2$.

Nous obtenons le système (S') :

$$(S')\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

2. A partir de (S'), gardons la ligne L_1, la ligne L_2 et éffectuons la transformation $L_3 \longleftarrow -3L_1 + L_3$. Nous obtenons le système (S_1) :

$$(S_1)\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \quad L_1 \\ 5y - z = 7 \quad L_2 \\ 7y - 2z = 8. \quad L_3 \end{cases}$$

Deuxième étape

Le but est d'obtenir, à partir du système (S_1), un système (S_2) de la forme :

$$(S_2)\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ \bullet z = \bullet \end{cases}$$

Pour cela, du système (S_1) gardons la ligne L_1, la ligne L_2 et éffectuons la transformation $L_3 \longleftarrow -\frac{7}{5}L_2 + L_3$.

a) Vérifiez que l'on obtient le système :

$$(S_2)\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ -\frac{3}{5}z = -\frac{9}{5}. \end{cases}$$

Un tel système est dit **triangulaire**.

b) Résolvez ce système (S_2) et vérifez qu'il a un seul triplet $(x_0; y_0; z_0)$ solution du système (S).

★★ Méthode de GAUSS

La méthode de GAUSS consiste à tranformer un système linéaire en un système triangulaire équivalent en exécutant des transformations élémentaires sur les lignes. Ainsi,

Pour résoudre un système linéaire par la méthode de GAUSS, on procède comme suit :

- **On vérifie que dans la ligne L_1, le coéfficient de la première inconnue est non nul, sinon on échange L_1 avec une ligne dont le coéfficient de la première inconnue est non nul ;**
- **on garde la ligne L_1 et à l'aide de la transformation élémentaire $[L_i \longleftarrow \lambda L_i + \beta L_j]$, on annule tous les coéfficients de la première inconnue dans les autres lignes ;**
- **on recommence le procédé pour la deuxième inconnue, la troisième, $\ldots$, jusqu'à obtention d'un système triangulaire.**

⧫ Exercice résolu 1

Résolvez le système suivant : $(S)\begin{cases} 2x - y + z = 3 \quad L_1 \\ x + 3y - 4z = 2 \quad L_2 \\ 3x - 2y + z = 1. \quad L_3 \end{cases}$

◊ **Solution commentée**

Commentaires et méthode	Réalisation
Il peut être avantageux de placer L_2 en première ligne, cela facilitera les calculs à l'étape suivante. Ceci se fait par la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$ et on obtient le système (S_1) équivalent à (S)	$(S_1)\begin{cases} x+3y-4z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x-2y+z=1. \end{cases}$
On conserve L_1 de (S_1) et on l'utilise pour éliminer l'inconnue x dans les équations L_2 et L_3. Ceci se fait par les transformations $L_2 \longleftarrow L_2-2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-3L_1$. On obtient le système (S_2) équivalent à (S_1)	$(S_2)\begin{cases} x+3y-4z=2 \\ -7y+9z=-1 \\ -11y+13z=-5. \end{cases}$
On conserve L_1 et L_2 de (S_2) ; on utilise L_2 pour éliminer l'inconnue y dans L_3. Ceci se fait par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3-\frac{11}{7}L_2$ et on obtient le système (S_3) équivalent à (S)	$(S_3)\begin{cases} x+3y-4z=2 \\ -7y+9z=-1 \\ -\frac{8}{7}z=-\frac{24}{7}. \end{cases}$
Le système (S_3) est triangulaire. On le résout par substitutions « en remontant ».	$\begin{cases} z=3 \\ -7y+9=-1 \quad \textit{donc} \quad y=4 \\ x+3-4=2 \quad \textit{donc} \quad x=2 \end{cases}$
On conclut sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de système (S)	Le triplet $(2;4;3)$ est la seule solution de système (S). On a $\mathcal{S}=\{(2;4;3)\}$

♦♦ **Exercice résolu 2**

Résolvez le système suivant : $(S)\begin{cases} 2x-y-z-t=-1 & L_1 \\ x-3y+z+t=-2 & L_2 \\ x+y-2z+4t=4 & L_3 \\ x-y+z-2t=-8 & L_4 \end{cases}$

◊◊ **Solution commentée**

Commentaires et méthode	Réalisation
Comme précédemment, il est avantageux de placer en première ligne l'une des équations L_2, L_3, L_4, car le coefficient de x est 1. Utilisons par exemple la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$, on obtient les système (S_1).	$(S_1)\begin{cases} x-3y+z+t=-2 & L_1 \\ 2x-y-z-t=-1 & L_2 \\ x+y-2z+4t=4 & L_3 \\ x-y+z-2t=-8 & L_4 \end{cases}$
Eliminons x dans les trois dernières équations par les transformations élémentaires $L_2 \longleftarrow L_2-2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, $L_4 \longleftarrow L_4-L_1$. On obtient le système (S_2).	$(S_2)\begin{cases} x-3y+z+t=-2 \\ 5y-3z-3t=3 \\ 4y-3z+3t=6 \\ 2y-3t=-6 \end{cases}$
Echangeons l'ordre des inconnues afin de profiter du fait que l'inconnue z ne figure pas dans L_4. On obtient le système (S_3).	$(S_3)\begin{cases} x-3y+z+t=-2 \\ -3z+5y-3t=3 \\ -3z+4y+3t=6 \\ 2y-3t=-6 \end{cases}$
Par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3-L_2$, éliminons l'inconnue z dans L_3. On obtient le système (S_4).	$(S_4)\begin{cases} x-3y+z+t=-2 \\ -3z+5y-3t=3 \\ -y+6t=3 \\ 2y-3t=-6 \end{cases}$
Par la transformation $L_4 \longleftarrow L_4+2L_3$ éliminons l'inconnue y dans L_4. On obtient (S_5).	$(S_5)\begin{cases} x-3y+z+t=-2 \\ -3z+5y-3t=3 \\ -y+6t=3 \\ 9t=0 \end{cases}$
Le système (S_5) est triangulaire ; il admet un seul quadruplet $(x;y;z;t)$ solution de (S). On a :	$\mathcal{S}=\{(-5;-3;-6;0)\}$

♦♦♦ **Exercice résolu 3**

Résolvez le système $(S)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=-1 \\ -4x+5y-7z=4. \end{array}\right.$

◊◊◊ **Solution commentée**

Commentaires et méthode	Réalisation
On garde L_1 et on l'utilise pour éliminer x dans les équations L_2 et L_3 par les transformations : $L_2 \longleftarrow L_2-2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3+4L_1$. On obtient le système (S_1) équivalent à (S).	$(S_1)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -3y+z=-3 \\ 9y-3z=8. \end{array}\right.$
On garde L_1 et L_2 de (S_1) et on utilise L_2 pour éliminer l'inconnue y dans L_3. Pour cela on utilise la transformation $L_3 \longleftarrow L_3+3L_2$. On obtient (S_2) équivalent à (S_1).	$(S_2)\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -3y+z=-3 \\ 0=-1. \end{array}\right.$
Ainsi le système (S_2) n'a pas de triplets solution car on a toujours $0 \neq -1$. Le système (S) équivalent à (S_2) n'a donc pas de solution.	$\mathcal{S}=\varnothing$

♦♦♦♦ **Exercice résolu 4**

Résolvez le système $(S)\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=11 \\ -2x+y+2z=15 \\ 3x+y+z=-4. \end{array}\right.$

◊◊◊◊ **Solution commentée**

En opérant comme dans les exercices précédent, on obtient par les transformations $L_2 \longleftarrow L_2+2L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-3L_1$, le système :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=11 \\ 5y+8z=37 \\ -5y-8z=-37. \end{array}\right.$$

Par la transformation $L_3 \longleftarrow L_3+L_2$, on obtient le système (S_2) :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=11 \\ 5y+8z=37 \\ 0=0. \end{array}\right.$$

Ainsi, le triplet $(x; y; z)$ est solution de (S_2) (donc de (S)), dès qu'il est solution des deux premières équations de (S_2), c'est-à-dire que le système (S) est équivalent au système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 5y + 8z = 37. \end{cases}$$

On obtient alors : $y = \frac{37-8z}{5}$, puis en reportant dans la première équation, on obtient : $x = \frac{z-19}{5}$.
Les solutions de (S) sont donc les triplets $\left(\frac{z-19}{5}; \frac{37-8z}{5}; z\right)$ où z est un réel quelconque.

Remarque. Notez qu'au lieu d'exprimer x et y en fonction de z, on aurait pu exprimer x et z en fonction de y.

7.2 Méthode par combinaison linéaire

Activité . .

Soit à resoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $(S) \begin{cases} x - 2y - 3z = -9 \quad L_1 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \quad L_2 \\ x + y + 2z = 9 \quad L_3 \end{cases}$

1^{er} **étape** Conservons L_1 et éliminons l'inconnue z dans L_2 et L_3, on a :

- $-3L_1 + 5L_2 : \begin{cases} -6x + 6y - 15z = 0 \\ 25x + 10y + 15z = -10 \end{cases}$ On obtient : $19x + 16y = -10$
- $-2L_1 + 5L_3 : \begin{cases} -4x + 4y - 10z = 0 \\ 15x + 20y + 10z = -50 \end{cases}$ On obtient : $11x + 24y = -50$

2^e **étape** Résolvons ensuite par combinaison le système : $\begin{cases} 19x + 16y = -10 \\ 11x + 24y = -50 \end{cases}$

On multiplie la première ligne par -11 et la deuxième par 19 : $\begin{cases} -209x - 176y = 110 \\ 209x + 456y = -950 \end{cases}$
Une addition membre à membre permet d'obtenir : $280y = -840$ i.e $y = -3$ et par suite, on trouve $x = 2$.

3^e **étape** On revient déterminer z dans l'une des équations du système initial (S). on trouve : $z = 2$.

4^e **étape** On vérifie que le triplet $(2; -3; 2)$ est éffectivement solution du système (S).

★★ Description de la Méthode par combinaison linéaire

Pour résoudre un système linéaire (S) dans $\mathbb{R}^3$ par la combinaison linéaire, on procède comme suit :

- **On garde la ligne L_1 et à l'aide de la transformation élémentaire $[L_i \longleftarrow \lambda L_i + \beta L_j]$, on élimine l'un des inconnues dans les autres lignes ; on obtient alors un système (S_1) de deux équations à deux inconnues.**
- **On resoud par la combinaison linéaire le système (S_1) obtenu et on détermine les deux inconnues du système (S_1).**
- **On revient déterminer la dernière inconnue en remplaçant dans l'une des équations du système (S), les valeurs des deux inconnues trouvé en resolvant le système (S_1).**
- **On vérifie que le triplet trouvé est éffectivement solution du système initial (S).**

Exercice d'application

a) Résoudre les systèmes linéaires suivants. (On utilisera la méthode de Gauss)

$$(1)\begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+y+2z=1 \\ 3x-3y-5z=2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x-y-3z=-3 \\ -2x-3y+4z=-4 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} 3a+4b+c=7 \\ a+2b-c=13 \\ 2a-b+2c=5 \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6 \end{cases} \qquad (6)\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8 \end{cases}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants. (On utilisera la méthode par combinaison linéaire)

$$(1)\begin{cases} 3x-2y+z=7 \\ x-4y+2z=9 \\ -2x+y+z=-1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-y-z=7 \\ -x+y-2z=2 \end{cases}$$

7.3 Résolution des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^3$ et interprétations géometriques

Savoirs

- Interprétation géométrique
  - Position relative de deux plans de l'espace ;
  - Position relative de trois plans de l'espace.

Savoirs-faire

- Donner une interprétation géométrique d'un système linéaire.

Rappels

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Tout plan admet une équation du type $ax+by+cz+d=0$ où l'un au moins des réels a, b et c est non nul et d est un réel quelconque.
- Réciproquement :
  Soit a, b ,c et d des réels tels que l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul.
  L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan.

Conséquences

- Résoudre un système de deux équations de $\mathbb{R}^3$ revient à déterminer la position relative de 2 plans
- Résoudre un système de trois équations de $\mathbb{R}^3$ revient à déterminer la position relative de 3 plans

7.3.1 Systèmes de deux équations dans $\mathbb{R}^3$

Activité. .

Soit le système $(S)\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ -x+y+2z=-2 \end{cases}$

1) Posons l'inconnue $z=\lambda \in \mathbb{R}$. Quel système (S') obtient-t-on ?

2) Résoudre (S') et donner les solutions en fonction de λ.

3) Déduire les solutions de (S).

4) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$ et $-x+y+2z+2=0$.

a) Déterminer les positions relatives de ces deux plans.

b) Déterminer les coordonnées d'un point $M_0 \in (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$.

c) Conclure.

Solution

1) Posons l'inconnue $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Alors on obtient à partir du système (S), un système (S') de deux équations à deux inconnues : $(S') \begin{cases} 2x+y = 1+\lambda \\ -x+y = -2-2\lambda \end{cases}$

2) La résolution de système (S') conduit à la solution (x,y,z) tel que : $x = 1+\lambda$; $y = -1-\lambda$; $z = \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

3) Le système (S) a donc une infinité de solutions constituées des triplets $(1+\lambda; -1-\lambda; \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

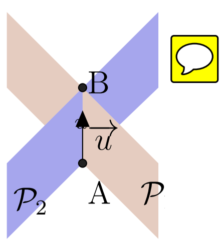
4) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$ et $-x+y+2z+2=0$.

a) Soit $\overrightarrow{n}(2;1;-1)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n'}(-1;1;2)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$.
Alors, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas coplanaires, ce qui signifie que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b) Tout point $M_0 \in (\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$ a pour coordonnées $(1+\lambda; -1-\lambda; \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(1;-1;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;-1;1)$.

Interprétation géométrique



Activité . .

Soit le système $(S) \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=-3 \end{cases}$

1) Résoudre (S).

2) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x-y+z-5=0$ et $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+3=0$.
Déterminer les positions relatives de ces deux plans.

Solution

1) En posant $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Alors on obtient à partir du système (S), un système (S') de deux équations à deux inconnues : $(S')\begin{cases} 2x - y = 5 - \lambda & L_1 \\ x - \frac{1}{2}y = -3 - \frac{1}{2}\lambda & L_2 \end{cases}$

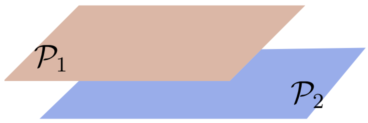
Par la transformation $L_2 \leftarrow -2L_2 + L_1$, éliminons l'inconnu x dans L_2. On obtient le système $(S")\begin{cases} 2x - y = 5 - \lambda \\ 0 = 11\lambda \end{cases}$

Le système (S) n'a donc pas de solution, $\mathcal{S} = \varnothing$.

2) Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $2x - y + z - 5 = 0$ et $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + 3 = 0$.

Soit $\overrightarrow{n}(2; -1; 1)$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n'}(1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ un vecteur normal de $\mathcal{P}_2$.

On constate que : $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{n'}$. Donc les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont parallèles.

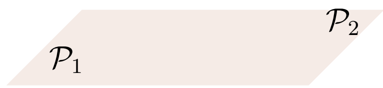
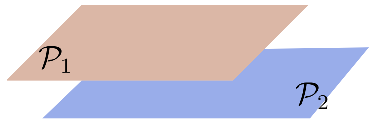
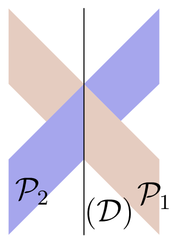


Proposition . .

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les plans d'équations respectives : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

Soit (Σ) le système linéaire formé à partir des équations de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ avec a, b, c, a', b' et c' des nombres réels tels que (a, b, c) et (a', b', c') sont différents de $(0, 0, 0)$.

Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ) est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$	**Ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ)**	**Interprétation géométrique**
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$	(Σ) **a une infinité de solutions ;** $\mathcal{S}$ **est l'ensemble des triplets** $(x;y;z)$ **tels que :**$ax+by+cz+d=0$	
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$	(Σ) **n'a pas de solution ;** $\mathcal{S} = \varnothing$	
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\mathcal{D})$	(Σ) **a une infinité de solutions ;** $\mathcal{S}$ **est l'ensemble des triplets** $(x;y;z)$ **des points de** $\mathcal{D}$	

Exercice d'application

Exercice 5. .

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x+5y-6z=8 \\ x+y-6z=0 \end{cases} ; \begin{cases} -3x-5y+2z=-1 \\ -3x-5y+z=-2 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$$

a) Déterminer dans chaque cas trois triplets de solution du système proposé ;

b) Donner dans cas une interprétation graphique.

Exercice 6. .

Deux bonbons, cinq beignets et quatre gommes à mâcher coûtent 74F.

Trois bonbons, cinq beignets et une gomme à mâcher coûtent 66F.

Combien coûtent deux bonbons, sept beignets et huit gommes à mâcher ?

7.3.2 Systèmes linéaires de trois équations dans $\mathbb{R}^3$

Activité

On considère le système $(\Sigma)\begin{cases} 2x+y-z=1 & L_1 \\ -x+y+2z=-2 & L_2 \\ x+2y+z=-1 & L_3 \end{cases}$

a) Montrer que le système (Σ) est équivalent au système $(\Sigma')\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+3z=-3 \end{cases}$

b) Résoudre (Σ') et déduire les solutions de (Σ).

c) Donner les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$; $-x+y+2z+2=0$; $x+2y+z+1=0$.

<u>**Solution**</u>

a) Conservons la ligne L_1, par les transformations $L_2 \leftarrow L_1+2L_2$ et $L_3 \leftarrow -L_1+2L_3$, éliminons l'inconnue x dans L_2 et L_3.

On obtient le système équivalent $(\Sigma_1)\begin{cases} 2x+y-z=1 & L_1 \\ 3y+3z=-3 & L_2 \\ 3y+3z=-3 & L_3 \end{cases}$

De même, conservons L_1 et L_2 et par la transformation $L_3 \leftarrow -L_2+L_3$, éliminons l'inconnue y dans L_3.

On obtient le système $(\Sigma_2)\begin{cases} 2x+y-z=1 & L_1 \\ 3y+3z=-3 & L_2 \\ 0=0 & L_3 \end{cases}$

Ce dernier système est équivalent au système $(\Sigma')\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+3z=-3 \end{cases}$

b) Choisissons l'inconnue z comme paramètre. On ramène (Σ') au système de deux équations linéaires à deux inconnues suivant : $\begin{cases} 2x+y=1+z \\ 3y=-3-3z \end{cases}$

La résolution de ce système conduit à la solution $(z+1,-z-1)$.

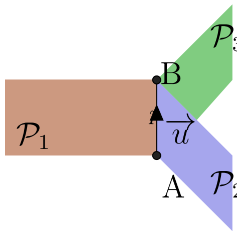
Le système (Σ) admet donc une infinité de solutions : ce sont les triplets de la forme $(z+1,-z-1,z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

c) Interprétation géométrique

Soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$; $-x+y+2z+2=0$; $x+2y+z+1=0$.

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants suivants la droite passant par les points $A(1;-1;0)$ et $B(0;0;-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,-1,1)$.

Illustration graphique



Activité . .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x+y-z=1 & L_1 \\ 3x+3y-z=2 & L_2 \\ 2x+4y=3 & L_3 \end{cases}$

a) A l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow -3L_1+2L_2$, $L_3 \leftarrow -L_1+L_3$ d'une part et d'autre part $L_3 \leftarrow -L_2+L_3$, déterminer le système triangulaire équivalent à (Σ).

b) Déduire les solutions de (Σ).

c) Donner les positions relatives des plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$; $3x+3y-z-2=0$; $2x+4y-3=0$.

Solution

a) Conservons L_1 et éliminons x dans L_2 et L_3 à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow -3L_1+2L_2$, $L_3 \leftarrow -L_1+L_3$. On obtient le système : $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+z=1 \\ 3y+z=2 \end{cases}$

Eliminons ensuite y dans L_3 à l'aide de la transformetion $L_3 \leftarrow -L_2+L_3$. On obtient le système triangulaire $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3y+z=1 \\ 0=1 \end{cases}$

Ce dernier système est équivalent à (Σ).

b) Ce système triangulaire n'admet pas de solution. Donc le système (Σ) n'a pas de solution.

c) **Interprétation géométrique**

Soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x+y-z-1=0$; $3x+3y-z-2=0$; $2x+4y-3=0$.

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point en commun.

Etudions leurs positions relatives

Soient $\overrightarrow{n_1}(2,1,-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

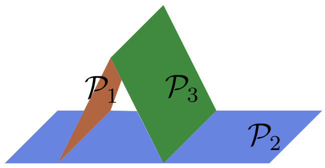
$\overrightarrow{n_2}(3,3,-1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\overrightarrow{n_3}(2,4,0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

Parmi les vecteurs $\overrightarrow{n}_1$, $\overrightarrow{n}_2$ et $\overrightarrow{n}_3$, il n'en existe pas deux qui soient colinéaires.

Donc les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont deux à deux sécants.

Illustration graphique



Activité. .

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 & L_1 \\ -x + 3y - 2z = 7 & L_2 \\ 5x - 2y - z = -8 & L_3 \end{cases}$

a) A l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$, $L_3 \leftarrow -5L_1 + 2L_3$ d'une part et d'autre part $L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3$, déterminer le système triangulaire équivalent à (Σ).

b) Déduire les solutions de (Σ).

c) Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Solution

a) Conservons L_1 et éliminons x dans L_2 et L_3 à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2$, $L_3 \leftarrow -5L_1 + 2L_3$. On obtient le système : $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ y - 7z = -41 \end{cases}$

Eliminons ensuite y dans L_3 à l'aide de la transformetion $L_3 \leftarrow L_2 - 5L_3$. On obtient le système triangulaire $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 5y - 3z = 19 \\ 32z = 224 \end{cases}$

Ce dernier système est équivalent à (Σ).

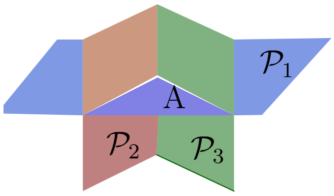
b) La résolution du système triangulaire conduit à l'unique solution $(3, 8, 7)$ du système (Σ).

c) Interprétation géométrique

Soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x - y + z - 5 = 0$; $-x + 3y - 2z - 7 = 0$; $5x - 2y - z - 8 = 0$.

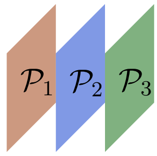
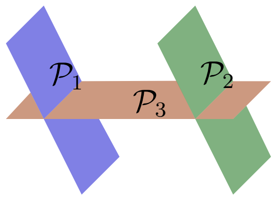
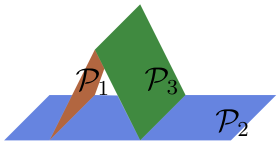
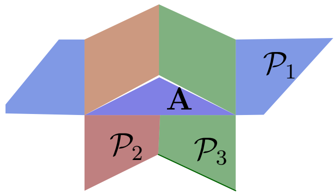
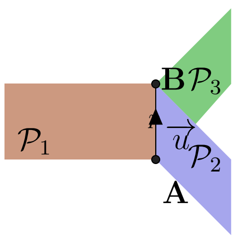
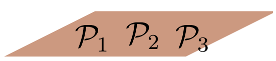
$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont en commun l'unique point $A(3, 8, 7)$.

Illustration graphique



Proposition

Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ les plans d'équations respectives : $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ **et** $a"x + b"y + c"z + d" = 0$ **avec** a, b, c, a', b', c', $a"$, $b"$ **et** $c"$ **des nombres réels tels que** (a, b, c), (a', b', c') **et** $(a", b", c")$ **sont différents de** $(0, 0, 0)$.
Soit (Σ) **le système linéaire formé à partir des équations de** $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ **et** $\mathcal{P}_3$.
Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ **des solutions de** (Σ) **est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de** $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Positions relatives de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$	Interprétation géométrique	Ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ)
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$		(Σ) n'a pas de solution. $\mathcal{S} = \varnothing$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{A\}$		(Σ) a une solution : $(x_A; y_A; z_A)$
$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = (\mathcal{D})$		(Σ) a une infinité de solutions. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $(\mathcal{D})$
$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$		(Σ) a une infinité de solutions. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des triplets de coordonnées des points de $(\mathcal{P}_1)$

Activité d'institutionnalisation

On considère le système (Σ) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 & L_1 \\ -6x + 3y + 3z = 1 & L_2 \\ x + y = -3 & L_3 \end{cases}$

a) Résoudre ce système.

b) Donner une interpretation géométrique du résultat obtenu.

Solution

a) Conservons L_1 et éliminons x dans L_2 et L_3 à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient le système : $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 0 = 7 \\ -3y - z = 8 \end{cases}$

Donc le système (Σ) n'a pas de solution.

b) **Interprétation géométrique**

Soient les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives : $2x - y - z - 2 = 0$; $-6x + 3y + 3z - 1 = 0$; $x + y + 3 = 0$.

$\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ n'ont aucun point en commun.

Etudions leurs positions relatives

Soient $\overrightarrow{n_1}(2, -1, -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$

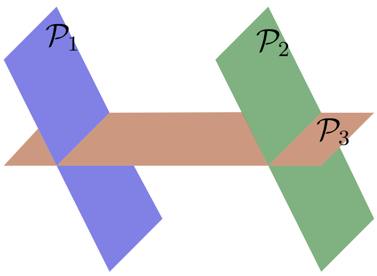
$\overrightarrow{n_2}(-6, 3, 3)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$

$\overrightarrow{n_3}(1, 1, 0)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_3$

On constate que $\overrightarrow{n}_2 = 3\overrightarrow{n}_1$. Donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

$\overrightarrow{n}_1$ et $\overrightarrow{n}_3$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ puis $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants.

Illustration graphique



Exercice d'application

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes linéaires suivants et donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

(1) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -2 \\ 2x - 2y + 4z = -3 \\ -4x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 5x - y + z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ -x + y - 2z = 2 \end{cases}$

$(4)\begin{cases} x-2y-z=1 \\ 3x-6y-3z=3 \\ -2x+4y+2z=-2 \end{cases}$ $(5)\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ 2x-4y+6z=3 \\ -\frac{1}{2}x+y-\frac{3}{2}z=5 \end{cases}$ $(6)\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 2x+3y-z=2 \\ x+3y+z=1 \end{cases}$

8 Résolution de problèmes se ramenant aux systèmes linéaires

Savoirs

- Applications des systèmes linéaires
  - Utilisation des systèmes linéaires pour résoudre des problèmes

Savoirs-faire

- Choix des inconnues
- Mise en équation
- Résolution

Dans cette partie, nous ne ferons que des activités(exemples) bien détaillées.

Activité

Déterminer une fonction polynôme f de dégré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions :
$f(0)=0$; pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x+f(x-2)$.

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Désignons par a, b, c, d les nombres réels tels que la fonction polynôme f est définie par : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

▲ **Mise en équation**

- La condition (1) : $f(0)=0$ se traduit par $(1')$: $d=0$.
- La condition (2) : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x+f(x-2)$ se traduit par $(2')$: pour tout $x\in\mathbb{R}$, $a[x^3-(x-2)^3]+b[x^2-(x-2)^2]+2c=x$.

Pour déterminer les nombres réels a, b, c formons trois équations contenant ces trois inconnues. Il suffit pour cela d'attribuer dans $(2')$ au nombre réel x trois valeurs : $x=2$; $x=3$; $x=4$.

On obtient le système : $(\Sigma)\begin{cases} 8a+4b+2c=2 \\ 26a+8b+2c=3 \\ 56a+12b+2c=4 \end{cases}$

La résolution de ce système permet d'obtenir : $a=0$; $b=\frac{1}{4}$; $c=\frac{1}{2}$.

▲ **Solution du problème**

La fonction polynôme f est définie par : $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x$.

Activité

Un potier fabrique trois types différents A, B, C de canaris.
• Pour fabriquer un canari du type A, le potier a besoin de : 40 kg d'argile, 60 litres d'eau et 15 kg de bois de chauffage.
• Pour fabriquer un canari du type B, le potier a besoin de : 18 kg d'argile, 20 litres d'eau et 7 kg de bois de chauffage.
• Pour fabriquer un canari du type C, le potier a besoin de : 70 kg d'argile, 110 litres d'eau et 35 kg de bois de chauffage.
En une semaine, le potier utilise pour la fabrication de ces canaris : 3656 kg d'argile, 5040 litres d'eau et 1494 kg de bois de chauffage.
Déterminer le nombre de canaris de chaque type que ce potier fabrique ainsi en une semaine.

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Soit x le nombre de canaris de type A, y le nombre de canaris de type B et z le nombre de canaris de type C fabriqué en une semaine.

▲ **Mise en équation**

La traduction de l'énoncé conduit au système : $(\Sigma)\begin{cases} 40x + 18y + 70z = 3656 \\ 60x + 20y + 110z = 5040 \\ 15x + 7y + 35z = 1494 \end{cases}$

La résolution de ce système permet d'obtenir : $x = 38$; $y = 72$; $z = 12$.

▲ **Solution du problème**

En une semaine, le potier fabrique 38 canaris de type A, 72 canaris de type B et 12 canaris de type C.

Activité

Une usine fabrique trois produits différents A, B et C. La fabrication d'une unité de produit nécessite 5 heures de travail pour A, 3 heures pour B et $\frac{1}{3}$ heure pour C.
L'usine fabrique 100 unités de ces produits pendant 100 heures de travail, le nombre d'unités du produit B étant le tiers du nombre d'unités de A. Parmi ces 100 unités, combien d'unités de chaque produit l'usine fabrique-t-elle ?

Solution

▲ **Choix des inconnues**

Désignons par :

a le nombre d'unités du produit A fabriquées en 100 heures de travail ;

b le nombre d'unités du produit B fabriquées en 100 heures de travail ;

c le nombre d'unités du produit C fabriquées en 100 heures de travail.

▲ **Mise en équation**

Contrainte sur le temps

Temps de fabrication, en heures du produit A : $5a$

Temps de fabrication, en heures du produit B : $3b$

Temps de fabrication, en heures du produit C : $\frac{1}{3}c$

On a : $5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100$.

Contrainte sur la production

Production totale de l'usine en 100 heures de travail : $a + b + c = 100$

La production de B est le tiers de la production de A : $a = 3b$

Système de contrainte

Les nombres réels a, b et c sont solutions du système d'équations : $(\Sigma)\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ a + b + c = 100 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$

▲ **Résolution**

Conservons la ligne L_1 et éliminons a dans les lignes L_2 et L_3. Cela se fait à l'aide des transformations élémentaires $L_2 \leftarrow -L_1 + 5L_2$ et $L_3 \leftarrow -L_1 + 5L_3$ respectivement.

On obtient le système équivalent : $\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ -18b - \frac{1}{3}c = -100 \end{cases}$

Conservons maintenant les lignes L_1, L_2 et à l'aide de la transformation élémentaire $L_3 \leftarrow 9L_2 + L_3$ éliminons b dans L_3.

On obtient le système triangulaire $\begin{cases} 5a + 3b + \frac{1}{3}c = 100 \\ 2b + \frac{14}{3}c = 400 \\ \frac{125}{3}c = 3500 \end{cases}$

Ce système admet une seule solution : $(12; 4; 84)$

▲ **Solution du problème**

L'usine fabrique 12 unités du produit A, 4 unités du produit B et 84 unités du produit C en 100 heures de travail.

Exercice d'application.

Exercice 7. .

Déterminer le polynôme de dégré 4 dont la courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, passe par les points O, $A(1; -\frac{13}{2})$, $B(2; -4)$ et admet en chacun des points A et B une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

Exercice 8. .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $f'(x) = \frac{1}{2}$ et que $(\mathcal{C})$ admette pour asymptote la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 1$.

b) Déduire les primitives de la fonction f.

Exercice 9. .

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points $A(-1;2)$, $B(2;4)$ et $C(4;2)$.

1. **Déterminer les nombres réels a, b et c pour que le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ soit circonscrit au triangle ABC.**
2. **Préciser le centre de ce cercle.**

9 Exercices

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ chacun des systèmes suivants :

$$(1)\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = 2 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -4x - 5y + 7z = 1 \\ 2x + y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 8 \\ x + y - 6z = 0 \end{cases} \quad (5)\begin{cases} -3x - 5y + 2z = -1 \\ -3x - 5y + z = -2 \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$(7)\begin{cases} x + 2y^2 + 3z^3 = 7 \\ 2x + 3y^2 + 4z^3 = 11 \\ x - y^2 - z^3 = 0 \end{cases} \quad (8)\begin{cases} -2x + y - z - t = 3 \\ x - 2y + z - 2d = 7 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + 2y - 2z = 15 \end{cases} \quad (9)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 8x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$(10)\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 4x - y + 7z = 0 \\ 2x + 5y + 9z = 4 \end{cases} \quad (11)\begin{cases} a + b + c + d = -1 \\ 3a - b + 2c - 5d = -26 \\ -a + c - 2d = -8 \\ 8a + 2b + d = 0 \end{cases}.$$

Exercice 11. .

1. Résous le système suivant : $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$
2. Détermine la fonction trinôme f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$ et telle que sa courbe représentative passe par les points de coordonnées $A(1, 0), B(-1, 4)$ et $C(2, 7)$.

Exercice 12. .

Déterminer un polynôme P de degré trois vérifiant les conditions :

$$P(1) = -9\,; P(2) = -9\,;\; P(3) = 4\,;\; P(4) = 45\,;$$

Exercice 13. .

On considère les systèmes (S) et (S') suivants :

$$(S): \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 21 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ 5x + 3y - 2z = -11 \end{cases} \quad ; (S'): \begin{cases} 3|x| + \dfrac{4}{2y+1} + 5\sqrt{z-2} = 21 \\ -2|x| - \dfrac{2}{2y+1} + 3\sqrt{z-2} = 0 \\ 5|x| - \dfrac{6}{2y+1} - 2\sqrt{z-2} = -11 \end{cases}$$

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre dans $\mathbb{R}$@3 le système (S).
2. En déduire la résolution du système (S').

Exercice 14. .

L'unité de longueur est le centimètre. On considère dans le plan un triangle ABC tel que $AB = cBC = a$ et $AC = b$.

Sachant que a, b et c vérifiant le système $\begin{cases} a + b - c = 4 \\ a + b + c = 10 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 34 \end{cases}$

1. Calculer a, b et c (On pourra dans un premier temps combiner les deux premières équations de manière à obtenir le nombre c ; puis se ramener à un système symétrique en a et b).
2. En déduire la nature du triangle ABC et calculer la valeur exacte de l'aire du triangle ABC.

Exercice 15. .

ABC est un triangle tel que$AB < CA$. On pose $BC = x; CA = y$ et $AB = z$

On suppose de plus que x, y et z sont les solutions du système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 2x - y^2 + z + \frac{40}{z} = -5 \\ x + y^2 - 2(z + \frac{40}{z}) = 0 \\ 4x - 2y^2 + 3(z + \frac{40}{z}) = 4 \end{cases}$$

Déterminerx, y et z puis en déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 16. .

Dans le système suivant, a, b et c sont les longueurs des arêtes d'un parallélépipède rectangle.

$$\begin{cases} a^2 + \frac{16}{b^2-1} - \frac{15}{c} = 15 \\ -2a^2 + \frac{24}{b^2-1} + \frac{5}{c} = -29 \\ \frac{1}{2} - \frac{8}{b^2-1} - \frac{10}{c} = 5 \end{cases}$$

1. Résoudre (E) .
2. En déduire le volume de ce parallélépipède.

Exercice 17.

1. Résoudre le système (I) $\begin{cases} x + y + z = 46350 \\ 26x + 11y + 36z = 1263600 \\ 26x - z - 15 = 0 \end{cases}$.
2. Une station d'essence affiche les prix suivants à la pompe par litre :
   essence super : 437 Fcfa pétrole :191 Fcfa gasoil : 354 Fcfa Pour un montant total de 139035 Fcfa, un entrepreneur remplit trois bidons. L'un avec super, l'autre avec du gasoil et le dernier avec du pétrole. Les bidon de gasoil contient 15 litres de plus que celui du pétrole. La capacité totale des trois bidons est de 385 litres.
   Trouver les capacités respectives de chacun des trois bidons

Exercice 18.

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x+y+z=44 \\ x+2y+3z=54 \\ x+6z+18z=108 \end{cases} .$$

2. Dans une entreprise, le salaire mensuel des employés est de $7040F$, celui des techniciens le double et celui des cadres $21120F$. La masse salariale mensuelle de cette entreprise s'élève à $380160F$, pour un salaire moyen de $8640F$.

   Pour des raisons économiques, la direction doit diminuer la masse salariale de 2 pourcent. Cette diminution se repartie alors de la façon suivante : une baisse de 1 pourcent sur le salaire des employés, de 3 pourcent sur celui des techniciens et de 6 pourcent sur celui des cadres.

   On désigne respectivement par a le nombre d'employés, b le nombre de techniciens et c le nombre de cadres.

   (a) traduire les données précédentes par trois égalités vérifiées par les nombres entiers a, bet c(on justifiera clairement chaque égalité)

   (b) En déduire l'effectif de chaque catégorie de salarié.

Exercice 19. .

Trois frères ont acheté un vigne pour 100000 F. Le cadet dit qu'il pourrait la payer seul si le second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a ; le second dit que, si l'aîné lui donnait le tiers seulement de son argent, il paierait la vigne seul ; enfin, l'aîné ne demande que le quart de l'argent du cadet pour payer seul la vigne.
Combien chacun avait-il d'argent ?

Exercice 20. .

Deux bonbons, cinq beignets et quatre gommes à mâcher coûtent $74F$, trois bonbons , cinq beignets et une gomme à mâcher coûtent $66F$.
Combien coûtent deux bonbons , sept beignets et huit gommes à mâcher ?

Exercice 21. .

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement $25F; 60F$ et $80F$. Elle achète un total de 12 fruits pour un somme de $640F$.
Déterminer le nombre de fruit de chaque variété.

Exercice 22. .

Au marché, trois clientes achètent les mêmes variétés de fruits.
La première achète 2 ananas, 5 mangues et 4 papayes ; elle paie $620F$.
La deuxième achète 3 ananas, 5 mangues et 1 papayes ; elle paie $530F$.
La troisième achète 2 ananas, 7 mangues et 8 papayes. Combien doit-elle payer ?

Exercice 23. .

N et N' sont deux entiers positifs à trois chiffres chacun. N est divisible par 5 et impair ; la somme de ses chiffre est 15. En permutant les chiffres des centaines et des dizaines de N, on obtient N?.
Enfin, $N - N' = 360$ Déterminer N et N?.

Exercice 24. .

Trois joueurs ont des avoir proportionnels aux nombres $2, 3, 5$. En fin de partie leur avoir sont proportionnel aux nombres $4, 3, 3$. Sachant que le premier a gagné $200F$, trouver les avoirs primitifs et les avoir de chaque joueur en fin de partie.

Exercice 25. .

Une fillette à qui sa mère avait confié $100F$ a acheté des fruits pour toute la famille : des pamplemousses à 3F, des melons à $7F$ et des ananas à $8F$, l'un.
Après avoir dépensé tout l'argent, elle peinait à porter son cabas lourd de 20 fruits.
Combien avait-elle acheté de chaque espèce ?

Exercice 26. .
Un père laisse à sa mort une somme d'argent qu'il partage ainsi de entre ses enfants : le premier reçoit $100F$ et un dixième du reste,le second reçoit $200F$ et un dixième du reste. Ansi de suite jusqu'au n^{ime} qui reçoit $n \times 100F$ et un dixième du reste.
A la fin du processus de partage, chaque enfant a la même somme et tout l'héritage a été partagé.

Combien ce père avait-il d'enfants et combien chacun at-il reçu ?

Exercice 27. .

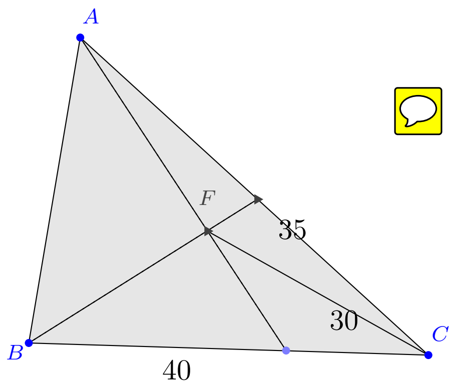
J'ai trois fois l'age que vous aviez quand j'avais l'age que vous avez . Quand vous aurez l'age que j'ai,la somme de nos ages sera 147. quel est mon age.

Exercice 28. .

Les trois personnages :le père,la mère et l'enfant. Le père s'adresse à l'enfant :"voila : nous trois âges additionnés donnent juste 72 ans.Je suis maintenant six fois plus vieux que toi et quand je ne serai plus que deux fois plus âge que toi,nos ages feront un total double de ce qu'il est à présent. "
Peux-tu me dire quel est l'âge de maman ?

Exercice 29. .

On considère un triangle ABC tel que ci-dessous où les aires sont indiquées en cm^2.



Quelle est l'aire totale du triangle ABC ?.

Exercice 30. .

Dans un désert,il ya des serpents,des scorpions et des souris ;
Chaque matin ;chaque serpent mange une souris, chaque midi,chaque scorpion pique un serpent et chaque soir,chaque souris mange un scorpion.
Au bout d'une semaine,il ne reste qu'une souris.Combien y en avait-il au début ?

Exercice 31. .

Sachant que 75 boeufs on brouté en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares, et que 81 boeufs ont brouté en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares,on demande combien il faudra de b ?ufs pour brouter en 18 jours l'herbe d'un pré de 96 ares.

Exercice 32. primitive d'une fonction rationelle

On se propose de trouver une primitive de la fonction f sur $]2,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]2,+\infty[, f(x) = \frac{3x^3+2x^2-4x+1}{x^4+x^3-5x^2+x-6}.$$

1. Déterminer quatre réels a,b,c,d tels que
$$\forall x \in]2,+\infty[, f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} + \frac{cx+d}{x^2+1}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]2,+\infty[$.

Exercice 33.

1. Déterminer trois réels a,b,c tels que pour tout réel $x \neq 5$:
$$\frac{x^2+x+1}{x-5} = ax+b+\frac{c}{x-5}.$$
En déduire que la couche représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-5}$ admet une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déterminer trois réels a,b,c tels que pour tout réel x,on ait :
$$x^2 = a(x-1)^1 + b(x-1) + c.$$
En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2(x-1)^{2002}$.

10 Bibliographie et Webographie

Bibliographie

Les ouvrages ayant permis la réalisation de cette ressource sont :

1. Le livre de Mathématiques Terminale SE "collection CIAM", édition EDICEF
2. Les livres des Majors en Mathématiques Terminale SE "collection ASVA EDUCATION"
3. Les livres de Mathématiques second cycle "collections TRANSMATH"

Webographie

Dans ce paragraphe,nous ajouterons bien plus que la production de cette ressource a pu être réalisée grâce aux pages suivantes :

G. costantini. http ://bacamaths.net
http ://xmath.free/
Gerard Lavau-http ://lavau.pagesperso-orange.fr/index.htm
http ://educamer.org