PROBABILITÉS

Par

TCHAKOUNTE MBIENKEU Nathalie Christie

Sous la direction de :

Dr MOYOUWOU Issofa,

Mr ADJABA BIWOLI,

Mr NJIFON Hassan.

Année académique 2013-2014

Table des matières

CHAPITRE UN

PROBABILITÉS

1.1 Objectifs

1.1.1 Objectifs pédagogiques généraux

La théorie des probabilités permet de :

- Décrire le comportement de phénomènes dont le résultat est soumis au hasard.
- Modéliser la fréquence de réalisation d'«événements» aléatoires.
- Faire ressortir le lien naturel entre les statistiques et la probabilité.

1.1.2 Objectifs pédagogiques spécifiques

- S'approprier le vocabulaire probabiliste.
- Reconnaître une situation d'équiprobabilité.
- Savoir calculer la probabilité d'un événement.

1.2 Introduction

À propos des probabilités, nous apprenons de l'article Probabilité de wikipédia que le terme probabilité désigne l'opposé du concept de certitude ; il est également une évaluation du caractère probable d'un événement. Ainsi, la probabilité d'un événement est une valeur comprise entre 0 et 1 qui permet de représenter le degré de certitude de cet événement. Plus ce nombre est grand, plus le risque ou la chance que l'événement se produise est grand. cet article nous apprend également que le développement de la théorie des probabilités est dû aux réflexions de : Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Bernoulli, Laplace, Gauss, Cauchy, Lebesgue...

Il est à noter que les probabilités se retrouvent dans plusieurs domaines tels que : la physique mathématique, l'économie, la météorologie, la finance ou la chimie et est devenue d'ailleurs une science en soit. A cet effet le chapitre sur les probabilités est introduit en classe de terminale et nécessite les dénombrements comme pré-requis.

De nos jours, le champ immense de leurs applications à la totalité des activités humaines semble donner raison au physicien et mathématicien Maxwell :"la vraie logique du monde est celle du calcul des probabilités."

1.3 Contrôle des pré-requis et rappels

1.3.1 Pré-requis

Exercice 1.3.1. :

1. Combien de nombres de cinq chiffres peut-on écrire avec les chiffres de la numération décimale ? Les chiffres commençant par zéro étant non acceptés.
2. Combien de nombres de cinq chiffres deux à deux distincts peut-on écrire avec les chiffres de la numération décimale ? Les chiffres commençant par zéro étant non acceptés.

Exercice 1.3.2. :
Dans une pochette, il y a dix timbres dont 3 rouges, 5 bleus et 2 verts. On prélève 4 timbres simultanément de cette pochette. De combien de façons possibles peut-on :

1. Faire ce choix ?
2. Choisir des timbres de la même couleur ?
3. Choisir les timbres de telle sorte qu'une seule des couleurs ne figure pas parmi les timbres.
4. Choisir les timbres de telle sorte que les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

1.3.2 Notions de base

- **Ensemble des parties d'un ensemble**
  Soit Ω un ensemble. L'ensemble $P(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles (parties) de Ω.

Exemple 1.3.1. :

Si $\Omega = \{a, b, c\}$, alors les éléments de $P(\Omega)$ sont :

L'ensemble vide : $\emptyset$

Les parties à un élément ou singleton : $\{a\}, \{b\}$ et $\{c\}$

Les parties à deux éléments ou paires : $\{b, c\}, \{a, c\}$ et $\{a, b\}$

Les parties à trois éléments : $\{a, b, c\} = \Omega$

$card(P(\Omega)) = 2^3$.

– **Inclusion**

Soient A et B deux ensembles. $A \subset B$ signifie que tout élément de A est un élément de B. Par exemple $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$.

– **Ensembles disjoints**

Soient A et B deux ensembles. A et B sont disjoints signifie que A et B n'ont pas d'éléments communs.

1.3.3 De la statistique à la probabilité

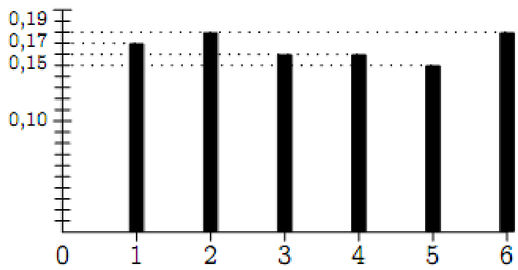
Exemple introductif :

On considère un dé cubique parfaitement équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé cent fois de suite en relèvant à chaque lancer le chiffre inscrit sur la face supérieure. Tous les chiffres obtenus pendant les cent lancers sont consignés dans le tableau suivant :

☞**Tableau des fréquences observées**

Numéro obtenu	1	2	3	4	5	6	**Totaux**
Effectif	17	18	16	16	15	18	100
Fréquence	0,17	0,18	0,16	0,16	0,15	0,18	1

☞**Diagramme en baton des fréquences**



☞**Analyse des résultats**

- On constate que les fréquences des différentes modalités sont approximativement égales (à $0,03$ prés).
- Intuitivement, on peut dire qu'en lançant un dé parfaitement équilibré on a "autant de chances" de voir apparaître sur la surface supérieure n'importe lequel des six chiffres : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
- Calculons la moyenne des fréquences observées :

$$\frac{0,17 + 0,18 + 0,16 + 0,16 + 0,15 + 0,18}{6} = 0,166$$

- Remarquons que 0,166 est une valeur approchée de $\dfrac{1}{6}$ à $0,004$ prés ; c'est-à-dire "une chance sur six".

Nous pouvons considérer $\dfrac{1}{6}$ comme fréquence théorique pour chacune des six modalités. Les fréquences observées 0,15 ; 0,16 ; 0,17 ; 0,18 sont proches de cette fréquence théorique.

Nous pouvons constater que la fréquence de $\frac{1}{6}$ dite théorique permet d'anticiper sur les valeurs des fréquences observées.

L'objectif de cette leçon est de présenter le modèle mathématique qui permet d'analyser la chance de réalisation ou les fréquences d'apparition de certains événements aléatoires. C'est la notion de probabilité

1.4 Vocabulaire probabiliste

Activité **1.4.1.** *:*

Une urne contient dix boules numérotées de 1 *à* 10*. On tire au hasard une boule de cette urne et on relève le numéro obtenu.*

1. *Déterminer l'ensemble* Ω *des résultats possibles ?*
   Peut-on connaître d'avance le résultat d'un tirage ?
2. *On s'intéresse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre pair ».*
   a. *Déterminer l'ensemble* A *des résultats favorables à cette assertion ?*
   b. *Quel est l'ensemble* $\overline{A}$ *des résultats qui ne satisfont pas cette assertion ?*
3. *On s'intéresse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre supérieur à* 10 *» et on note par E l'ensemble des résultats favorables à cette assertion.*
   a. *E contient-il des éléments ?*
   b. *Que dit-on d'un tel ensemble ?*
4. *On s'intéresse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre premier et un multiple de* 2 *». Déterminer l'ensemble* B *des résultats favorables à cette assertion ?*

Solution 1.4.1. *:*

1. *Déterminons l'ensemble* Ω *des résultats possibles.*
   $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Ω *est appelé* ***univers****.*
   On ne peut pas connaître d'avance le résultat d'un tirage. On dit qu'il s'agit d'une ***expérience aléatoire****.*
2. *On s'interesse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre pair ».*
   a. *Déterminons l'ensemble* A *des numéros qui satisfont cette assertion.*
      $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. *On dit que* A *est un* ***événement****.*
   b. *Déterminons* $\overline{A}$
      $\overline{A} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. $\overline{A}$ *est appelé* ***événement contraire de*** A*.*
3. *On s'interesse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre supérieur à* 10 *» et on note par E l'ensemble des résultats favorables à cette assertion.*
   a. E *ne contient pas d'élément.*
   b. E *est un ensemble vide. On dit* E *est un* ***événement impossible****.*
4. *On s'intéresse à l'assertion : « le numéro tiré est un nombre premier et un multiple de* 2 *».*
   $B = \{2\}$. *On dit que* B *est un* ***événement élémentaire****.*

1.4.1 Expérience aléatoire et éventualité

La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes et expériences dans lesquels les résultats sont dûs au hasard (expérience aléatoire). Dans de nombreux cas, une même expérience, répétée plusieurs fois dans des conditions identiques, ne conduit pas toujours au même résultat.

Définition 1.4.1. *:*

1. ***Une expérience aléatoire*** *est une expérience conduisant à des résultats dont la réalisation de chacun n'est pas connue d'avance.*
2. *Un résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé* ***éventualité****.*

Exemple 1.4.1. :
• On lance un dé et on observe le numéro obtenu. Six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. On dit qu'on a réalisé une expérience aléatoire ayant six éventualités.
• On lance un dé et on observe la parité du numéro obtenu ; deux résultats sont possibles : P (le numéro obtenu est pair) et I (le numéro obtenu est impair).
On a cette fois réalisé une expérience aléatoire comportant deux éventualités.
• Une urne contient des boules blanches, rouges et noires. On tire une boule de l'urne et on note la couleur obtenue ; trois résultats sont possibles ; B (la boule est blanche), R (la boule est rouge) et N (la boule est noire).
On a maintenant réalisé une expérience aléatoire comportant trois éventualités.

1.4.2 Univers

Définition 1.4.2. *:*
Soit ξ une expérience aléatoire. On appelle univers associé à ξ l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles de ξ.

Exemple 1.4.2.

Expérience	Ω
Lancer d'un dé ordinaire et observation du numéro obtenu	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Prélèvement de n pièces produites par une machine et décompte des pièces défaillantes	$\{0, 1, ..., n\}$
Questionnaire à 100 questions binaires de réponse vrai ou faux	$\{V, F\}^{100}$
Lancer d'une pièce jusqu'à la première obtention de pile et décompte du nombre de lancers	$\mathbb{N}^*$
Mise en service d'une ampoule électrique et observation de la durée de vie	$\mathbb{R}_+^*$

1.4.3 Événements liés à une expérience aléatoire

Définition 1.4.3. *:*

Soit ξ une expérience aléatoire et soit Ω l'univers qui lui est associé. On appelle événement toute partie de Ω.

Exemple 1.4.3. On lance un dé et on observe le numéro obtenu.
- A : «Obtenir un chiffre pair» est l'événement A $= \{2, 4, 6\}$
- B : «Obtenir un chiffre impair» est l'événement B $= \{1, 3, 5\}$

Définition 1.4.4. *:*

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

1. *On appelle **événement élémentaire** tout singleton de Ω.*
2. *Dire qu'un **événement** A **est réalisé** signifie que lors de l'experience le résultat obtenu appartient à A.*
3. *$\emptyset$ est un événement appelé **événement impossible**. Il n'est jamais réalisé car il ne contient aucun résultat de l'expérience.*
4. *Ω est un événement appelé **événement certain**. Il est toujours réalisé car il contient tous les résultats possibles de l'experience.*

Exemple 1.4.4. :
On lance un dé et on observe le numéro obtenu.
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'événement certain.
A : "Obtenir le chiffre 7" est un événement impossible.
B : "Obtenir un nombre premier pair" est l'événement élémentaire $B = \{2\}$.
Si on obtient 4 lors du lancer d'un dé, l'événement "Obtenir un chiffre pair" est réalisé.

Définition 1.4.5. :
Pour une expérience aléatoire, on appelle événement contraire d'un événement A noté $\overline{A}$ l'événement qui se réalise uniquement si A n'est pas réalisé. Si Ω est l'univers associé à l'expérience, $\overline{A} = \complement_{\Omega}^{A}$ et correspond à tous les résultats de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Remarque 1.4.1. $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Définition 1.4.6. :
Soient A et B deux événements de l'univers Ω.
• *L'événement $A \cap B$ se lit A et B : C'est l'événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à la fois à A et à B.*
• *L'événement $A \cup B$ se lit A ou B : C'est l'événement constitué des résultats élémentaires de Ω qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux).*

Exemple 1.4.5. :
D'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10 on tire une boule.
Considérons les événements :
A : « Avoir un nombre impair » et B « Avoir un nombre strictement inférieur à 6».
On a : $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$A \cap B = \{1; 3; 5\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$
l'événement $A \cap B = \{1; 3; 5\}$ est l'événement « Avoir un nombre impair strictement inférieur à 6 ».
L'événement $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$ est l'événement « Avoir un nombre impair ou un nombre strictement inférieur à 6 ».

Définition 1.4.7. :
Soient A et B deux événements de l'univers Ω.

Les événements A et B sont dits ***incompatibles*** *lorsqu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.*

En particulier, les événements A et $\overline{A}$ sont incompatibles. Cependant, deux événements incompatibles ne sont pas forcément contraires.

Exemple 1.4.6. :
Pour le lancer d'un dé ordinaire, les événements « Avoir un nombre pair » et « Avoir un nombre strictement inférieur à 2 » sont incompatibles mais l'un n'est pas le complémentaire de l'autre.

Nous constatons ainsi que la théorie des probabilités utilise le langage des ensembles pour modéliser les observations issues d'une expérience aléatoire. Avec ce mode de représentation, les opérations logiques "et", "ou", "négation" se traduisent par des opérations ensemblistes telles que l'intersection, la réunion ou le passage au complémentaire.
Voici un tableau de correspondance entre les deux langages.

Vocabulaire probabiliste	Vocabulaire ensembliste	Notations
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité	Élément de Ω	ω ($\omega \in \Omega$)
Événement	partie de Ω	A ($A \subset \Omega$)
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\}$ ($\omega \in \Omega$)
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\emptyset$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \emptyset$
Événement contraire de A	complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

1.5 Définition et propriétés d'une probabilité

Activité 1.5.1. :
On lance dix fois de suite une pièce de monnaie dont les faces sont : pile et face. Pour chaque lancer, on relève la face supérieure de la pièce. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Côté	*Pile*	*Face*
Nombre d'apparitions	4	6

a. *Recopier et compléter ce tableau par la ligne des fréquences d'apparition.*
L'événement A : « obtenir le côté pile » a apparemment 4 *chances sur* 10 *d'être réalisé, soit* $0,4$*; cette valeur est appelée probabilité de l'événement* A*. On la note* $P(A)$*.*

b. *Préciser la probabilité de l'événement* B *: « obtenir le côté face ».*

Solution 1.5.1. *:*

a. *Recopions et compléter ce tableau par la ligne des fréquences d'apparition.*

Côté	*Pile*	*Face*	*Total*
Nombre d'apparition	4	6	10
Fréquence d'apparition	$0,4$	$0,6$	1

b. *Précisons la probabilité de l'événement* B *: «obtenir le côté face».*
L'événement B *:«obtenir le côté face» a apparemment* 6 *chances sur* 10 *d'être réalisé.*
Donc $P(B) = \frac{6}{10} = 0,6$.

1.5.1 Définition d'une probabilité comme une fonction d'ensemble

Définition 1.5.1. *:*

Soit Ω *l'univers associé a une expérience aléatoire. On suppose que* Ω *est fini.*
Une probabilité sur Ω *est une application* P *de* $P(\Omega)$ *vers* $[0;1]$ *qui, à toute partie* A *de* Ω *associe le nombre réel* $P(A)$ *appelé probabilité de l'événement* A *et qui vérifie les conditions suivantes :*

• *La probabilité de l'événement certain est* 1.

• *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités élémentaires qui le composent.*

P *est une probabilité sur* Ω *signifie que :*

$$\begin{cases} Pour\ tout\ evenement\ \mathbf{A}\ de\ \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1 \\ P(\Omega) = 1 \\ Si\ A = \{e_1; ...; e_n\} \subseteq \Omega\ alors\ P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\}) \end{cases}$$

Remarque 1.5.1. :

• La probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$ est noté $P(\omega_i)$.

• La probabilité P de l'événement $B = \{w_1; ...; w_i; ...; w_n\}$ est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.

ω	ω_1	...	ω_i	...	ω_n
$P(\omega)$	P_1	...	P_i	...	P_n

Exemple 1.5.1. :

On lance un dé «ordinaire» et on observe le numéro de la face supérieure. Calculer la probabilité de l'événement A : «Obtenir un numéro impair».

Les faces ont les mêmes chances d'apparition et la probabilité d'une face est alors $\frac{1}{6}$. Puisque $A = \{1\,;\,3\,;\,5\}$ alors $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$

Soit $P(A) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

1.5.2 Propriétés d'une probabilité

Soient P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux parties de Ω.

1. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Démonstration :

1. et 2. découlent immédiatement de la définition. Prouvons 3.

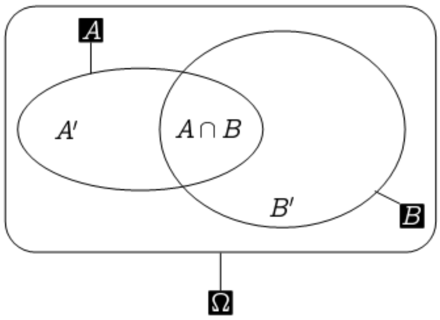
Notons : A' le complémentaire de $A \cap B$ dans A, B' le complémentaire de $A \cap B$ dans B.

On a : $A = (A \cap B) \cup A'$, avec $(A \cap B) \cap A' = \emptyset$;

donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A')$

$B = (A \cap B) \cup B'$ avec $(A \cap B) \cap B' = \emptyset$;

donc $P(B) = P(A \cap B) + P(B')$.



En additionnant membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A)+P(B) &= 2P(A\cap B)+P(A')+P(B') \\ &= 2P(A\cap B)+P(A'\cup B') \\ &\quad (car\ A'\cap B'=\emptyset) \\ &= P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(A'\cup B') \\ P(A)+P(B) &= P(A\cap B)+P(A\cup B) \end{aligned}$$

Donc $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

1.5.3 Exercice d'application

Revenons à l'exemple 1.6.1., et calculons la probabilité des événements suivants :

A_1 **:** « Obtenir un numéro impair ou un multiple de 6. »

A_2 **:** « Obtenir un numéro supérieur à 1. »

A_3 **:** « Obtenir un numéro impair ou un diviseur de 6. »

Solution 1.5.2. *:*
L'univers $\Omega=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$. *Posons :*
$A=\{1\,,\,3\,,\,5\}$, $M=\{6\}$, $B=\{1\}$ *et* $D=\{1\,,\,2\,,\,3\,,\,6\}$.
On a $P(A)=\dfrac{1}{2}$, $P(M)=P(B)=\dfrac{1}{6}$, $P(D)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$
Nous remarquons que : $A_1=A\cup M$, $A_2=\overline{B}$ *et* $A_3=A\cup D$. *De plus* $A\cap M=\emptyset$, $A\cap D=\{1\,,\,3\}$ *et* $P(A\cap D)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
Donc,

- $P(A_1)=P(A)+P(M)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$
- $P(A_2)+P(B)=1$ *ainsi* $P(A_2)=1-P(B)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$
- $P(A_3)=P(A)+P(D)-P(A\cap D)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

1.6 Calcul des probabilités

1.6.1 Équiprobabilité

Activité 1.6.1. *:*
Une urne contient trois boules blanches et une boule bleue.

On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.
Soient A, B et C les événements suivants :
A : « les deux boules tirées ont la même couleur »
B : « les deux boules tirées ont des couleurs différentes »
C : « on a exactement une boule blanche ».
Déterminer $P(A), P(B)$ et $P(C)$.

Solution 1.6.1. *:*
Déterminons $P(A), P(B)$ et $P(C)$.
☞*Pour que A soit réalisé, il faut et il suffit de tirer deux boules blanches.*
D'où $P(A) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{3}{6}$ Donc $P(A) = \frac{1}{2}$.
☞*Pour que B soit réalisé, il faut et il suffit de tirer une boule blanche et une boule bleue.*
D'où $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_4^2} = \frac{3}{6}$.
Donc $P(B) = \frac{1}{2}$.
☞*Pour que C soit réalisé il faut et il suffit de tirer une boule blanche et une boule bleue.*
D'où $C = B$ et par conséquent, $P(C) = P(B) = \frac{1}{2}$.
On peut constater que les résultats possibles de cette experience sont : soit l'événements A, soit l'événement B et de plus $P(A) = P(B)$. On dit qu'il y a équiprobabilité.

Définition 1.6.1. *:*
Lorsque les événements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la probabilité considérée est l'équiprobabilité.
***Conséquence 1.7.1.** :*
Soit Ω un univers ayant n éléments : $\Omega = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$.
S'il y a équiprobabilité sur Ω alors, on a :
1) $P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = ... = P(\{a_n\})$ *et* $P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + ... + P(\{a_n\}) = 1$.
2) *Par conséquent, pour chaque indice i variant de 1 à n, on a :* $P(\{a_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

Remarque 1.6.1. : Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme « dé parfait », « dé non pipé », « cartes bien battues », « boules indiscernables au toucher », « tirages au hasard »,...

Propriétés 1.6.1. *:*
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour un

événement A on a :

$$P(A) = \frac{card\, A}{card\, \Omega} = \frac{\texttt{nombres de cas favorablles à } A}{\texttt{nombres de cas possibles}}$$

1.6.2 Exemple d'application

Énoncé :

Il y a dans un tiroir trois paires de chaussures de couleurs différentes. On tire au hasard deux chaussures ; déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Elles appartiennent à une même paire » ;

B : « Il y a un pied droit et un pied gauche ».

Solution 1.6.2. *:*

Chaque événement élémentaire est un tirage de deux chaussures parmi les six du tiroir. Il y a autant de tels tirages que de parties a deux éléments d'un ensemble à six éléments, donc au total C_6^2 tirages possibles.

Tous les événements élémentaires sont équiprobables.

***Calcul de** $P(A)$:*

Pour que A soit réalisé, il faut et il suffit de tirer l'une des trois paires de chaussures (on tire deux chaussures simultanément), donc $card\, A = 3$ et $P(A) = \frac{3}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

***Calcul de** $P(B)$:*

Pour que B soit réalisé, il faut et il suffit que l'on tire un pied droit de n'importe quelle couleur et un pied gauche de n'importe quelle couleur, soit trois possibilités pour le pied droit multiplié par les trois autres possibilités pour le pied gauche (nombre de couples (d,g)).

Donc $card\, B = 3 \times 3 = 9$ et $P(B) = \frac{9}{C_6^2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

1.6.3 Événements indépendants

Activité 1.6.2. *:*

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée dont les faces sont : pile (P) et face (F). Il est à noter que l'ordre intervient.

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?*
2. *Soient les événements :*

   A : « le résultat est pile au premier lancer » ;

B : « le résultat est pile au second lancer » ;

- Calculer les probabilités $P(A)$; $P(B)$ et $P(A \cap B)$;

- Comparer $P(A) \times P(B)$ et $P(A \cap B)$.

Solution 1.6.3. *:*

1. *Calculons la probabilité d'obtenir deux fois pile*
   L' univers des résultats possibles est : $\Omega = \{(P;P)(P;F)(F;P)(F;F)\}$.
   Comme la pièce est non truquée alors chaque face a la même chance d'apparition égale à $\frac{1}{2}$.
   La probabilité d'obtenir deux fois pile est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Soit $\frac{1}{4}$.
2. *Calculons les probabilités $P(A)$; $P(B)$ et $P(A \cap B)$;*
   ☞*Pour que A soit réalisé, on peut avoir soit pile au premier lancer et pile au second lancer, soit pile au premier lancer et face au second lancer.*
   D'où $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
   Donc $P(A) = \frac{1}{2}$.
   ☞*Un raisonnement similaire nous donne $P(B) = \frac{1}{2}$.*
   ☞*$A \cap B$ est l'événement «obtenir deux fois pile». D'où $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.*
   ***- Comparons** $P(A) \times P(B)$ **et** $P(A \cap B)$.*
   On a : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On dit que les événements A et B sont indépendants.

Définition 1.6.2. *:*

Soient P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux parties de Ω.
A et B sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Exemple 1.6.1. :

Soit $\Omega = \{a\,,\,b\,,\,c\,,\,d\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur Ω telle que $p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{c\}) = p(\{d\})$.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   $A = \{a\,,\,b\}$, $B = \{a\,,\,c\}$ et $C = \{c\,,\,d\}$.
2. a. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

   b. Même question pour les événements A et C.

Solution 1.6.4. *:*

1. *Déterminons la probabilité de chacun des événements* A*,* B *et* C*.*
   On a : $P(\{a\}) + P(\{b\}) + P(\{c\}) + P(\{d\}) = 1 \Rightarrow 4P(\{a\}) = 1 \Rightarrow P(\{a\}) = \frac{1}{4}$.
   Ainsi $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{4}$.
   Étant en situation d'équiprobabilité, $P(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,
   de même $P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

2. a. *Cherchons si les événements* A *et* B *sont indépendants.*
   $A \cap B = \{a\}$.
   On a donc $P(A \cap B) = P(\{a\}) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$*. Il s'ensuit que les événements* A *et* B *sont indépendants.*

   b. *Cherchons si les événements* A *et* C *sont indépendants.*
   $A \cap C = \emptyset$.
   D'où $P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$ *or* $P(A) \times P(C) = \frac{1}{4}$.
   $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$*, donc les événements* A *et* C *ne sont pas indépendants.*

Remarque 1.6.2. : Pour des événements de probabilité non nulle, dire que A et B sont indépendants revient à dire que le fait que A soit réalisé n'a pas d'influence sur la réalisation de B et inversement.

1.6.4 Cas de référence en calcul des probabilités

■ **Tirage d'une boule**

Exemple 1.6.2. :
Une urne contient cent boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 100. On tire une boule de cette urne et on note son numéro.
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre paire ?
Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4 ?

Solution 1.6.5. *:*
☞ ***L'univers des éventualités :***

Les résultats possibles sont : $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,...;\,100\}$.

D'où $card\,\Omega = 100$.

☞ ***Le calcul des probabilités :***

Posons A *: l'événement «le chiffre obtenu est pair» et* B *: l'événement « le chiffre obtenu est plus grand que* 4 *». On a :* $A = \{2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,10\,;\,...\,;\,98\,;\,100\}$ *et* $B = \{5\,;\,6\,;\,...\,;\,100\}$.

Comme les boules sont indiscernables au toucher, on est en situation d'équiprobabilité. La probabilité de l'événement A *est donc :* $P\left(A\right) = \dfrac{card\,A}{card\,\Omega} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$.

Celle de B *est :* $P\left(B\right) = \dfrac{card\,B}{card\,\Omega} = \dfrac{96}{100} = \dfrac{24}{25}$.

■ **Tirage d'une carte**

Exemple 1.6.3. :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes comprenant quatre « couleurs » ; Pique, Trèfle, Carreau et Cœur. Chaque couleur est composée de 8 cartes : l'As, le Roi, la Dame, le Valet, le 10, le 9, le 8 et le 7.

Quelles est la probabilité de tirer :

1. un Trèfle ?
2. Un As ?
3. La Dame de Cœur ?
4. Une carte rouge ? (Le Pique et le Trèfle sont noirs, le carreau et le cœur sont rouges).

Solution 1.6.6. *:*

Comme les cartes sont identiques, on est en situation d'équiprobabilité.

☞ ***L'univers des éventualités****.*

Les résultats possibles sont les différentes cartes du jeu. Donc $card\,\Omega = 32$

☞ ***Le calcul des probabilités***

Soient les événements :

A *: « la carte tirée est un Trèfle »,*

B *: « la carte tirée est un As »,*

C *: « la carte tirée est la Dame de Cœur »,*

D *: « la carte tirée est rouge ».*

1. *Déterminons* $P(A)$.
   $P\left(A\right) = \dfrac{card\,A}{card\,\Omega} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

2. *Déterminons* $P(B)$
   $P\left(B\right)=\dfrac{card\,B}{card\,\Omega}=\dfrac{4}{32}=\dfrac{1}{8}.$
3. *Déterminons* $P(C)$
   $P\left(C\right)=\dfrac{card\,C}{card\,\Omega}=\dfrac{1}{32}.$
4. *Déterminons* $P(D)$
   $P\left(D\right)=\dfrac{card\,D}{card\,\Omega}=\dfrac{16}{32}=\dfrac{1}{2}.$

■ **Tirages simultanés**

Exemple 1.6.4. :
Un sac contient dix boules indiscernables au toucher dont six rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 et quatre noires N_1, N_2, N_3, N_4. On tire simultanément et au hasard trois boules du sac et on note leurs couleurs.
Calculons de façons différentes la probabilité de chacun des événements suivants :

A « les trois boules tirées contiennent au moins une rouge » ;

B « les trois boules tirées contiennent au plus une rouge ».

C « exactement deux boules rouges et un seul numéro pair ».

Solution 1.6.7. *:*
Les boules étant indiscernables au toucher et tirées au hasard, on a l'équiprobabilité des événements élémentaires.
☞ ***L'univers des éventualités***
Soit E l'ensemble des boules ; $E=\{R_1\,,\,R_2\,,\,R_3\,,\,R_4\,,\,R_5\,,\,R_6\,,\,N_1\,,\,N_2\,,\,N_3\,,\,N_4\}$
L'univers Ω des éventualités est l'ensemble des parties à trois éléments de E (c'est l'ensemble des combinaisons de 3 éléments de E). On a :
$card\,\Omega=C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{7!\,3!}=\dfrac{8\times9\times10}{2\times3}=120.$
☞ ***Le calcul des probabilités***
Événement A : « les trois boules tirées contiennent au moins une rouge »
Pour obtenir un résultat qui réalise l'événement A, trois cas seulement sont possibles :
cas 1 : le tirage comprend une boule rouge et deux boules noires,
cas 2 : le tirage comprend deux boules rouges et une boule noire,
cas 3 : le tirage comprend trois boules rouges.

Les éléments de A du cas (1) s'obtiennent en tirant une boule rouge parmi 6 boules rouges. Pour cela, on a C_6^1 possibilités et pour chacune de ces possibilités on associe deux des quatres *boules noires. Soit C_4^2 possibilités.*

Donc au total, on a $C_6^1 \times C_4^2$ possibilités d'obtenir un élément du premier cas.

De même, le nombre d'éléments de A du cas (2) est $C_4^1 \times C_6^2$.

Pour obtenir les éléments de A du cas (3), il suffit de tirer de 3 boules rouges parmi les 6 boules rouges. Pour cela, on a C_6^3 résultats possibles.

D'où $card\, A = C_6^1 \times C_4^2 + C_4^1 \times C_6^2 + C_6^3 = 116$.

Donc $P\,(A) = \dfrac{card\, A}{card\, \Omega} = \dfrac{116}{120} = \dfrac{29}{30}$.

__Événement B__ : « les trois boules tirées contiennent au plus une rouge »

Un élément de B est une partie de E constituée par :

$$\text{soit} \begin{cases} \texttt{trois boules noires} \\ \texttt{une boule rouge et deux boules noires} \end{cases}.$$

D'où : $card\, B = C_4^3 + C_6^1 \times C_4^2 = 4 + 6 \times 6 = 40$.

Donc $P\,(B) = \dfrac{card\, B}{card\, \Omega} = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$.

■ **Tirages successifs avec remise**

Exemple 1.6.5. :

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois boules noires N_1, N_2, N_3. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire au hasard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités de chacun des événements suivants :

A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Solution 1.6.8. *:*

On dit qu'on fait des tirages successifs de n boules avec remise lorsqu'on tire tour à tour une seule boule en remettant à chaque fois la boule tirée avant le tirage suivant. Ceci revient par exemple à tirer une première une boule, observer le résultat et remettre la boule tirée dans le sac, tirée une seconde boule, observée le résultat et remettre la boule tirée dans le sac ainsi de suite jusqu'aux n tirages.

☞ *L'univers des éventualités.*

Soit E l'ensemble des boules, $E = \{R_1\,, R_2\,, R_3\,, R_4\,, R_5\,, N_1\,, N_2\,, N_3\}$. L'univers Ω est l'ensemble des couples d'éléments de E. On a : $\Omega = E \times E$ et $card\, \Omega = 8^2 = 64$.

☞ *Le calcul des probabilités*

Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires car les boules sont indiscernables au toucher et tirées au hasard.

Événement A

« les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

A *est constitué par les éléments des ensembles suivants :*

$\{R_1\,,\,R_2\,,\,R_3\,,\,R_4\,,\,R_5\} \times \{N_1\,,\,N_2\,,\,N_3\}$ *;*

$\{N_1\,,\,N_2\,,\,N_3\} \times \{R_1\,,\,R_2\,,\,R_3\,,\,R_4\,,\,R_5\}$

d'où $card\,A = 5 \times 3 + 3 \times 5 = 30$

donc $P\,(A) = \dfrac{card\,A}{card\,\Omega} = \dfrac{30}{64} = \dfrac{15}{32}$

Événement B

« les deux boules tirées sont de la même couleur »

Il est constitué par les éléments des ensembles suivants :

$\{R_1\,,\,R_2\,,\,R_3\,,\,R_4\,,\,R_5\} \times \{R_1\,,\,R_2\,,\,R_3\,,\,R_4\,,\,R_5\}$ *;*

$\{N_1\,,\,N_2\,,\,N_3\} \times \{N_1\,,\,N_2\,,\,N_3\}$

d'où $card\,B = 5^2 + 3^2 = 34$

donc $P(B) = \dfrac{card\,B}{card\,\Omega} = \dfrac{34}{64} = \dfrac{17}{32}$.

On pourra remarquer que l'événement B *est le contraire de l'événement* A.

■ Tirages successifs sans remise

Exemple 1.6.6. :

Un sac contient huit boules indiscernables au toucher dont cinq rouges R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 et trois boules noires N_1, N_2, N_3. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac puis on tire au hassard une deuxième boule, on note sa couleur.

Calculons les probabilités de chacun des événements suivants :

> A « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
>
> B « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

Solution 1.6.9. *:*

On dit qu'on fait des tirages successifs de n boules sans remise lorsqu'on tire tour à tour une seule boule en ne remettant pas à chaque fois la boule tirée avant le tirage suivant. Ceci revient par exemple à tirer une première une boule, observer le résultat et ne pas remettre la boule tirée dans le sac, tirée une seconde boule, observée le résultat et ne pas remettre la boule tirée dans *le sac ainsi de suite jusqu'aux n tirages.*

☞ ***L'univers des éventualités***

Soit E *l'ensemble des boules,* $E = \{R_1\,,\, R_2\,,\, R_3\,,\, R_4\,,\, R_5\,,\, N_1\,,\, N_2\,,\, N_3\}$. *L'univers* Ω *est l'ensemble des couples d'éléments différents de* E. *On a :* $card\,\Omega = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$.

☞ ***Le calcul des probabilités***

Ici encore, l'épreuve a lieu dans le cadre de l'équiprobabilité des événements élémentaires.

Événement B

«les deux boules tirées sont de la même couleur»

B *est constitué par les arrangements de* 2 *éléments de* $\{R_1\,,\, R_2\,,\, R_3\,,\, R_4\,,\, R_5\}$ *et ceux de* 2 *éléments de* $\{N_1\,,\, N_2\,,\, N_3\}$.

d'où : $card\,B = A_5^2 + A_3^2 = 4 \times 5 + 2 \times 3 = 26$

donc $P\,(B) = \dfrac{card\,B}{card\,\Omega} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$.

Événement A

«les deux boules tirées sont de couleurs différentes»

l'événement A *est le contraire de l'événement* B *; donc :*

$$\begin{aligned} P\,(A) &= 1 - P\,(B) \\ &= 1 - \frac{13}{28} \\ P\,(A) &= \frac{15}{28} \end{aligned}.$$

1.6.5 Loi binomiale, schéma de Bernoulli

Activité 1.6.3. *:*

On lance 3 *fois de suite un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de* 1 *à* 6.

A chaque lancer, on dit qu'on a un succès si le numéro obtenu est 6 *; sinon, on dit qu'on a un échec.*

1. *La probabilité d'avoir un succès est-elle la même au premier tour, au deuxième tour, au troisième tour ?*
2. *Déterminer la probabilité d'avoir sur les trois lancers :*
   a. *Aucun succès.*
   b. *Un succès.*
   c. *Deux succès.*

d. *Trois succès.*

Solution 1.6.10. 1. *Le dé étant parfaitement équilibré, chacune des faces du dé a la même chance d'apparition et les lancers sont indépendants donc la probabilité d'obtenir le chiffre* 6 *est la même à chaque tour.*

2. *Considérons les événements :*
   A *: «Obtenir aucun succès»*
   B *: «Obtenir un succès»*
   C *: «Obtenir deux succès»*
   D *: «Obtenir trois succès»*

   a. *Déterminons* $P(A)$
   Obtenir aucun succès voudrait dire qu'on obtient que des échecs. Or la probabilité d'obtenir un échec est de $\frac{5}{6}$.
   D'où $P(A) = (\frac{5}{6})^3$.
   Donc $P(A) = \frac{125}{216}$.

   b. *Déterminons* $P(B)$
   Pour que l'événement B *soit réalisé, il faut obtenir exactement un succès lors des trois lancers. On peut obtenir un succès soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième lancer. La probabilité d'obtenir un échec est de* $\frac{5}{6}$ *et celle d'obtenir un succès est* $\frac{1}{6}$
   D'où $P(B) = 3 \times \frac{1}{6} \times (\frac{5}{6})^2 = \frac{75}{216}$
   Donc $P(B) = \frac{75}{216}$.

   c. *Déterminons* $P(C)$
   Pour Obtenir les deux succès, il faut de choisir le tour où on obtient un échec. Pour cela, on a 3 *choix possibles.*
   D'où $P(C) = 3 \times (\frac{1}{6})^2 \times \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$
   Donc $P(C) = \frac{15}{216}$

   d. *Déterminons* $P(D)$
   $P(D) = (\frac{1}{6})^3$
   Donc $P(D) = \frac{1}{216}$

Définition 1.6.3. *:*

Lorsqu'une expérience aléatoire a exactement 2 résultats, on dit que c'est une ***expérience de Bernouilli****. L'un de ces deux résultats est alors appelé succès et l'autre échec.*

Exemple 1.6.7. :
Dans l'activité précédente, soit on obtient le numéro 6 (succès) ; soit un numéro autre que 6 (échec).

Définition 1.6.4. *:*
On appelle ***épreuve de Bernoulli*** *une épreuve ayant deux éventualités : une éventualité S (succès) et une éventualité $\overline{S}$ (échec).*
La ***loi de Bernouilli*** *de paramètre p associe à l'éventualité S la probabilité p et à l'éventualité $\overline{S}$ la probabilité $1-p$.*

Exemple 1.6.8. :
On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernouilli, les deux éventualités sont P : "Pile" et F : "Face". Si la pièce est parfaitement équilibrée, la probabilité d'obtenir P est $\dfrac{1}{2}$ de même que celle d'obtenir F. C'est donc une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Définition 1.6.5. *:*

1. *On appelle* ***schéma de Bernoulli****, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une expérience de Bernoulli. Une répétition est alors appelée* ***épreuve***
2. *On appelle* ***loi binomiale*** *associé à un schéma de Bernoulli la donnée pour chaque nombre de succès possibles, sa probabilité de réalisation. Si p est la probabilité du succès de l'épreuve de Bernoulli, on dit que la loi binomiale a pour paramètres n et p. On la note $B\,(n\,;\,p)$.*

Lorsqu'une expérience aléatoire est répétée dans les mêmes conditions plusieurs fois et que l'on s'interesse à la réalisation d'un événement particulier, la fréquence d'apparition d'un événement donné possède des propriétés que nous allons mettre en évidence ici. À propos, le mathématicien Jakop Bernoulli $(1654-1705)$, dans son livre l'art de conjecturer nous apprend que : "Si l'on répète un grand nombre de fois, dans les mêmes conditions, une centaine d'expériences aléatoires, la fréquence observée semble se rapprocher d'une fréquence théorique."

Activité 1.6.4. *:*

Revenons au lancer du dé, épreuve de Bernoulli où :

- *l'apparition d'un* 6*, appelée succès et notée* S*, a pour probabilité :* $P = \frac{1}{6}$ *;*
- *l'apparition d'un autre chiffre, appelé échec et notée* $\overline{S}$*, a pour probabilité* $1 - P = \frac{5}{6}$.

Répétons cette épreuve n *fois, de façon indépendante, et intéressons-nous au nombre de succès obtenus.*

1. *Déterminer le nombre d'éventualité constituée de* k *succès,* $(0 \leq k \leq n)$.

2. *Quelle est la probabilité d'obtenir ces* k *succès ;* $(0 \leq k \leq n)$ *?.*

Solution 1.6.11. *:*

1. *Déterminons le nombre d'éventualités constitué de* k *succès ;* $(0 \leq k \leq n)$ *. Il est immédiat que dans ce schéma de Bernoulli :*
   - *toute éventualité est un* n*-uplet de l'ensemble* $\{S\,,\,\overline{S}\}$ *;*
   - *que le nombre d'éventualités, constituées de* k *succès* $(0 \leq k \leq n)$ *et de* $n-k$ *échecs, est égal à* C_n^k.
2. *Déterminons la probabilité d'obtenir ces* k *succès ;* $(0 \leq k \leq n)$
   Les n *épreuves étant indépendantes, la probabilité de tout événement élémentaire est égale au produit des probabilités des succès et échecs qui le constituent.*
   Donc la probabilité d'obtenir k *succès* $(0 \leq k \leq n)$ *est égale à :* $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

On en déduit la propriété suivante.

Propriétés 1.6.2. *:*

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves, où pour chaque épreuve la probabilité du succès est p *(celle de l'échec est* $n - p$*).*

La probabilité d'obtenir exactement k *succès* $(0 \leq k \leq n)$ *au cours de ces* n *épreuves est :*

$$P_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration :

La probabilité d'avoir k succès suivis de $n-k$ échecs est : $p^k(1-p)^{n-k}$

Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Voici un moyen de dénombrer toutes les possibilités d'apparition des succès et échecs : on considère l'ensemble des "mots" de n lettres qui ne contiennent que des S et des E. Pour obtenir un tel mot, il suffit de connaître les emplacements de S ; les autres étant réservés à E. Si le mot contient k fois S alors, S occupe k emplacements pris entre $1, 2, ..., n$. Il suffit donc de choisir k emplacements sur les n possibles. Donc il y a exactement $\complement_n^k$ qui contiennent exactement k fois la lettre S (et donc $n - k$ fois la lettre E). On en déduit :

$$P_k = \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k} \text{ et ceci pour tout } k \in \{0\,;\,1\,;\,\cdots\,;\,n\}$$

Remarque 1.6.3. :

On a : $P_0 + P_1 + \cdots + P_n = \sum_{k=0}^{n} \complement_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$

Exemple 1.6.9. :

On lance 100 fois une pièce de monnaie en l'air et on note les côtés (pile P et face F) obtenus successivement. Quelle est la probabilité pour qu'on obtienne 50 fois pile ?

Solution 1.6.12. *Au cours d'un lancer, l'apparition de pile, appelée succès, a une probabilité de $\frac{1}{2}$. L'épreuve étant répétée 100 fois, la probabilité d'obtenir 50 succès est :*

$$P_{50} = \boldsymbol{C}_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{100-50} = \frac{126114180681955241668515621 57}{1584563250285286751870879006 72} \approx 0,079$$

1.7 Exercices

Exercice 1 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité les événements suivants :

a)A : «la carte tirée est le roi de trèfle» ; b)B : « la carte tirée est un roi» c)C : «la carte tirée est un trèfle» ; d) D : «la carte tirée est un roi ou un trèfle» ; e) E : « on obtient ni roi ni trèfle»

Exercice 2 :

On tire au hasard 8 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes.

1. Quel est le nombre total de cas possibles (c'est-à-dire le cardinal de l'univers choisi) ?

2. Combien existe-t-il de mains de 8 cartes contenant le roi de cœur ?
   Quelle est la probabilité que, parmi les 8 cartes tirées, il y ait le roi de cœur ?
3. Déterminer la probabilité que, parmi les 8 cartes tirées, il y ait :
   a) zéro cœur ; b) un cœur exactement ; c) trois rois exactement.

Exercice 3 :
Une urne contient cinq boules, trois blanches numérotées 1, 2, 3 et deux noires numérotées 4 et 5. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire deux boules simultanément et on s'intéresse à la couleur de ces boules.

1. Proposer un univers correspondant à ce problème et qui vérifie l'hypothèse d'équiprobabilité.
2. Déterminer les événements suivants :
   A : les deux boules sont blanches ;
   B : les deux boules sont noires ;
   C : les deux boules sont de couleurs différentes.
3. Déterminer la probabilité de chacun des événements A, B et C ainsi que celle de l'événement : les boules sont de même couleur.

Exercice 4 :
Deux cartes sont tirées au hasard d'un jeu de 32 cartes bien battues.

1. Quelle est la probabilité que les 2 cartes soient des cœurs si la première est remise dans le jeu avant le tirage de la seconde ?
2. Même question sans remise de la première carte.

Exercice 5 :
On tire au hasard 3 boules dans une urne qui contient 4 boules rouges et 5 boules blanches. Calculer la probabilité que les 3 boules soient rouges :

a) si le tirage a lieu sans remise.

b) si le tirage a lieu avec remise.

Exercice 6 : *Le 421*
On lance simultanément 3 dés non pipés. Quelle est la probabilité d'obtenir le 421 ?
Exercice 7 :
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 en jetant un dé ? deux dés ? trois dés ? (Les dés

son bien équilibrés.)

Exercice 8 :

Quelle est la probabilité qu'une main de 8 cartes extraite au hasard d'un jeu de 32 cartes, contienne au mooins un as ?

Exercice 9 :

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

a) un billet ? b) deux billets ?

Exercice 10 :

Une urne contient 6 boules blanches et 7 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans le sac.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :

   a) 3 boules blanches ?

   b) 3 boules noires ?

   c) 1 boule blanche et 2 boules noires ?

   d) 1 boule noire et 2 boules blanches ?

2. Vérifier les résultats précédents en calculant la somme des probabilités obtenues.

Exercice 11 :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule, en remettant dans l'urne, avant chaque tirage, la boule précédemment tirée.

Calculer la probabilité de sortir ainsi :

a) 3 boules blanches ;

b) 3 boules rouges ;

c) 1 blanche, puis 2 rouges.

Exercice 12 :

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On tire toutes les boules une à une sans remise.

1. Quelle est la probabilité de les avoir tirées dans l'ordre blanche, noire, blanche, noire, $\cdots$, blanche, noire ?

2. Même question avec n boules au lieu de 5 $(n \geq 1)$.

Exercice 13 :
Un centre de réunions comporte deux salles numérotées 1 et 2.
On note S_1 l'événement « la salle numéro 1 est occupée »et S_2 l'événement « la salle 2 est occupée ».
On sait que :

- les deux salles ont autant de chance d'être occupée l'une que l'autre ;
- la probabilité que l'une des deux salles soit occupée est égale à $0,9$;
- la probabilité que les deux salles soient occupées en même temps est égale à $0,5$.

1. Les événements S_1 et S_2 sont-ils indépendants ?
2. Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des événements S_1 et S_2, puis calculer leur probabilité :

   a) la salle numéro 1 est libre ;

   b) les deux salles soient libres ;

   c) l'une des salles au moins est libre ;

   d) une seule salle est libre.

Exercice 14 : probabilités et équations du second degré.
On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note a le résultat du premier lancer et b le résultat du second lancer.
On considère alors l'équation du second degré : $x^2 + ax + b = 0$.
Calculer la probabilité pour que cette équation admette des solutions réelles (distinctes ou confondues).
Exercice 15 :
Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que l'apparition du numéro 5 est deux fois « plus probable »que l'apparition des autres numéros.

a) Calculer la probabilité que l'apparition de chaque numéro.

b) Calculer les probabilités des événements suivants :
   - obtenir un numéro pair ; obtenir un nombre impair.

Exercice 16 :
Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est truqué de telle manière que la probabilité d'obtenir chaque numéro de 1 à 6 est proportionnelle à ce numéro.

a) Quelle est la probabilité de sortie de chaque numéro ?

b) On lance une fois ce dé, quelle est la probabilité d'obtenir un numéro supérieur à 3 ?

Exercice 17 :

On lance deux fois de suite un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 de façon à former un nombre de deux chiffres : le résultat du premier lancer donne le chiffre des dizaines, celui du second lancer celui des unités.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « Le nombre obtenu est pair » ;

B : « Les deux chiffres du nombre obtenu sont identiques » ;

C : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 51 » ;

D : « Le nombre obtenu contient au moins un 6 ».

Exercice 18 :

On considère un dé cubique parfait dont une face porte le chiffre 1, deux faces le chiffre 2 et trois faces le chiffre 3.

On lance une fois ce dé et on désigne par p_1 , p_2 et p_3 les probabilités d'obtenir respectivement 1 , 2 et 3.

a) Déterminer p_1 , p_2 et p_3.

b) On lance trois fois ce dé ; déterminer la probabilité d'obtenir :

- deux fois le chiffre deux ;
- aucune fois le chiffre 3 ;
- une somme égale à 4.

Exercice 19 :

Un dé est lancé 160 fois.

1. Calculer la probabilité que le point 1 se présente 25 fois, 26 fois, 27 fois.
2. Calculer la probabilité que le point 1 se présente un nombre de fois compris entre 25 et 27.
3. Le total des probabilités obtenues en 1. diffère de la probabilité obtenue en 2. Pourquoi ?
4. Quelle est la probabilité, avec six jets d'un dé, d'obtenir à chaque fois un résultat différent ?

Exercice 20 :

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A « on obtient au moins une boule blanche » ;
   B « on obtient au moins deux boules noires » ;
   C « on obtient au moins une boule de chaque couleur ».
2. Définir l'événement $A \cap B$ par une phrase simple, puis calculer sa probabilité.

Exercice 21 :

Une urne contient quatre jetons marqués respectivement 1 , 2 , 3 et m $[m \in \mathbb{R}^*]$. On tire au hasard un jeton dans l'urne. On note P_1 , P_2 , P_3 et P_m les probabilités respectives de tirer le jeton marqué 1 , 2 , 3 et m.

P_1 , P_2 , P_3 et P_m constituent dans cet ordre une suite arithmétique de raison $\frac{1}{8}$.

a) Montrer que : $P_1 = \frac{1}{16}$.

b) Calculer P_2 , P_3 et P_m.

1.8 Solutions aux exercices

Exercice 1 :

Calculons les probabilités des événements A, B, C, D et E.

L'univers Ω est l'ensemble des 32 cartes. Il y a équiprobabilité parceque toutes les cartes ont la même chance d'etre tirée. $card\,\Omega = 32$

$a)\frac{1}{32}. \quad b)\frac{1}{8}. \quad c)\frac{1}{4}. \quad d)\frac{11}{32}. \; e)\frac{21}{32}.$

Exercice 2 :

1. Univers Ω : ensemble des parties à 8 éléments du jeu de 32 cartes.
   $card\,\Omega = \mathrm{C}_{32}^{8} = 10518300.$
2. C_{31}^{7} mains ; $P = \frac{\mathrm{C}_{31}^{7}}{\mathrm{C}_{32}^{8}} = \frac{1}{4}.$
3. $a)\; P_1 = \frac{\mathrm{C}_{24}^{8}}{\mathrm{C}_{32}^{8}} \approx 0,07$
   $b)\; P_2 = \frac{8 \times \mathrm{C}_{24}^{7}}{\mathrm{C}_{32}^{8}} \approx 0,26$
   $c)\; P_3 = \frac{\mathrm{C}_{4}^{3} \times \mathrm{C}_{28}^{5}}{\mathrm{C}_{32}^{8}} \approx 0,037$

Exercice 3 :

1. Univers Ω : ensemble des parties à 2 éléments de $E = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\}$.
   $card\,\Omega = \mathrm{C}_5^2 = 10$.
2. $A = \{\{1\,;\,2\}\,;\,\{1\,;\,3\}\,;\,\{2\,;\,3\}\}\,;\, B = \{\{4\,;\,5\}\}\,;$
   $C = \{\{1\,;\,4\}\,;\,\{1\,;\,5\}\,;\,\{2\,;\,4\}\,;\,\{2\,;\,5\}\,;\,\{3\,;\,4\}\,;\,\{3\,;\,5\}\}$.
3. $P(A) = \frac{3}{10}\,;\quad P(B) = \frac{1}{10}\,;\, P(C) = \frac{3}{5}$.
   La probabilité que les boules soient de la même couleur est $P(A) + P(B)$ ou $1 - P(C)$.
   On trouve $\frac{2}{5}$

Exercice 4 :

1. Univers Ω : ensemble des 2-listes du jeu de cartes.
   $card\,\Omega = 32^2$. $P = \frac{8^2}{32^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$
2. Univers Ω : ensemble des paires du jeu de cartes.
   $card\,\Omega = \mathrm{C}_{32}^2$. $P = \frac{\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{32}^2} = \frac{7}{124} \approx 0,0565$

Exercice 5 :

a) Le tirage a lieu sans remise.

L'univers Ω : ensemble des permutations de 3 boules parmi 9. Il y a A_9^3 éléments.

$P = \frac{\mathrm{A}_4^3}{\mathrm{A}_9^3} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21} \approx 0,04$

b) Le tirage a lieu avec remise.

L'univers Ω : ensemble des 3-listes de l'ensemble des 9 boules. $card\,\Omega = 9^3$

$P = \frac{4^3}{9^3} = \frac{64}{729} \approx 0,08$

Exercice 6 :

Univers Ω : ensemble des 3-listes de $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$.

$card\,\Omega = 6^3$

Cas favorables : permutations de $\{1\,;\,2\,;\,4\}$. $P = \frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36} \approx 0,0278$.

Exercice 7 :

Les dés étant bien équilibrés, il y a équiprobabilité.

Lorsqu'on lance un dé, l'univers $\Omega = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$.

La probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{6} \approx 0,16$

Lorsqu'on lance deux dés, l'univers $\Omega = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\} \times \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\}$

$card\,\Omega = 6 \times 6 = 36$.

La probabilité d'obtenir au moins un 6 est $P = \frac{1 \times 5}{36} + \frac{5 \times}{36} + \frac{1 \times 1}{36} = \frac{11}{36} \approx 0,30$

Lorsqu'on lance trois dés l'univers $\Omega = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\}^3$. $card\,\Omega = 6^3 = 216$
La probabilité de n'obtenir aucun 6 est $P = \dfrac{5 \times 5 \times 5}{216} = \dfrac{125}{216}$ donc la probabilité d'obtenir au moins un 6 est : $1 - P = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216} \approx 0,42$

Exercice 8 :

La probabilité qu'une main de huit cartes ne contienne aucun as est $P_1 = \dfrac{C_{28}^8}{C_{32}^8}$
La probabilité cherchée est $1 - P_1 \approx 0,7$.

Exercice 9 :

La probabilité de gagner un lot si on achète un billet est $P_1 = \dfrac{7}{100} = 0,07$.
La probabilité de gagner au moins un lot si on achète deux billets est :
$P_2 = \dfrac{7}{100} \times \dfrac{93}{99} + \dfrac{93}{100} \times \dfrac{7}{99} + \dfrac{7}{100} \times \dfrac{6}{99} = \dfrac{112}{825} \approx 0,13$

Exercice 10 :

L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 3 boules parmi 13. Il y a C_{13}^3 éléments.

1. **a)** $P_1 = \dfrac{C_6^3}{C_{13}^3} \approx 0,07$.

   b) $P_2 = \dfrac{C_7^3}{C_{13}^3} \approx 0,12$.

   c) $P_3 = \dfrac{6 \times C_7^2}{C_{13}^3} \approx 0,44$

   d) $P_4 = \dfrac{7 \times C_6^2}{C_{13}^3} \approx 0,37$
2. Les quatre événements sont incompatibles deux à deux et leur réunion est l'univers. On vérifie que la somme des probabilités est 1.

Exercice 11 :

L'univers Ω est l'ensemble des 3-listes d'un ensembles de 5 boules. $card\,\Omega = 5^3 = 125$.
Calculons la probabilité d'obtenir :

a) 3 boules blanches.
$P_1 = \dfrac{3^3}{5^3} = \dfrac{27}{125} = 0,216$

b) 3 rouges.
$P_2 = \dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{8}{125} = 0,064$

c) 1 blanche, puis 2 rouges.
$P_3 = \dfrac{3 \times 2^2}{5^3} = \dfrac{12}{125} = 0,096$.

Exercice 12 :

1. L'univers Ω est l'ensemble des permutations des 10 boules ; $card\,\Omega = 10!$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(5\times 5)\times(4\times 4)\times(3\times 3)\times(2\times 2)\times(1\times 1)}{10!} \\ &= \frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{10\times 9\times 8\times 7\times 6} \\ P &= \frac{1}{252} \end{aligned}$$

2. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{1}{\mathrm{C}_{2n}^{n}}$

Exercice 13 :

1. $P(S_1 \cap S_2) = 0,5 \neq 0$ donc S_1 et S_2 ne sont pas indépendants.
2. **a)** $\overline{S}_1$ « la salle numéro 1 est libre » ; $P\left(\overline{S}_1\right) = 1 - P(S_1) = 0,1$

   b) $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2$ « les deux salles sont libres » ;
   $P\left(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2\right) = 1 - P(S_1 \cup S_2) = 1 - 0,9 = 0,1$

   c) $\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2$ « l'une des salles au moins est libre » ;
   $P\left(\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2\right) = P\left(\overline{S}_1\right) + P\left(\overline{S}_2\right) - P\left(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2\right) = 0,1 + 0,1 - 0,1 = 0,1$

   d) $\left(\overline{S}_1 \cap S_2\right) \cup S_1 \cap \overline{S}_2$ « une seule salle est libre » ;
   $P = \left(\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2\right) - P\left(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2\right) = 0,1 - 0,1 = 0$

Exercice 14 : probabilités et équations du second degré.

Calculons la probabilité pour que cette équation admette des solutions réelles (distinctes ou confondues).

Pour que l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admette des solutions réelles, il faut et il suffit que son discriminant soit supérieure ou égale à 0.

C'est-à-dire que $a^2 - 4b \geq 0$.

C'est-à-dire $a^2 \geq 4b$.

Déterminons les réels a et b qui vérifient l'équation précédente.

Pour $a = 2$, on peut avoir $b = 1$.

Pour $a = 3$, on peut avoir $b = 1$ ou $b = 2$.

Pour $a = 4$, on peut avoir $b = 1$ ou $b = 2$ ou $b = 3$ ou $b = 4$.

Pour $a = 5$, on peut avoir $b = 1$ ou $b = 2$ ou $b = 3$ ou $b = 4$ ou $b = 5$ ou $b = 6$.

Pour $a = 6$, on peut avoir $b = 1$ ou $b = 2$ ou $b = 3$ ou $b = 4$ ou $b = 5$ ou $b = 6$.

On a donc 19 événements qui entraînent la vérification de l'équation $a^2 \geq 4b$.

Le dé cubique étant parfait, chaque face a la même chance d'apparition égale à $\frac{1}{6}$.

Les deux lancers sont indépendants par conséquent, la probabilité d'avoir $a = 2$ et $b = 1$ vaut $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Celle d'avoir $a = 3$ et $b = 1$ vaut $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Celle d'avoir $a = 3$ et $b = 2$ vaut $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.
Ainsi de suite.
Donc chacun de ces 19 événements a une probabilité égale à $\frac{1}{36}$.
En définitive , la probabilité pour que cette équation admette des solutions réelles (distinctes ou confondues) est de $\frac{19}{36}$.