# Problèmes des évaluations séquentielles: pour une vue transversale


Par

TCHAKOUNTE MBIENKEU NATHALIE

Sous l'encadrement du

Dr ISSOFA MOYOUWOU : Chargé de cours ; ENS de Yaoundé.

de

M. ADJABA BIWOLI: Inspecteur Pédagogique National de Mathématiques

et de

M. NJIFON HASSAN: Professeur des Lycées d'Enseignement Général.


Juillet 2014

# Cadre contextuel

Cette reflexion s'est faite dans le cadre du projet PRENUM-AC

# ❖❖ Introduction générale ❖❖

Le calendrier des activités d'une année scolaire (voir arrêté ministériel [12]) de l'enseignement secondaire général au Cameroun donne l'organisation pédagogique de l'année scolaire (enseignements/évaluations). L'année est ainsi subdivisée en six séquences d'enseignement et d'évaluation. Nous nous intéressons d'avantage aux évaluations séquentielles. On note à cet effet deux tendances de gestion des contenus à la fin de chaque séquence. La première dite locale consiste à interroger essentiellement sur le contenu de la séquence en cours. La deuxième quant à elle dite étendue consiste à évaluer sur les enseignements de la séquence en cours tout en incluant ceux dispensés lors des séquences antérieures. Dans la pratique, la tendance locale est délaissée au profit de la tendance étendue. À la suite de notre stage pratique et après l'élaboration d'une ressource pédagogique sur les probabilités en Terminale D, nous nous sommes proposés comme sujet de réflexion l'analyse du contraste entre les deux tendances d'évaluation ci dessus mentionnées.

La principale reproche faite à la tendance locale semble être l'isolement ou l'abandon des thèmes des séquences antérieures. Les atouts dans la tendance étendue lors des évaluations séquentielles nous semble provenir de l'opportunité qu'elle donne aux enseignants d'entreprendre une analyse transversale des différents thèmes et d'offrir aux élèves plusieurs occasions de s'exercer sur un même thème. Un autre mérite de la tendance étendue réside dans le fait qu'elle permet de satisfaire l'une des exigences des examens officiels sur le taux de couverture des enseignements par une épreuve, ce taux devant être au moins de $80\%$. Toutefois, lors des examens officiels au Cameroun et durant les séquences d'évaluation en mathématiques de certains lycées et collèges de la ville de Yaoundé, nous avons constaté que le chapitre sur les probabilités semble ne pas bénéficier de l'approche transversale des thèmes qu'offre la tendance étendue tant préconisée. Nous proposons à ce sujet des exemples d'évaluation sur les probabilités en synthèse avec plusieurs autres thèmes du programme officiel de mathématiques en Terminale D.

CHAPITRE UN

# PROBLÈMES DES ÉVALUATIONS SÉQUENTIELLES : POUR UNE VUE TRANSVERSALE

Cathérine Awoundja Nsata [2] nous apprends que : la séquence au sens étymologique est une suite ordonnée d'éléments ou d'opérations liées à la réalisation d'un programme. Dans l'enseignement, il s'agit d'un ensemble de séances liées entre elles et permettant d'atteindre un des objectifs du programme d'enseignement. Elle apparaît comme un mode d'organisation qui permet de gérer au mieux les intérêts des enseignants et ceux des apprenants. C'est dans cet optique que le découpage séquentiel a été introduit dans le système des enseignements secondaires depuis $1996$. Chaque séquence donne lieu dans les établissements scolaires à des activités d'enseignement, de suivi et d'évaluation. Cependant, on dénombre deux tendances d'évaluation séquentielle et de multiples contrastes entre ces tendances . Nous nous attelerons dans un premier temps à présenter l'approche séquentielle des enseignements et des évaluations au Cameroun ; puis d'en ressortir les deux tendances observées. Dans un second temps, nous nous intéressons à la tendance étendue préconisant une vue transversale des différents thèmes en précisant ses avantages et ses limites.

## 1.1 Approche séquentielle des évaluations

### 1.1.1 Séquence d'enseignement

Jusqu'en $1995$, l'organisation de l'année scolaire était régie par un découpage trimestriel. Avec l'arrêté $n^o\ 78/B1/1464/MINEDUC/SG/IGP/ESG/ESTP/EPMN$ du $14$ août $1996$ [12] fixant les périodes d'interruption des classes en république du Cameroun durant l'année scolaire $1996/1997$, les responsabilités sont clarifiées au double plan administratif et pédagogique. Cet arrêté qui est renouvelé à la fin de chaque année est un planning officiel du découpage d'une année scolaire qui distingue clairement les périodes d'interruption des cours de celles délimitant chaque séquence d'enseignement/évaluation.

L'organisation pédagogique de l'année scolaire se présente en six séquences d'au moins cinq semaines chacune pour un total de $36$ semaines avec des activités et des acteurs bien identifiés.

Chaque séquence donne lieu dans les établissements scolaires à des activités d'enseignement, de suivi et d'évaluation.

L'animateur pédagogique et les enseignants d'une matière établissent ensemble une fiche de progression qui découpe les enseignements par séquence. A cet effet, dans le programme officiel [11], il est recommandé aux enseignants :

– d'assurer un bon équilibre entre les différentes parties du programme
  Exemple : géométrie et analyse
– de choisir une progression permettant une appropriation de nouveaux concepts sans rejeter à la fin de l'année les sujets délicats tels que la géométrie de l'espace et les probabilités.

### 1.1.2 Séquence d'évaluation

Dans les établissements d'enseignement secondaire et au cours de chaque séquence, on a des activités d'évaluation qui sont organisées sous forme de devoirs surveillés éventuellement harmonisés pour les classes de même niveau. Les évaluations se déroulent impérativement pendant la séquence et ne devrait en aucun cas entraîner la mise en congés ponctuels des élèves.

Selon l'arrêté [11] cité plus haut, la dernière séquence consiste en une période d'enseignement suivie de compositions de fin d'année. Les compositions de fin d'année font l'objet d'une organisation interne à l'établissement scolaire. Pour les classes d'examen, en particulier, les épreuves seront calquées sur le modèle des examens officiels dont les programmes seront rappelés aux élèves. S'agissant des classes intermédiaires, les compositions porteront sur le programme de l'année scolaire dûment communiqué aux élèves.

Au Cameroun, il y a principalement deux tendances d'évaluation séquentielle qui sont : une évaluation séquentielle locale et une évaluation séquentielle étendue.

a. L' évaluation séquentielle locale : ce type d'évaluation consiste, pour l'enseignant, à évaluer essentiellement sur ce qu'il a enseigné pendant la séquence. Il peut être rencontré dans les classes intermédiaires et est très rare dans les classes d'examen.

   **Exemple 1.1.1.** :
   Nous présentons en annexe un exemple d'évaluation locale. Il s'agit d'une épreuve de deuxième séquence de la classe de $5^{\text{ième}}$, année scolaire $2013-2014$ du lycée de Makong I (cf annexe A), ainsi que la fiche de progression de cette classe (cf annexe B).
   L'épreuve ci dessus mentionnée comporte deux grandes parties comme le recommande le programme officiel (voir arrêté ministériel $n^o\ 78/B1/1464/MINEDUC/SG/IGP/ESG/ESTP/EPMN$ [11] ) :

– Une première partie intitulée activités numériques qui porte essentiellement sur les fractions (problème faisant appel aux fractions, comparaison, réduction au même dénominateur, addition, soustraction, quotient, multiplication et simplification de fractions).
– Une deuxième partie intitulée activités géométriques qui comporte deux exercices. L'un sur les angles et l'autre sur les triangles.

D'après le projet pédagogique de cette classe (cf annexe B), les enseignements sur les chapitres : Fractions, Angles et Triangles ont été dispensés au cours de la deuxième séquence. Et au cours de la première séquence, les enseignements sur les chapitres : Arithmétique et Distance ont été dispensés mais n'ont pas été inclus dans l'évaluation.

b. L'évaluation séquentielle étendue : ce type d'évaluation consiste à inclure lors de l'évaluation séquentielle les enseignements donnés lors des séquences antérieures aux élèves.

**Exemple 1.1.2.** :
Nous présentons en annexe un exemple d'évaluation étendue. Il s'agit d' une épreuve de $5^{\text{ième}}$ séquence de la classe de terminale $D_1$, année scolaire $2013 - 2014$ du Lycée Bilingue de Mendong (cf annexe C) ainsi que la fiche de progression de cette classe (cf annexe D).
Cette épreuve est élaborée suivant la structure des épreuves des examens officiels. À cet effet, elle comporte deux exercices et un problème.
– Le premier exercice porte essentiellement sur le chapitre intitulé : Probabilités
– Le deuxième exercice porte sur les nombres complexes et les transformations du plan.
– Le problème porte sur les équations différentielles, les fonctions, les intégrales, les suites numériques et les systèmes linéaires.

Les différents chapitres sus-cités ont été dispensés de la première à la cinquième séquence et l'épreuve couvre environ $90\%$ les enseignements déjà dispensés.

Après avoir consulté de nombreuses épreuves de différentes classes des lycées et collèges de la ville de Yaoundé ainsi que certaines fiches de progression de ces classes en mathématiques, nous dirons que : la tendance à évaluer de manière locale est abandonnée au profit de la tendance à évaluer de manière étendue. En outre, cette dernière façon d'évaluer est également celle recommandée par le programme officiel en mathématiques qui prescrit par exemple d'introduire les fonctions logarithme et exponentielle suffisamment tôt au cours de l'année afin de pouvoir proposer aux élèves de nombreux problèmes mettant ces fonctions en jeu.

Il apparaît ainsi que l'évaluation séquentielle locale est abandonnée au profit de l'évaluation séquentielle étendue à cause des difficultés que nous examinons ci-dessous.

### 1.1.3 Problème des évaluations séquentielles locales

Commençons tout d'abord par définir le mot **évaluation**.

Qu'est-ce que l'évaluation ? On peut tenter une définition de l'évaluation scolaire en s'interrogeant sur ses buts. *Jean CARDINET* [6], dans son livre "Pour apprécier le travail des élèves" en définit quatre buts fondamentaux à savoir :

- Améliorer les décisions relatives à l'apprentissage de chaque élève.
- Informer sur la progression de l'élève les parents, l'administration et l'élève lui même.
- Décerner les certificats nécessaires à l'élève et à la société.
- Améliorer la qualité de l'enseignement en général.

Il précise qu'il ne peut s'agir d'évaluer de la même façon dans tous les cas. L'évaluation, en effet, même si elle porte sur le même objet, à savoir une production d'élève, comporte des fonctions différentes : pédagogique, sociale et institutionnelle.

Selon *G. de LANDSHEERE* [4], l'évaluation est : "une estimation par une note d'une modalité ou d'un critère considéré dans un comportement ou un produit. Donc en d'autres termes, évaluer, c'est principalement donner une note . Évaluer consistera donc à juger de la compétence d'un élève à travers sa performance, à extrapoler sa compétence à partir de comportements observables et/ou d'un produit réalisé.

Au vue des objectifs à atteindre dans le processus enseignement-apprentissage, nous dénombrons trois problèmes majeurs liés à l'évaluation locale :

a. L'isolement des thèmes ou chapitres

   Une séquence ne durant qu'environ six semaines, un enseignant de mathématiques pendant cette période n'enseignera que deux chapitres environ pour respecter les contraintes des progressions annuelles. Le développement des compétences et l'exploration des contenus d'enseignement ne se développant qu'avec le temps, la durée d'une séquence semble insuffisante. Interroger une fois sur le contenu d'une séquence et ne plus revenir dessus comme on risque de le faire dans la tendance locale limiterait sûrement la maîtrise de ces contenus.

   Par exemple d'après le projet pédagogique de la classe de terminale D (cf annexe C) les suites numériques sont enseignées au cours de la première séquence et les fonctions au cours de la troisième séquence. Avec l'évaluation étendue qui consiste à évaluer sur les suites d'un coté et sur les fonctions de l'autre, on perdrait ainsi l'occasion d'évaluer sur les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ qui combinent ensemble les propriétés sur les suites et les fonctions telles que le théorème des accroissements finis, la monotonie...

b. L' abandon de certains thèmes par les élèves

   L'évaluation séquentielle locale consistant à évaluer uniquement sur ce qui a été enseigné pendant la séquence, on pourrait noter un abandon, par les élèves des thèmes enseignés durant les séquences antérieures et par conséquent l'oubli de certaines notions.

c. Couverture insuffisante des programmes

   Les évaluations locales suivent le principe un chapitre un exercice. Vu la multitude des chapitres, (par exemple $10$ chapitres dans la progression de terminale D du Lycée Bilingue de

Mendong, cf annexe C), il est évident qu'au bout de quatre séquences, élaborée une épreuve nécessiterait au moins huit exercices ; ce qui donnerait une épreuve atypique et non conforme aux exigences officielles.

## 1.2 Approche transversale des évaluations

### 1.2.1 Principe des évaluations transversales

Afin d'atteindre les objectifs du processus enseignement-apprentissage et d'avoir un bon rendement aux examens officiels, il est très important de mettre les connaissances des enfants en éveil en faisant des évaluations sommatives dont l'objectif essentiel est de faire le bilan des apprentissages appropriés et consolidés. Et pour se faire il est très important de ne pas isoler les thèmes ou chapitres lors des évaluations mais de les lier entre eux. Nous citerons par exemple l'étude des fonctions qui est évaluer de manière transversale et en synthèse avec presque tous les autres thèmes du programme de terminale.

En somme, l'approche transversale des évaluations séquentielles consiste à évaluer à partir de plusieurs thèmes déjà enseignés mettant ainsi en évidence des interconnections possibles.

**Exemple 1.2.1.** Exercice de terminale D liant les nombres complexes au barycentre et aux transformations du plan.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ ; unité : 2 cm sur les axes.
On considère l'équation $(E)$ : $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$ ; $z$ étant un nombre complexe.

1. Vérifier que $1 + i$ est une solution de l'équation $(E)$.
2. Résoudre $(E)$.
3. Soit $u$ un nombre complexe dont la partie imaginaire est strictement négative.
   On considère les points $A$, $B$, $C$ et $G$ d'affixes respectifs $Z_A = u$, $Z_B = u^2$, $Z_C = u^3$ et $Z_G = \frac{4}{3}$ tels que $G = bar\{(A; 6), (B; -4), (C; 1)\}$.
   a. Montrer que $u = 1 - i$ (on pourra utiliser la question 2).
   b. Placer $A$, $B$, $C$ et $G$ dans le repère $(0; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$.
4. Soit $S$ la similitude directe qui transforme $A$ en $B$ et transforme $B$ en $C$.
   a. Trouver l'écriture complexe de $S$.
   b. En déduire les éléments caractéristiques de $S$.
5. a. Calculer $6GA^2 - 4GB^2 + GC^2$
   b. En déduire l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ du plan tels que :
   $6MA^2 - 4MB^2 + MC^2 = 23$.
   c. Représenter $(\Gamma)$.

### 1.2.2 Avantages

L'évaluation étendue des contenus enseignés offre plusieurs avantages parmi lesquels nous citerons :

- la mise en éveil des connaissances des élèves.
- Elle permet de ne pas isoler une notion brisant ainsi les cloisons entre les thèmes.
- Elle permet de donner pratiquement la même importance à presque tous les thèmes.
- la création d'une relation entre plusieurs thèmes du programme.
- Une bonne couverture du programme déjà enseigné lors de l'évaluation.

### 1.2.3 Limites

L'erreur à ne pas commettre ici est une tendance à évaluer de manière sommative tout le temps. Nous notons également que lier les thèmes entraînent parfois la complication des exercices et l'augmentation du degré de difficulté de ces derniers. En effet, lorsqu'une notion n'a pas été bien assimilée, la lier avec une autre ne ferait que compliquer la tâche de l'apprenant.

# APPLICATION DE L'APPROCHE TRANSVERSALE DES ÉVALUATIONS AUX PROBABILITÉS

Après avoir consulté les épreuves de terminale D de plusieurs établissements scolaires de la ville de Yaoundé ainsi que les quinze dernières épreuves au baccalauréat série D du Cameroun, nous constatons que les enseignants de mathématiques ont tendance à isoler le chapitre sur les probabilités des autres chapitres du programme dans cette classe. Ce qui semble donner l'impression qu'il n'est pas possible d'évaluer sur les probabilités de façon transversale en synthèse avec les autres thèmes du programme de terminale D. Nous proposons des évaluations transversales sur les probabilités en terme d'exercices corrigés en synthèse avec les autres thèmes du programme tels que : les nombres complexes, les transformations du plan, les fonctions et les suites numériques.

## 2.1 Probabilités et suites numériques

**Exercice 2.1.1.** : Probabilités et construction d'une suite numérique.
Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète $n$ fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne. On suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note $P_n$ la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage.

1. Calculer les probabilités $P_2, P_3$ et $P_4$.
2. On considère les événements suivants :
   $B_n$ : «On tire une boule blanche lors du $n^{\text{ième}}$ tirage»
   $U_n$ : «On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages»
   a. Calculer la probabilité de l'événement $B_n$.

b. Exprimer la probabilité de l'événement $U_n$ en fonction de $n$.

c. En déduire l'expression de $P_n$ en fonction de $n$ et vérifier l'égalité : $P_n = \frac{n-1}{4} \times (\frac{2}{3})^n$

3. On pose $S_n = P_2 + P_3 + ... + P_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $S_n = 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n$.

b. Déterminer la limite de la suite $(S_n)$ en $+\infty$.

**Solution 2.1.1.** *1. Calculons les probabilités $P_2, P_3$ et $P_4$.*

*Les tirages étant indépendants et les boules ayant la même probabilité d'etre tirées, la probabilité de tirer une boule blanche lors d'un tirage quelconque est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, celle de tirer une boule noire est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.*

*$P_2$ est la probabilité de tirer une boule blanche au premier tirage et une boule blanche au deuxième tirage.*

*Ainsi $P_2 = \frac{1^2}{3^2} = \frac{1}{9}$.*

*D'où $P_2 = \frac{1}{9}$*

*$P_3$ est la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des deux premiers tirages et une boule blanche au troisième tirage.*

*Ainsi $P_3 = 2 \times \frac{1\times 2}{3^2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.*

*D'où $P_3 = \frac{4}{27}$.*

*$P_4$ est la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des trois premiers tirages et une boule blanche au quatrième tirage.*

*Ainsi $P_4 = 3 \times \frac{1\times 2^2}{3^3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.*

*D'où $P_4 = \frac{4}{27}$.*

*2. a. Calculons la probabilité de l'événement $B_n$.*

*$B_n$ : «on tire une boule blanche lors du $n^{ième}$ tirage»*

*$P(B_n) = \frac{1}{3}$*

*b. Exprimons la probabilité de l'événement $U_n$ en fonction de $n$.*

*$U_n$ : «on tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages».*

*$P(U_n) = (n-1)\frac{1}{3} \times (\frac{2}{3})^{(n-2)}$.*

*c. Déduisons l'expression de $P_n$ en fonction de $n$.*

*L' événement tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n^e$ tirage est l'événement $B_n \cap U_n$.*

*Les tirages étant indépendants, les événements $B_n$ et $U_n$ sont indépendants.*

*Par conséquent, $P_n = P(B_n) \times P(U_n)$.*

*D'où $P_n = (n-1)\frac{1^2}{3^2} \times (\frac{2}{3})^{(n-2)}$.*

*Il vient $P_n = (n-1) \times \frac{2^{(n-2)}}{3^n}$.*

*On a* $P_n = (n-1) \times \frac{2^{(n-2)}}{3^n} \times \frac{2^2}{2^2}$
*Donc* $P_n = \frac{n-1}{4} \times (\frac{2}{3})^n$.

3. *On pose* $S_n = P_2 + P_3 + ... + P_n$.

   a. *Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à* $2$*, on a :* $S_n = 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n$.
   *Soit* $Q_n : (\forall n), (n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, S_n = 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n)$ *notre propriété.*
   *Pour* $n = 2$*, on a :* $S_2 = P_2 = \frac{1}{9}$.
   $1 - (\frac{2}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^2 = 1 - 2 \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.
   *D'où* $Q_2$ *est vraie.*
   *Soit* $n \geq 2$*, supposons* $Q_n$ *vraie et montrons que* $Q_{n+1}$ *l'est également ; c'est-à-dire que :* $S_{n+1} = 1 - (\frac{n+1}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^{(n+1)}$.
   *On a :*

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= P_2 + P_3 + ... + P_n + P_{n+1} \\
&= 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n + P_{n+1} \\
&= 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n + n \times \frac{1^2}{3^2} \times (\frac{2}{3})^{n-1} \\
&= 1 - \frac{3}{2}(\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^{n+1} + n \times \frac{1^2}{3^2} \times (\frac{3}{2})^2 \times (\frac{2}{3})^{n+1} \\
&= 1 - (\frac{2}{3})^{n+1} \times [\frac{3}{2}(\frac{n}{2} + 1) - \frac{n}{4}] \\
&= 1 - (\frac{2}{3})^{n+1} \times (\frac{12n + 24 - 4n}{16}) \\
&= 1 - (\frac{2}{3})^{n+1} \times (\frac{8n + 24}{16})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= 1 - (\frac{2}{3})^{n+1} \times (\frac{n+3}{2}) \\
S_{n+1} &= 1 - (\frac{2}{3})^{n+1} \times (\frac{n+1}{2} + 1).
\end{aligned}$$

   *Donc* $Q_{n+1}$ *est vraie.*
   *Par conséquent,* $(\forall n), (n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, S_n = 1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n)$.

   b. *Déterminons la limite de la suite* $S_n$ *en* $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} [1 - (\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{2}{3})^n] = 1$$

.

**<u>Exercice</u> 2.1.2.** : calcul des probabilités pour la détermination des termes d'une suite.

Une urne contient $12$ boules numérotées de $1$ à $12$. On tire simultanément trois boules. On suppose que tous les résultats possibles d'un tel tirage sont équiprobables. On désigne par $a, b$ et $c$ les numéros des trois boules tirées.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

$A$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $3$»

$B$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2$»

$C$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-2$».

**NB : on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles**.

__Solution__ **2.1.2.** *:*

*Déterminons la probabilité de chacun des événements suivants :*

*$A$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $3$»*

*$B$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2$»*

*$C$ : «$a, b$ et $c$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-2$».*

*On a ici un tirage simultanés de $3$ boules parmi $12$. Le nombre total de tels tirages est $C_{12}^3 = 220$.*

☞ *Calcul de $P(A)$.*

*Il y a équiprobabilité, on a donc $P(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega}$.*

*$a, b$ et $c$ devant être les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $3$ :*

- *Pour $a = 1$, on a $b = 4$ et $C = 7$, donc $(1; 4; 7)$ est une éventualité qui réalise $A$.*
- *Pour $a = 2$, on a $b = 5$ et $C = 8$, donc $(2; 5; 8)$ est une éventualité qui réalise $A$.*

  *...*
- *Pour $a = 6$, on a $b = 9$ et $C = 12$, donc $(6; 9; 12)$ est une éventualité qui réalise $A$.*

*On ne peut avoir $a = 7$.*

*On a donc $card\,A = 6$ et par suite $P(A) = \frac{6}{220} = \frac{3}{110}$.*

☞ *Calcul de P(C).*

*Un raisonnement identique au précédent permet d'obtenir :*

$P(C) = \frac{card\,c}{card\,\Omega} = \frac{8}{220} = \frac{2}{55}$.

☞ *Calcul de $P(B)$*

*Il y a équiprobabilité. On a donc $P(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega}$.*

*$a, b$ et $c$ devant être les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $2$.*

- *Pour $a = 1$, on a $b = 2$ et $C = 4$, donc $(1; 2; 4)$ est une éventualité qui réalise $B$.*
- *Pour $a = 2$, on a $b = 4$ et $C = 8$, donc $(2; 4; 8)$ est une éventualité qui réalise $8$.*
- *Pour $a = 3$, on a $b = 6$ et $C = 12$, donc $(3; 6; 12)$ est une éventualité qui réalise $B$.*

*On ne peut avoir $a = 4$.*

*Donc $card\,B = 3$ et par suite $P(B) = \frac{3}{220}$.*

## 2.2 Probabilités et étude de fonctions

**Exercice 2.2.1.** : probabilités et étude de fonction.

Dans tout l'exercice, on considère $20$ boules indiscernables au toucher ($10$ boules noires et $10$ boules blanches) et deux urnes $A$ et $B$ dans chacune desquelles on placera $10$ boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit $10$ boules au hasard et les met dans l'urne $A$. On place dix autres boules dans l'urne $B$.
   a. Quelle est la probabilité pour que les urnes ne contiennent que des boules de même couleur ?
   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune $5$ boules blanches et $5$ boules noires ?
2. Soit $x$ un entier tel que $0 \leq x \leq 10$. On place maintenant $x$ boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne $A$ et les $10 - x$ boules blanches et $x$ boules noires restantes dans l'urne $B$.
   On procède à l'expérience $E$ : on tire au hasard une boule de l'urne $A$ et on la met dans l'urne $B$, puis on tire au hasard une boule de $B$ et on la met dans $A$.
   On désigne par M l'événement : «chacune des urnes à la même composition avant et après l'événement $E$»
   a. Pour cette question, on prend $x = 6$. Quelle est la probabilité de $M$ ?
   b. Montrer que la probabilité de l'événement $M$ est égale à $\frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.
   c. Pour quelle valeur de $x$ l'événement $M$ est-il plus probable que l'événement contraire $\overline{M}$ ?
   d. Pour quelle valeur de $x$ la probabilité de l'événement $M$ est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette probabilité ?
   On pourra si on le souhaite, introduire la fonction $f$, de la variable aléatoire réelle $x$, définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.

**Solution 2.2.1.** *1. a. Déterminons la probabilité pour que les urnes ne contiennent que des boules de même couleur.*

*Soit $C$ l'événement «les urnes ne contiennent que des boules de même couleur».*

*Les boules étant indiscernables au toucher, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Donc on est en situation d'équiprobabilité.*

*Pour que l'événement $C$ soit réalisé, soit l'urne $A$ contient les boules blanches et par conséquent l'urne $B$ contiendrait les noires, soit l'urne $A$ contient les boules noires et donc l'urne $B$ les boules blanches.*

*D'où $P(C) = \frac{C_{10}^{10} + C_{10}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{2}{184756} \approx 0,000011$.*

b. *Calculons la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune* $5$ *boules blanches et* $5$ *boules noires.*

*Soit* $D$ *l'événement «les deux urnes contiennent chacune* $5$ *boules blanches et* $5$ *boules noires»* $P(D) = \frac{C_{10}^5 + C_{10}^5}{C_{20}^{10}} = \frac{252}{184756} \approx 0,0014.$

2. a. *On prend* $x = 6$*. Déterminons* $P(M)$*.*

*L'urne* $A$ *contient* $6$ *boules blanches et* $4$ *boules noires et l'urne* $B$ *contient* $4$ *boules blanches et* $6$ *boules noires.*

*Pour que l'événement* $M$ *soit réalisé, soit on prélève une boule blanche de l'urne* $A$*, on la met dans l'urne* $B$ *et ensuite, on prélève également une boule blanche de* $B$ *et on la met dans l'urne* $A$*. Soit on prélève une boule noire de l'urne* $A$*, on la met dans l'urne* $B$ *et ensuite, on prélève également une boule noire de* $B$ *et on la met dans l'urne* $A$*.*

*Ainsi donc :* $P(M) = \frac{C_6^1 \times C_5^1}{C_{10}^1 \times C_{11}^1} + \frac{C_4^1 \times C_7^1}{C_{10}^1 \times C_{11}^1} = \frac{6\times 5}{110} + \frac{4\times 7}{110} = \frac{58}{110} \approx 0,53.$

b. *Montrer que la probabilité de l'événement* $M$ *est égale à* $\frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$*.*

$$\begin{aligned}
P(M) &= \frac{C_x^1 \times C_{11-x}^1}{C_{10}^1 \times C_{11}^1} + \frac{C_{10-x}^1 \times C_{x+1}^1}{C_{10}^1 \times C_{11}^1} \\
&= \frac{x(11-x)}{110} + \frac{(10-x)(x+1)}{110} \\
&= \frac{11x - x^2 + 10x + 10 - x^2 - x}{110} \\
&= \frac{-2x^2 + 20x + 10}{110} \\
P(M) &= \frac{-x^2 + 10x + 5}{55}.
\end{aligned}$$

c. *Déterminons les valeurs de* $x$ *pour lesquelles l'événement* $M$ *est plus probable que l'événement contraire* $\overline{M}$*.*

$P(M) = \frac{-x^2+10x+5}{55}$

$P(\overline{M}) = 1 - \frac{-x^2+10x+5}{55} = \frac{55+x^2-10x-5}{55}$

*D'où* $P(\overline{M}) = \frac{x^2-10x+50}{55}$.

$\frac{-x^2+10x+5}{55} > \frac{x^2-10x+50}{55}$.

*Il vient* $x^2 + 10x + 5 - x^2 + 10x - 50 > 0.$

*On a* $-2x^2 + 20x - 45 > 0.$

$\Delta = 20^2 - 4 \times (-2) \times (-45) = 400 - 360 = 40 = (2\sqrt{10})^2.$

$x_1 = \frac{-20-2\sqrt{10}}{-4} = \frac{10+\sqrt{10}}{2} = 6,58.$

$x_2 = \frac{-20+2\sqrt{10}}{-4} = \frac{10-\sqrt{10}}{2} = 3,42.$

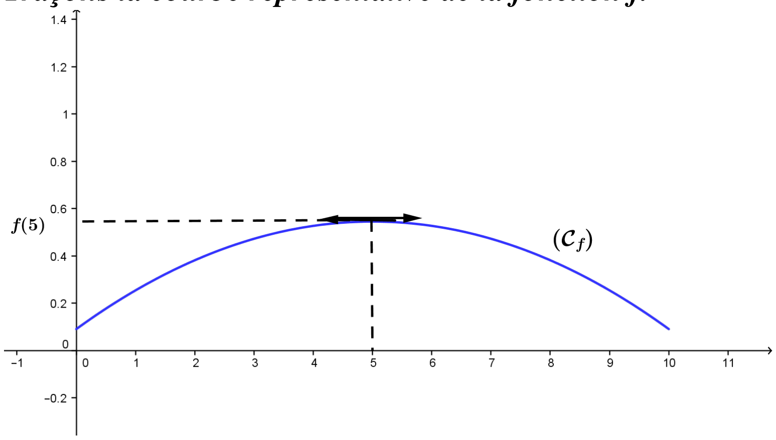
| $x$ | $-\infty$ | | $3,42$ | | $6,58$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2 + 20x - 45$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

*D'après le tableau de signe précédent, les valeurs pour lesquelles l'événement $M$ est plus probable que l'événement $\overline{M}$ sont :* $4, 5$ *et* $6$.

d. *Pour quelle valeur de $x$ la probabilité de l'événement $M$ est-elle maximale ? Quelle est alors la valeur de cette probabilité ?*
*On pourra si on le souhaite, introduire la fonction $f$, de la variable aléatoire réelle $x$, définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.*
$D_E = [0; 10]$
$f(x) = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$.
$f'(x) = \frac{1}{55}(-2x + 10)$.
$f'(x) = 0$ *implique que* $-2x + 10 = 0$
*D'où* $x = 5$.
*Tableau de variation de* $f$.

| $x$ | $0$ | | $5$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0,09$ | $\nearrow$ | $0,55$ | $\searrow$ | $0,09$ |

***Traçons la courbe représentative de la fonction f.***




*D'après le graphique, $P(M)$ est maximale pour $x = 5$ et $P(5) = 0,55$.*

## 2.3 Probabilités, nombres complexes et transformation du plan

**Exercice 2.3.1.** :

Une urne $U_1$ contient trois boules numérotées $1, 2$ et $4$ ; une autre urne $U_2$ contient trois boules numérotées $0, 3$ et $4$, toutes indiscernables au toucher. Une épreuve consiste à tirer une boule de $U_1$ et une boule de $U_2$. On note $a$ le numéro de la boule tirée de l'urne $U_1$ et par $b$ le numéro de la boule tirée de l'urne $U_2$.

Au résultat de l'épreuve, on considère l' application $S$ du plan complexe dans lui même qui à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :
$z' = \frac{1}{2}a[\cos\frac{\pi}{12}b + i\sin\frac{\pi}{12}b]z.$

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   $A_1$ : «$S$ est une homothétie».
   $A_2$ : «$S$ est une rotation». $A_3$ : «$S$ est une similitude de rapport $\sqrt{3}$».
2. Soit le point $A$ d'affixe $1 + i$ et $A'$ son image par $S$. Déterminer la probabilité pour que l'affixe de $A'$ soit imaginaire pur.
3. Soit $X$ la variable aléatoire qui associe à l'épreuve la distance de $O$ à $A'$ ou $O$ est le point d' affixe $0$ et $A'$ le point défini à la deuxième question.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $X$. On pourra faire un tableau à double entrées.
   b. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
   c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire $X$.

**Solution 2.3.1.** *1. Déterminons $P(A_1), P(A_2)$ et $P(A_3)$*

*Pour que $S$ soit une homothétie, il faut et il suffit que $\frac{1}{2}a[\cos\frac{\pi}{12}b + i\sin\frac{\pi}{12}b]$ soit un réel ; c'est-à-dire* $\frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{12}b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ *ou* $\sin\frac{\pi}{12}b = 0$

*D'où* $a = 0$ *ou* $\frac{\pi}{12}b = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$

*Le cas* $a = 0$ *n'est pas réalisable car* $a \in \{1; 2; 4\}$. *Donc on a necessairement* $b = 12k, \quad k \in \mathbb{N}$.

*Si $k \geq 1$ alors $b \notin \{0; 3; 4\}$, d'où $k = 0 \Rightarrow b = 0$*

*Pour que $S$ soit une homothétie il faut et il suffit donc que* $(b = 0$ *et* $a = 1)$ *ou* $(b = 0$ *et* $a = 2)$ *ou* $(b = 0$ *et* $a = 4)$. *Ce qui correspond à la probabilité suivante*
$P(A_1) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

*D'où $P(A_1) = \frac{1}{3}$.*

*Pour que $S$ soit une rotation, il faut et il suffit que* $|\frac{1}{2}a| = 1$ *et* $[\cos\frac{\pi}{12}b + i\sin\frac{\pi}{12}b]$ *ne soit pas un réel, C'est-à-dire* $|\frac{1}{2}a| = 1$ *et* $\frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{12}b \neq 0.$

$|\frac{1}{2}a| = 1 \Rightarrow a = 2$ *car* $a \in \{1; 2; 4\}$

$\frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{12}b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow b = 4$ *ou* $b = 3$.

*Donc* $(b = 4$ *et* $a = 2)$ *ou* $(b = 3$ *et* $a = 2)$

*D'où* $P(A_2) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

*Donc* $P(A_2) = \frac{2}{9}$.

*Pour que* $S$ *soit une similitude directe de rapport* $\sqrt{3}$, *il faut et il suffit que*

$|\frac{1}{2}a| = \sqrt{3}$ *et* $\frac{1}{2}a \sin \frac{\pi}{12}b \neq 0$

$|\frac{1}{2}a| = \sqrt{3} \Rightarrow$ *aucune valeur de* $a$ *ne vérifie la condition.*

*Donc* $P(A_3) = 0$

2. *Soit* $C$ *l'événement : «l'affixe de* $A'$ *est imaginaire pur». Déterminons* $P(C)$

$$\begin{aligned} Z_{A'} &= \frac{1}{2}a[\cos\frac{\pi}{12}b + i\sin\frac{\pi}{12}b](1+i) \\ &= \frac{1}{2}a\cos\frac{\pi}{12}b + \frac{1}{2}ai\sin\frac{\pi}{12}b + \frac{1}{2}ai\cos\frac{\pi}{12}b - \frac{1}{2}a\sin\frac{\pi}{12}b \\ &= \frac{1}{2}a(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b) + \frac{1}{2}ai(\cos\frac{\pi}{12}b + \sin\frac{\pi}{12}b) \end{aligned}$$

*Pour que* $Z_{A'}$ *soit imaginaire pur, il faut et il suffit que* $\frac{1}{2}a(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b) = 0$ *et* $a \neq 0$.

*On a nécessairement :* $\frac{1}{2}a(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b) = 0$ *car* $a \in \{1; 2; 4\}$

*On a* $\cos\frac{\pi}{12}b = \sin\frac{\pi}{12}b$.

*D'où* $\frac{\pi}{12}b = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

$\frac{b}{12} = \frac{1}{4} + k$, $k \in \mathbb{N}$.

*Il vient* $b = 3 + 12k$, $k \in \mathbb{N}$.

*Puisque* $b \in \{0; 3; 4\}$ *alors la seule valeur que puisse prendre* $k$ *est* $0$.

*Par conséquent, les valeurs de* $a$ *et* $b$ *qui satisfont* $Z_{A'}$ *imaginaire pur sont :* $(a = 1; b = 3)$ *; (a=2 ; b=3) et (a=4 ; b=3)*

*D'où* $P(C) = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

*Donc* $P(C) = \frac{1}{3}$.

3. a. *Déterminons l'ensemble des valeurs prises par* $X$.

$Z_{A'} = \frac{1}{2}a(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b) + \frac{1}{2}ai(\cos\frac{\pi}{12}b + \sin\frac{\pi}{12}b)$

$OA' = \sqrt{\frac{1}{4}a^2(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b)^2 + \frac{1}{4}a^2(\cos\frac{\pi}{12}b + \sin\frac{\pi}{12}b)^2}$

$OA'\sqrt{\frac{1}{4}a^2[(\cos\frac{\pi}{12}b - \sin\frac{\pi}{12}b)^2 + (\cos\frac{\pi}{12}b + \sin\frac{\pi}{12}b)^2]}$

$OA' = \frac{1}{2}a\sqrt{2 \times (\cos^2\frac{\pi}{12}b + \sin^2\frac{\pi}{12}b)}$

$OA' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

| $a$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ |

b. *Déterminons la loi de probabilité de* $X$.

| $x_i$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $2\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

c. *Calculons l'espérance mathématique* $E(X)$, *la variance* $V(X)$ *et l'écart type* $\sigma(X)$ *de la variable aléatoire* $X$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{3}$
$E(X) = \frac{7\sqrt{2}}{6}$.
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\frac{2}{4}+2+8}{3} - \frac{49\times 2}{36}$
$V(X) = \frac{21}{6} - \frac{49}{18} = \frac{133-98}{38} = \frac{35}{38}$.
*Donc* $V(X) = \frac{35}{38}$.
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{38}}$
*Donc* $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{38}}$

# ❖❖ Conclusion ❖❖

Il était question pour nous :

- D'une part, d'analyser l'approche locale et l'approche étendue des évaluations afin d'en ressortir les raisons qui concourent à l'abandon de la première au profit de la deuxième.
- D'autre part, de donner au terme de l'élaboration d'une ressource pédagogique sur les probabilités, des exercices corrigés illustrant la tendance étendue ou l'approche transversale des thèmes.

  Nous avons vu d'une part que l'abandon de la tendance locale au profit de la tendance étendue est dicté par le souci de mettre les connaissances des enfants en éveil et d'honorer aux recommandations officielles. Et d'autre part qu'on peut concevoir des évaluations transversales sur les probabilités en terme d'exercices liant les probabilités aux autres thèmes du programme officiel de terminale D.

  Cependant, il ressort après consultation de plusieurs épreuves de terminale que d'autres thèmes tels que les équations différentielles et la géométrie de l'espace méritent un traitement semblable à celui que nous avons accordé aux probabilités dans cet ouvrage.

# Bibliographie


[1] *Charles MVOMO OTAM et al.*, Majors en mathématiques Terminale D, **ASVA EDUCATION**, 20012

[2] *Cathérine Awoundja Nsata*, Évaluation dix ans après l'implantation du découpage séquentiel dans les établissements secondaires du Cameroun, **l'Harmattan** 2011

[3] *Francis NASSIET et al.*, DIMATHEME, Mathématiques Terminales S, **DIDIER**, 1994

[4] *Gilbert DE LANDSHEERE*, Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation, **PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE**, $2^{\text{ème}}$ édition revue et augmentée, 1992

[5] *Jakop BERNOULLI*, L'art de conjecturer, **G. Le Roy**, 1801

[6] *Jean CARDINET*, Pour apprecier le travail des élèves, **DE BOECK**, $2^{\text{ème}}$ édition, 1988

[7] *Saliou TOURE et al.*, CIAM, Mathématiques en Terminale scientifique, option sciences expérimentales, **EDICEF**, 1999

***Webographie***

[8] www.educamer.org

[9] http ://www.hec.ca/cam/aide/rubriques/Notions-Probabilités.pdf

[10] http ://www.google.fr.wikipedia.org/wiki/probabilité

***Textes Ministériels***

[11] *Arreté* $n^o 53/D/43/MINEDUC/SG/IG/ESG$ portant définition des programmes de mathématiques des classes du second cycle de l'enseignement sécondaire général au Cameroun, Août 1998.

[12] *Arrête ministériel* $n^o$ $78/B1/1464/MINEDUC/SG/IGP/ESG/ESTP/EPMN$ fixant les périodes d'interruption des classes en république du Cameroun durant l'année scolaire 1996/1997 ; 14 août 1996.

# ❖❖ Annexes ❖❖

A.**Exemple d'évaluation locale : épreuve de mathématiques de la classe de** $5^{\text{ième}}$ **du Lycée de Makong I, année scolaire** 2013**-**2014.

B. **Projet pédagogique de la classe de** $5^{\text{ième}}$ **du lycée de Makong I, année scolaire** 2013-2014.

C. **Exemple d'évaluation étendue : épreuve de mathématiques de la classe de TD1 du Lycée Bilingue de Mendong, année scolaire** 2013**-**2014.

D. **Projet pédagogique des classes de Terminale D du Lycée Bilingue de Mendong, année scolaire** 2013**-**2014.