LES PROBABILITES CONDITIONNELLES EN TERMINALE C

AMAKAM Rodrigue Age

dirigé par:

Dr Issofa MOYOUWOU ,Chargé de Cours à l'ENS de Yaoundé

Mr Adjaba Biwoli, Inspecteur national de Mathématiques

Mr Hassan Njifon, PLEG /Maths

Yaoundé, le 7 mars 2014

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction générale ♣

La notion de probabilité conditionnelle est la plus importante mais aussi la plus délicate de toute la théorie de probabilité. Elle s'introduit chaque fois que, pendant le developpement d'une expérience une information partielle de dernière minute est fournie à l'expérimentateur. La question est : Comment doit-on modifier la probabilité que l'on attribue à un événement lorsqu'on dispose d'une information supplémentaire ?

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

LES PROBABILITES CONDITIONNELLES

1.1 Les objectifs

1.1.1 Objectifs généraux

A la fin de cette leçon,l'élève doit etre capable de :

- Identifier un problème de probabilités conditionnelles
- Maitriser les outils nécessaires pour la résolution d'un problème de probabilités conditionnelles
- Utiliser les probabilités conditionnelles pour résoudre les problèmes

1.1.2 Objectifs spécifiques

- Reconnaitre qu'un événement est conditionné par d'autres
- reconnaitre deux événements indépendants
- Calculer et interpréter les probabilités conditionnelles
- Utiliser l'indépendance de deux événements pour calculer la probabilité de leur intersection
- Utiliser la formule de probabilités totales

1.1.3 Liens avec les autres parties du programme

Parties du programme nécessaire au développement de la ressource et leurs contributions

Pour bien acquerir ce cours et surmonter les difficultés, l'apprenant à besion des savoirs et de savoirs-faire suivants :

a) La notion d'ensemble fini (la réunion , l'intersection , la différence symétrique des ensembles $\cdots$) car les probabilités seront définis sur les ensembles finis

b) La statistique, car à partir de la définition de la notion de fréquence, on pourra définir une probabilité.

c) La notion de suites numériques, de fonctions et de leurs propriétés car elles peuvent aider à la résolution d'un problème portant sur les probabilités conditionnelles

d) La ressource sur la probabilité qui est le support de cette ressource car la probabilité conditionnelle est une probabilité.

Les apports de la ressource à d'autres parties

a) Permet de consolider le concept de probabilités, de dénombrement.

b) Maîtriser davantage toutes les autres ressources car on peut formuler un problème de probabilités conditionnelles à partir de toutes les autres ressources.

Les différentes applications de la ressource

a) En **assurance pour le calcul du risque qu'un patient soit malade pendant l'année.**

b) **En biologie pour le test de l'éfficacité d'un vaccin.**

1.2 Généralités

1.2.1 Situation problème

Exemple 1.2.1.

Pour se rendre au lycée, un élève choisit toujours l'une des quatre routes A, B, C, D. La probabilité pour qu'il choisisse A (resp B, resp C) est $\frac{1}{3}$ (resp $\frac{1}{4}$, resp $\frac{1}{12}$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp B, resp C) est $\frac{1}{20}$ (resp $\frac{1}{10}$, resp $\frac{1}{3}$). En empruntant D il n'est jamais en retard. L'élève arrive en retard.
Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté la route C ?

Exemple 1.2.2.

Une urne contient 10 boules indiscernables ; 9 boules rouges et 1 boule noire. L'expérience consiste à tirer une boule de l'urne et à relever sa couleur.
Dans une première expérience, on suppose que le tirage est successif avec remise et que le premier joueur tire la boule de couleur noire.

1. Y aura t-il encore dans l'urne une boule de couleur noire lors du tirage du deuxième joueur ? Pourquoi ?
2. Peut-on savoir avant ce deuxième tirage quelle couleur le joueur tirera ?

   On modifie l'expérience et cette fois on fait un tirage sans remise.le premier joueur tire la boule de couleur noire.

3. Y aura t-il encore dans l'urne une boule de couleur noire lors du tirage du deuxième joueur ? Pourquoi ?
4. Peut-on savoir avant ce deuxième tirage quelle couleur le joueur tirera ?

   On reprend cette deuxième expérience en supposant que le premier joueur tire la boule de couleur rouge. Par une maladresse l'urne se casse et les boules sont placées dans 3 autres urnes de la manière suivante :
   L'urne numéro 1 contient 3 boules rouges,l'urne numéro 2 contient 3 boules rouges et 1 boule noire et l'unre numéro 3 contient 2 boules rouges. On rappelle que l'une des boules rouges est entre les mains du joueur.

5. Peut-on dire dans laquelle des 3 urnes la boules a été tirée ? Pourquoi ?
6. Peut-on évaluer dans cette dernière expérience la probabilité d'avoir la boule tirée ?

1.2.2 Etude des données et position du problème

Etude des données

Dans l'exemple 1.2.2, du fait que les boules soient indiscernables au toucher, on se retrouve dans un phénomène d'équiprobabilité. Dans la première expérience, le tirage étant successif avec remise , il y aura encore dans l'urne la boule de couleur noire aucours du tirage du deuxième joueur.
Ainsi on ne peut rien dire avec certitude sur la couleur de la boule qui sera tirée par le deuxième joueur.
Dans la deuxième expérience, le tirage étant successif sans remise, le deuxième joueur aura à tirer sa boule parmi les 9 boules rouges restantes car la boule noire a déjà été tiré. Ainsi on pourra dire sans crainte que le deuxième tirera la boule de couleur rouge.
La dernière expérience peut se resumer à considèrer une nouvelle expérience qui consiste à tirer une boule de couleur rouge parmi 10 boules placées dans 3 urnes.
Puisque toutes les urnes contiennent les boules de couleur rouge, la boule peut être tirée dans chacune des urnes. Alors à la question 5) le joueur ne pourra dire dans laquelle des urnes la boule a été tirée.
Evaluer dans cette nouvelle expérience la probabilité de tirer une boule rouge revient à repondre à la dernière question.

Position du problème

On peut constater que dans la deuxième expérience le premier tirage a modifié le second ; le problème se trouve généralement à ce niveau :

1. Comment calculer la probabilité d'un événement connaissant une information supplémentaire ?
2. Quelle peut être l'influence de cette information sur la réalisation de l'événement qui suit ?

   Dans la dernière expérience ,

3. Comment prendre en compte toutes les données pour évaluer la probabilité de l'événement demandé ?

   Résoudre ces problèmes feront l'objet de ce cours.

1.2.3 Contrôle des pré-réquis et rappels

Contrôle des pré-réquis

Exercice 1.2.1. On lance un dé non truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le numéro obtenu.

1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles ;
2. Considérons les événements A « obtenir le chiffre 6 » et B « obtenir un chiffre supérieur à 3 ». Déterminer $P(A)$ et $P(B)$.

Exercice 1.2.2. Soit l'univers Ω=$\{P; F\}$. Considérons l'application $P_1 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $P_1 P = \frac{1}{3}$;$P_1 F = \frac{2}{3}$;$P_1\Omega = 1$ $P_1\emptyset = 0$. Montrer que P_1 est une probabilité.

Rappels

Dans tout le cours , on suppose que Ω est un ensemble de cardinal fini.
Il existe deux manières d'introduire la notion de probabilité :

- ■La probabilité à priori d'un événement est un nombre qui caractérise la croyance que cet événement est réalisé avec plus ou moins de certitude avant l'execution de l'expérience. L'événement est toujours réalisé si la probabilité est 1 et n'est jamais réalisé si elle est nulle.
- ■la probabilité empirique assimilée à une fréquence est définie à partir d'expériences indéfiniment renouvelables. La probabilité d'un événement est alors la fréquece d'apparition de cet événement.

Dans de nombreux cas , une meme épreuve , repétée plusieurs fois dans les conditions apparemment identiques ne conduit pas toujours au meme résultat. En général, si l'issue d'une épreuve ne peut être déterminé avant sa réalisation, nous dirons qu'il s'agit d'une épreuve ou d'une expérience aléatoire. En d'autre terme une expérience ou une épreuve est qualifié d'aléatoire si on ne peut pas prévoir son résultat et si, repétée dans des conditions identiques elle peut donner des résultats différents.
L'ensemble de tous les résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire s'appelle **univers**.
Un résultat possible w s'appelle une éventualité ou un événement élémentaire.
Un événement quelconque A est un ensemble d'événements élémentaires et constitue une partie de l'univers des possibles Ω dont on sait dire à l'issue de l'épreuve s'il est réalisé ou non. Il est possible qu'un événement ne soit constitué que d'un seul événement élémentaire.

Les événements sont réprésentés par des lettres majuscules A,B,$\cdots$.

On note $\varepsilon(\Omega)$ l'ensemble des événements de Ω.

Soit P : $\begin{array}{rcl} \varepsilon(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ A & \mapsto & P(\mathrm{A}) \end{array}$. P est une probabilité si elle vérifie les conditions suivantes :

C_1) Pour tout $A \in \varepsilon(\Omega)$ $P(\mathrm{A}) \geq 0$

C_2) $P(\Omega)$=1

C_3) $\forall$ A,B $\in \varepsilon(\Omega)$, si $A \cap B$=$\emptyset$ alors $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$=$P(A)$+$P(B)$

.

1.3 Probabilités conditionnelles

Activité 1.3.1. Dans un lycée , 45% des élèves sont des filles , 55% des garçons. Parmi les filles 30% sont internes et 70% externes. Parmi les garçons 60% sont internes et 40% sont externes. On tire au hasard une fiche dans le fichier de tous les élèves du lycée, on note le résultat obtenu qui peut être « fille interne »,« fille externe »,« garçon externe »,« garçon interne ».

1. Calculer la probabilité pour que la fiche tirée soit celle d'une fille.
2. Calculer la probabilité pour que la fiche tirée soit celle d'un garçon.
   Si on pose P le nombre total des élèves .
3. Determiner en fonction de P le nombre total des filles.
4. Déterminer en fonction de P le nombre total de garçons.
5. Determiner en fonction de P le nombre total des filles externes.
   On pose E l'événement :« la fiche tirée est celle d'un élève externe » ; et F l'événement :« la fiche tirée est celle d'une fille ».
6. Décrire l'événement $F \cap E$.
7. En déduire $P(F \cap E)$.
8. Calculer $\frac{P(F\cap E)}{P(F)}$.
   Dans cette partie on considère la population des filles seulement. Désignons par n le nombre total des filles .
9. Quel est le nombre total d'externes parmi les filles ?
10. On choisit une fille au hasard ; quelle est la probabilitée qu'elle soit externe ?

Notons par $P_F(E)$ cette probabilité. (C'est la probabilité des externes sachant que ce sont les filles ou la probabilité des externes parmi les filles.)

11. Comparer $P_F(E)$ à $\frac{P(F\cap E)}{P(F)}$.

Solution de l'activité 1.3.1. On pose Ω l'ensemble des élèves du lycée.

1. Calculons la probabilité pour que la fiche tirée soit celle d'une fille.
   Posons F l'événement :« la fiche tirée est celle d'une fille » ; on a $P(F) = 0,45$.
2. Calculons la probabilité pour que la fiche tirée soit celle d'un garçon.
   Posons G l'événement :« la fiche tirée est celle d'un garçon » ; La fréquece qui représente le nombre total de garçon parmi le nombre d'élèves est 55%, connaissant que la probabilité peut être vue comme une fréquence on a donc $P(G) = 0,55$.
   Si on pose P le nombre total des élèves.
3. Déterminons en fonction de P le nombre total de filles.
   Ce nombre est $P \times 0,45$.
4. Déterminons en fonction de P le nombre total de garçons.
   Ce nombre est $P \times 0,55$.
5. Déterminons en fonction de P le nombre total de filles externes.
   Ce nombre représente 30% de filles et est $P \times 0,45 \times 0,30$.
   On pose E l'événement :« la fiche tirée est celle d'un élève fille externe ».
6. Décrivons l'événement $F \cap E$.
   $F \cap E$ est l'événement :« la fiche tirée est celle d'un élève externe ».
7. Déduisonss en $P(F \cap E)$.
   $P(F \cap E) = \frac{card(F\cap E)}{card(\Omega)} = 0,45 \times 0,30$.
8. Calculons $\frac{P(F\cap E)}{P(F)}$.
   $\frac{P(F\cap E)}{P(F)} = \frac{0,45\times 0,30}{0,45} = 0,30$
   Considérons maintenant seulement les filles. On sait que parmi elles il ya les externes et les internes. Désignons Ω' l'ensemble des filles.
9. Donnons le nombre d'externes parmi les filles.
   Il suffit de prendre le nombre total de filles que nous notons X et de le multiplier par le pourcentage des filles externes ; ainsi ce nombre est $0,30 \times X$.
10. Calculons dans ce dernier cas la probabilité pour que la fiche tirée soit celle d'une externe. Notons par $P_F(E)$ cette probabilité.
    Puisqu'on ne cherche que les externes qui sont filles ou parmi les filles ,il suffit de

diviser le nombre total d'externes filles par le nombre de filles, c'est-à-dire $P_F(E) = \frac{0{,}30 \times X}{X} = 0,30$.

11. Comparons $P_F(E)$ à $\frac{P(F \cap E)}{P(F)}$.
On a $P_F(E) = 0,30 = \frac{P(F \cap E)}{P(F)}$. $P_F(E)$est appelé la probabilité que la fiche tirée soit celle d'une externe sachant qu'elle est une fille .

Définition(probabilités conditionnelles) Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. A et B deux événements associés à Ω . On suppose que A est de probabilité non nulle.

On appelle probabilité conditionnelle de l' événement B sachant que l'événement A est réalisé ou tout simplement probabilité de B sachant A, le nombre réel noté $P(B/A)$ ou $P_A(B)$ définie par :$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

On définit ainsi une probabilité sur Ω au sens de la définition donnée précédemment.

Activité 1.3.2.

A et B sont deux événements tels que la probabilité de B soit non nul.

- Vérifier que $P_B(A) \geq 0$;
- Montrer que $P_B(\Omega) = 1$;

Soient A_1 et A_2 deux événements incompatibles.

- Montrer que $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$
- En déduire que P_B est une probabilité.

Solution de l'activité 1.3.2.

Soit A et B deux événements associés à Ω avec $P(B) \neq 0$.

- Vérifions que $P_B(A) \geq 0$.
En revenant à la définition de $P_B(A)$ on a :$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ qui est supérieur ou égale à 0 car c'est le quotient de deux nombres positif ; ainsi $P_B(A) \geq 0$.
- Montrons que $P_B(\Omega) = 1$.
$P_B(\Omega) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
En supposant A_1 et A_2 incompatibles on a : $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

– Montrons que $P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$.

$$\begin{aligned}
P_B(A_1 \cup A_2) &= \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2))}{P(B)} \\
&= \frac{P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A_1 \cap A_2)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} \qquad car A_1 \cap A_2 = \varnothing \\
&= P_B(A_1) + P_B(A_2)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)}$

– Puisque P_B vérifie les conditions $C_1)$; $C_2)$ et $C_3)$ de la définition d'une probabilité, on conclut que P_B est une probabilité.

Propriété 1.3.1.

Soit B un événement de probabilité non nulle , alors : $\begin{array}{llll} P_B : & \varepsilon(\Omega) & \rightarrow & [0{,}1] \\ & A & \mapsto & P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}$ est une probabilité sur Ω.

Remarque 1.3.1. $P_B(A)$ est une probabilité dans laquelle la réalisation de A dépend de celle de B.On observe les relatios suivantes :

1. $P(A/A) = 1$
2. Si $B \subseteq A$ alors$A \cap B = B$ et donc $P(B/A) = \frac{P(B)}{P(A)}$.

De la définition1.3.2 on déduit la propriété suivante :

Propriété 1.3.2. (**probabilités composées**)

Considérons deux événements A et B , avec A de probabilité non nulle on a $P(A \cap B)$=$P(B/A) \times P(A)$.

Remarque 1.3.2. Si A et B sont de probabilités toutes deux non nulles, alors $P(A/B)$ et $P(B/A)$ sont toutes les deux définies , et on a

1. $\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B/A) \times P(B) \\ &= P(A/B) \times P(A). \end{aligned}$.
2. Le fait que l'événement A soit (ou non) réalisé ne change pas la probabilité que B le soit.

Exercice d'application 1.3.1.

Xavier tire 4 cartes parmi les 32 cartes d'un jeu. Yves a pu s'apercevoir qu'il s'agit de 4 cartes rouges.

Notons les événements :

A« tirer 4 cartes rouges. »

B« tirer 2 as »

Calculer $p(A)$;$P(A\cap B)$ et $p(B/A)$.

Solution de l'exercice d'application 1.3.1.

L'événement $A\cap B$ correspond à :« tirer 4 cartes rouges dont 2 as ».Comme dans un jeu de 32 cartes il ya 4 as ,il suffit de prendre parmi elles les 2 qui sont rouges c'est-à-dire $\subset_2^2$, et pour chaque choix de ces 2 as rouges on a $\subset_{14}^2$façons possibles de choisir les 2 cartes rouges restantes .(Parceque dans un jeu de 32 cartes il ya autant de cartes rouges que de noires, alors en enlevant parmi les 16 rouges qu'il ya au total, les 2 as rouges, il nous reste exactement 14 rouges parmi lesquelles nous devons choisir les deux restantes pour avoir les 4 cartes rouges demandées).
Ceci entraine alors
$card(A\cap B)$ =$\subset_2^2\times\subset_{14}^2$; puisque le jeu consiste à tirer 4 cartes parmi les 32 , on a alors le nombre de façons possibles de choisir ces 4 qui est $card(\Omega)$ =$\subset_{32}^4$, et par suite On a

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \tfrac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} \\ &= \tfrac{\subset_2^2\times\subset_{14}^2}{\subset_{32}^4} \\ &\simeq 0,253\times10^{-2}\,; \end{aligned}$$

On a donc :
$\boxed{P(A\cap B)\simeq 0,253\times10^{-2}}$.

Pour trouver le nombre de façons possibles de tirer 4 cartes rouges dans un jeu de 32 cartes, il suffit de les tirer parmi les rouges; comme il ya en 16 , on va choisir ces 4 cartes parmi ces rouges pour être sûr que les cartes tirées seront rouges. Alors on a exactement $\subset_{16}^4$. Et par suite

$$\begin{aligned} P(A) &= \tfrac{card(A)}{card(\Omega)} \\ &= \tfrac{\subset_{16}^4}{\subset_{32}^4} \\ &\simeq 5,061\times10^{-2} \end{aligned}$$

On a donc :
$\boxed{P(A)\simeq 5,061\times10^{-2}}$.

Calculons la probabilité que xavier ait 2 as.
Ceci revient à calculer la probabilité d'avoir 2 as parmi les 4 cartes rouges tirées par xavier,

ou encore la probabilité d'avoir 2 as sachant que les 4 cartes sont rouges ; ceci correspond donc à calculer la probabilité de l'événement B/A qui par la définition de la probabilité conditionnelle nous donne :

$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \approx 0,05}$.

Remarque 1.3.3.

Il n'est pas toujours indispensable lors de résolution d'un problème de probabilité de donner l'ensemble Ω des éventualités sous la forme extensive, d'ailleurs pas toujours facile à expliciter (c'est le cas de l'activité 1.4.1.)Il est parfois préférable de décrire les événements dans le langage usuel et oublier que ce sont des parties de Ω ; cela revient à donner la forme compréhensive de Ω .

Remarque 1.3.4.

Pour calculer $P(B/A)$,deux possibilités s'offrent en général :
Soit on peut calculer $P(A \cap B)$ et $P(A)$;et utiliser la définition précédente ;
Soit on considère une nouvelle expérience aléatoire : celle dont les éventualités sont les éventualités qui réalise l'événement A, et parmi celles-ci , les éventualités favorables sont les événements qui réalisent également B , en associant à cette nouvelle expérience la probabilité P_A on pourra utiliser la définition classique de probabilité pour retrouver le résultat.

Remarque 1.3.5.

La probabilité $P(A)$ est appelée la probabilité a priori et $P(A/B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité a posteriori car sa réalisation dépend de la réalisation de B.

1.4 Evénements indépendants

Activité 1.4.1. Une expérience aléatoire consiste à tirer une carte d'un jeu de 32 cartes. Dans un premier temps considérons les événements :

A « Tirer un coeur »,

B « Tirer un roi ».

1. Calculer $P(A)$;
2. Calculer $P(B)$;
3. Calculer $P(A \cap B)$;
4. Comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.

.

Considérons maitenant les événements

B« Tirer un roi »

C « tirer une figure »

Une figure étant une carte qui présente un visage.

1. Calculer $P(B)$;
2. Calculer $P(C)$;
3. Calculer $P(B \cap C)$;
4. Comparer $P(B \cap C)$ et $P(B) \times P(C)$.

Solution de l'activité 1.4.1. Posons Ω l'ensemble des tirages possibles d'une cartes parmi les 32.

1. Calculons $P(A)$
   On a évidemment $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{8}{32}$
   car on a exactement 8 coeurs dans un jeu de 32 cartes. Le nombre de choix possibles d'avoir un coeur parmi les 8 est $card(A) = \subset_8^1 = 8$; mais le nombre de choix possibles d'avoir une carte parmi 32 est $card(\Omega) = \subset_{32}^1 = 32$; ce qui conduit au résultat ci-dessus.
2. Calculons $P(B)$
   On sait que $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$; mais $card(B) = \subset_4^1 = 4$ puisque l'événement A demande de tirer une carte qui est coeur, et ce n'est que parmi les 4 coeurs dont dispose un jeu de 32 cartes, qu'on pourrait trouver ce coeur. Alors il ya exactement card(B) manières d'avoir ce coeur. On a donc :

$$\boxed{P(B) = \frac{4}{32}}$$

   .
3. Calculons $P(A \cap B)$.
   Posons $A \cap B$: « Tirer le roi de coeur ». Du fait qu'il y ait qu'un seul roi de coeur on a :
   $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ car $card(A \cap B) = 1$.
4. Comparons $P(A \cap B)$ à $P(A) \times P(B)$
   On peut remarquer que
   $P(A) \times P(B) = \frac{8}{32} \times \frac{4}{32} = \frac{1}{32} = P(A \cap B)$.
   Dans ce cas On dit que A et B sont des événements indépendants.

On peut également constater en calculant la probabilité conditionnelle de B sachant A que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}$.
On a $P(B/A) = P(B)$;on dit aussi que la réalisation de B n'est pas influencée par celle de A.

1. Calculons $P(C)$.

   Puisqu'il ya 12 figures dans un jeu de 32 cartes, tirer une figure revient à le faire parmi les 12 .On a donc exactement $\subset_{12} 1$ possibilités ; d'où
   $P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{12}{32}$.
2. Calculons $P(B \cap C)$

   Posons $B \cap C$:l'événement « Tirer un roi » (car tous les rois sont des figures), du fait qu'il y ait quatre rois on a :
   $P(B \cap C) = \frac{card(B \cap C)}{card(\Omega)} = \frac{4}{32}$ car $card(B \cap C) = \subset_4^1 = 4$.
3. Comparons $P(B \cap C)$ à $P(B) \times P(C)$

   On a

$$\begin{array}{rcl} P(B) \times P(C) & = & \frac{12}{32} \times \frac{4}{32} \\ & = & \frac{3}{64} \\ & \neq & P(B \cap C). \end{array}$$

   Dans ce cas, on dit que les événements A et B ne sont pas indépendants.

On peut calculer la probabilité conditionnelle de B sachant C par la propriété des probabilités composées. Ainsi on a
$P(B/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$. On constate cette fois que $P(B/C) \neq P(B)$. On dit dans ce cas que la réalisation de A est influencée par celle de B.

Définition(événements indépendants) On dit que :

deux événements sont indépendants en probabilité lorsque la réalisation de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre

.

Une définition équivalente est : Soient A et B deux événements d'un univers ω. A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque 1.4.1. La définition traduit que : la probabilité de la réalisation conjointe de ces deux événements est le produit de leurs probabilités respectives.

Remarque 1.4.2. Lorsque deux événements sont indépendants, le fait que l'un des événements soit réalisé n'apporte aucune information sur la réalisation de l'autre ; dans ce cas $P_B(A) = P(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$

Remarque 1.4.3. Il faut être méfiant avec la notion d'indépendance. Deux événements peuvent sembler indépendantes sans pour autant l'être après calcul .

Remarque 1.4.4. On convient qu'un événement A tel que $P(A) = 0$ est indépendant de tout autre.

Remarque 1.4.5. L'événement Ω est indépendant de tout événement A puisque $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A) \times P(\Omega)$.

Commentaire 1.4.1.

Il ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants. Rappelons par définition que, deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$. Il en résulte que : $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$ et dans ce cas l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ est impossible si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$; ainsi, deux événements A et B incompatibles et de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants puisque $P(A \cap B) = 0$ et $P(A).P(B) \neq 0$.

Exercice d'application 1.4.1.

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée. Au premier lancer les résultats sont : Pile (P) ou Face (F). Après le second lancer, on a les résultats suivants : PP, PF , FP , FF. Il est à noter que l'ordre intervient.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois pile ?
   Si on note les événements :

   A« le résultat est pile au premier lancer » ;

   B « le résultat du second lancer est pile » ;
2. Calculer les probabilités $P(A)$,$P(B)$, et $P(A \cap B)$;
3. Comparer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$;
4. Que peut-on dire des événements A et B ?
   Si l'on considère maintenant une famille de 2 enfants ,on veut montrer que les événements

   D« enfants de sexe differents »

   E « au plus une fille » ne sont pas indépendants.

   Pour le prouver,
5. Calculer $P(D)$;
6. Calculer $P(E)$;
7. Calculer $P(E \cap D)$;
8. Comparer $P(E \cap D)$ à $P(E) \times P(D)$ puis conclure.

Solution de l'exercice d'application 1.4.1.

1. Calculons la probabilité d'obténir deux fois pile.
   Soit Ω l'ensemble des résultats possibles à l'issue du second lancer. Ω contient 4 éléments : PP, PF, FP, FF. posons G l'événement :« obtenir P au deux lancer » ; on constate bien évidemment que cet événement n'apparaît qu'une seule fois dans l'ensemble des résultats possibles et donc $card(G) = 1$, d'où $P(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega)} = \frac{1}{4}$
2. Calculons $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
   Notons par Ω' l'ensemble des résultats possibles à l'issue du premier lancer. Ω' contient 2 éléments : P et F. On constate que cet événement n'apparaît qu'une seule fois parmi les 2 que contient Ω' ; d'où $P(A) = \frac{1}{2}$.
   De la même manière, on a $P(B) = \frac{1}{2}$ car les lancers sont indépendants.
   On peut constater que l'événement $A \cap B$ correspond à celui de G définit à la première question. Et donc $P(A \cap B) = P(G) = \frac{1}{2}$.
3. Comparons $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$.
   On a $P(A \cap B) = \frac{1}{2} = P(A) \times P(B)$
4. On peut donc au vue des calculs conclure que les événements A et B sont indépendants.
5. Calculons $P(D)$.
   En effet, Ω contient 4 événements , $\Omega = \{\text{GG,GF,FG,FF}\}$ avec $D = \{GF, FG\}$ puisque les 2 enfants sont de sexes différents c'est-à-dire soit un garçon noté G et une fille noté F, soit alors une fille et un garçon . D'où sur l'hypothèse d'équiprobabilité :$P(A) = \frac{1}{2}$.
6. calculons $P(E)$
   On a $E = \{GG, GF, FG\}$ car au plus une fille voudrait dire qu'il peut ne pas y avoir de fille ; et s'il y en a même ,il y en a qu'une seule et donc $P(E) = \frac{3}{4}$.
7. Calculons $P(E \cap D)$
   En effet l'événement $E \cap D$ correspond à :« les deux enfants sont de sexes différents » c'est-à-dire $E \cap D = \{GF, FG\}$. Ainsi on a $P(E \cap D) = \frac{1}{2}$
8. Comparons $P(E \cap D)$ à $P(E) \times P(D)$
   on vérifie facilement que :$P(E \cap D) \neq P(E) \times P(D)$. On peut donc conclure que ces événements ne sont pas indépendants.

1.5 Formule de probabilités totales

Exemple 1.5.1.

Une agglomération est constitué par 2 villes a et b. Sur un listing contenant les noms des habitants de cette agglomération, on relève un nom au hasard. Avec quelles données pourra t-on être en mesure de repondre à la question suivante : « quelle est la probabilité pour que la personne portant ce nom soit un fumeur ? ». Bien entendu si l'on connaît le nombre total N d'habitants de l'agglomération et le nombre total n de fumeurs, la reponse est très simple ; la probabilité cherchée est $\frac{n}{N}$. Mais pratiquement dans des situations de ce type on dispose rarement des renseignements aussi précis. On dispose parfois des renseignements s'exprimant en termes de pourcentage ou de probabilité concernant l'importance relative de ces villes, et relatifs à chacune d'elles. Par exemple :

(1). La probabilité qu'un habitant pris au hasard dans la ville a (resp b) soit un fumeur est égale à $0,1$ (resp $0,2$).

(2). 60% des personnes du listing habitent la ville a, 40% la ville b.

On va voir que ces données permettent de repondre à la question posée.

Activité 1.5.1.

Notons Ω l'ensemble des habitants de l'agglomération ; et A l'événement « habiter la ville a » ; B l'événement « habiter la ville b ». Notons F l'événement « être un fumeur de l'agglomération ». On se propose donc de calculer $P(F)$.

1. Décrire les événements $F \cap A$ et $F \cap B$.
2. le fumeur tiré peut-il habiter à la fois la ville a et la ville b ?
3. En déduire que les événements $F \cap A$et $F \cap B$ sont incompatibles et que $F = (F \cap A) \cup (F \cap B)$.
4. Donner les probabilités des événements F/A ,F/B , A et B.
5. En utilisant la propriété des probabilités composées, déterminer $P(F \cap A)$ et $P(F \cap B)$.
6. En déduire $P(F)$.

Solution de l'activité 1.5.1.

1. Décrivons les événements $F \cap A$ et $F \cap B$

   $F \cap A$ est l'événement :« être un fumeur de la ville a ».

   $F \cap B$ est l'événement :« être un fumeur de la ville b ».

2. Non , parceque toute personne dont le nom figure sur un listing habite l'une des villes a ou b et une seulement. De plus un fumeur étant d'abord un habitant, il ne pourrait être dans les deux villes d'après l'hypothèse qui stipule que : chaque habitant habite une et une seule ville.
3. On peut donc constater que d'après la question précédente $(F \cap A) \cap (F \cap B) = \varnothing$ et donc les événements $F \cap A$ et $F \cap B$ sont incompatibles ; et $(F \cap A) \cup (F \cap B) = F$ car tout fumeur habite l'une des villes a ou b.
4. donnons les probabilités suivantes :$P(F/A)$,$P(F/B)$,$P(A)$,$P(B)$.
   On a$P(A) = 0,6$ et $P(B) = 0,4$ car elles correspondent aux fréquences des habitants des villes a et b sur le listing.
   D'après (1), la probabilité qu'un habitant pris au hasard dans la ville a soit un fumeur est égale à $0,1$. En reformulant cette phrase on a : la probabilité de l'événement :« être un fumeur sachant qu'il est de la ville a » est $0,1$; on a donc $P(F/A) = 0,1$.
   De même, d'après (2) on a $P(F/B) = 0,2$.
5. Calculons $P(F \cap A)$et $P(F \cap B)$.
   En utilisant la propriété des pobabilités composées on a :
   $\boxed{P(F \cap A) = P(F/A) \times P(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06}$; et
   $\boxed{P(F \cap B) = P(F/B) \times P(B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08}$.
6. Déduisons en la probabilité que l'habitant soit un fumeur c'est-à dire $P(F)$.
   On sait que $F = (F \cap A) \cup (F \cap B)$; c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
P(F) &= P((F \cap A) \cup (F \cap B)) \\
&= P(F \cap A) + P(F \cap B) - P((F \cap A) \cap (F \cap B)) \\
&= P(F \cap A) + P(F \cap B) \\
&= 0,06 + 0,08 \\
P(F) &= 0,14
\end{aligned}$$

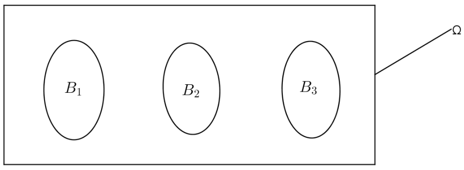
et par suite on a $\boxed{P(F) = 0,14}$

Définition(partition d'un ensemble) Ω est l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire. $B_1, B_2, \cdots, B_n$ sont des événements pour cette expérience. Dire que $B_1, B_2, \cdots, B_n$ forment une partition signifie que :

- Aucun A_i n'est impossible ;$1 \leq i \leq n$
- Les B_i sont deux à deux disjoints,

– $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$

Exemple 1.5.2.



Cas $n = 3$; B_1, B_2, B_3 forment une partition de Ω signifie que :
– $B_1 \neq \varnothing$; $B_2 \neq \varnothing$; $B_3 \neq \varnothing$;
– $B_1 \cap B_2 = \varnothing$; $B_1 \cap B_3 = \varnothing$ et $B_2 \cap B_3 = \varnothing$
– $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$.

Théorème(Formule de probabilités totales) Si les événements $B_1, B_2, \cdots, B_n$ constituent une partition de l'ensemble Ω des éventualités, alors la probabilité d'un événement quelconque A de Ω est donnée par :

– $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$
– $\forall i, (1 \leq i \leq n), P(A \cap B_i) = P(A/B_i) \times P(B_i)$.

Remarque 1.5.1. On a en particulier : $P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

Remarque 1.5.2. On peut constater qu'une fois la partition définie , l'application du théorème précédent devient évidente. Alors le réel problème c'est comment retrouver la partition dans un exercice. Une reponse à cette question sera illustrer à partir du problème précédent ; pour retrouver la partition dans cette activité on pourrait se poser la question suivante : Du fait qu'on cherche un fumeur, où pourrait-on le trouver ? En elaborant toutes les possibilités, on vérifie que l'ensemble de ses possibilités forme une partition. les reponses à cette question sont V_1 ou V_2 ; et il est évident de voir que $\{A, B\}$ forme une partition. Alors l'application du théorème associé à cette partition est évidente et nous donne le résultat trouvé dans l'activité.

Commentaire 1.5.1. La notion de partition peut être remplacée par système complet d'événements.

Exercice d'application 1.5.1.

En 1992 le contrôle des voyageurs à un poste frontière est assuré par trois douaniers X, Y, Z. On sait que :

(1). Chaque voyageur est contrôlé par un douanier et un seul ;

(2). La probabilité qu'il soit contrôlé par X est égale à $0,2$, par Y à $0,3$ et par Z à $0,5$;

(3). Le douanier X détecte les fraudeurs une fois sur deux, le douanier Y une fois sur trois, et enfin Z une fois sur quatre.

Quelle est la probabilité pourqu'un fraudeur se présentant au hasard à ce poste frontière en 1992 ne soit pas détecté ?

Solution de l'exercice d'application 1.5.1.

Notons Ω l'ensemble des fraudeurs se présentant en 1992 à ce poste frontière. Ω est ainsi défini par l'expérience aléatoire qui associe à l'ensemble des voyageurs tous les fraudeurs s y trouvant avant le contrôle. On peut remarquer que d'après la troisième information tous les fraudeurs présents ne seront pas détectés. Comme aucun douanier n'est parfait puisqu'aucun d'eux n'a la probabilité 1 de détecter tous les fraudeurs qui passent sous son contrôle. Posons

A l'événement « être contrôlé par X »

B l'événement « être contrôlé par Y »

C l'événement « être contrôlé par Z »

D l'événement « être un fraudeur détecté »

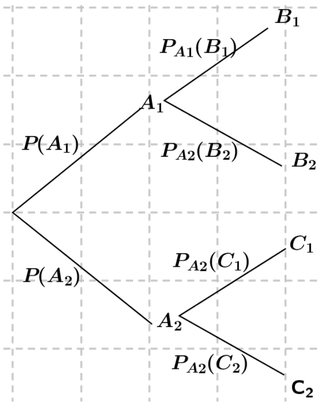
. Alors l'événement $\overline{D}$ « être un fraudeur non détecté »
Mais un fraudeur peut ne pas être détecté après le contrôle du douanier X, Y ou Z ; c'est-à dire soit il n'est pas détecté après le contrôle du douanier X, soit il n'est pas détecté après le contrôle du douanier Y, soit c'est après le contrôle du douanier Z ; un seul douanier à la fois d'après l'information 1 de l'énoncé. D'après l'énoncé $\{A, B, C\}$ forme une partition car $A \cup B \cup C = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$; $A \cap C = \varnothing$; $B \cap C = \varnothing$ d'après l'hypothèse (1). On peut remarquer une fois de plus que si le douanier X détecte un fraudeur sur trois , il laisse donc passer deux sur trois ; alors la probabilité pour un fraudeur de ne pas être détecté sachant qu'il est contrôlé par X est $P(\overline{D}/A) = \frac{2}{3}$; même raisonnement pour les douaniers Y et Z . En appliquant à cette partition le théorème des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P(\overline{D}) &= P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) + P(\overline{D} \cap C) \\ &= P(A) \times P(\overline{D}/A) + P(B) \times P(\overline{D}/B) + P(C) \times P(\overline{D}/C) \\ &= 0,2 \times 0,5 + 0,3 \times \frac{2}{3} + 0,5 \times \frac{3}{4} \\ &= 0,675 \end{aligned}$$

Commentaire 1.5.2. Ainsi un fraudeur a environ deux chances sur trois de ne pas être détecté.

1.6 Approche des probabilités conditionnelles à l'aide des arbres

Ce cours peut se resumer sous la forme d'un graphe appelé **arbre pondéré** qui se présente comme suit :



Sa construction demande à respecter les règles suivantes :

1. Un chemin complet va du départ à une extrémité de l'arbre et représente l'intersection de tous les événements rencontrés sur ce chemin.(on confond un chemin avec l'événement qu'il représente).
2. La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin(ceci est la propriètè des probabilités composés).
3. La somme des probabilités inscrites sur les branches d'un même noeud est égale à 1.(Cette loi est appelé la loi des noeuds)
4. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à A (ceci correspond encore à la formule de probabilité totales).

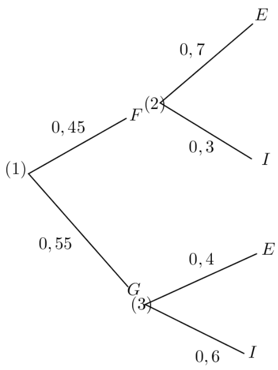
Important Il n'est pas toujours nécessaire de construire l'arbre en entier. En effet dans bien de cas on peut connaître à priori les chemins qui réalisent l'événement dont on cherche la probabilié.

Exercice d'application 1.6.1.

En reprenant l'exemple de l'activité introductive de la définition de la notion de probabilité conditionnelle, utiliser la méthode graphique c'est-à-dire en construisant l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire pour repondre aux questions de cet exemple

Solution de l'exercice d'application 1.6.1.

On a :



Au premier noeud (1) on a un élève qui peut être soit une fille , soit un garçon.
Au deuxième noeud (2) une fille peut soit être externe, soit être interne.
Et enfin au troisième noeud (3) un garçon peut soit être externe, soit être interne.

On peut remarquer que la règle 3 est respectée . En se reférant à l'arbre ci-dessus on peut constater que

$P(F) = 0,45$ et $P_F(E) = 0,7$; et la règle 2 nous donne $P(F \cap E) = P_F(E) \times P(F)$. Sur ce même graphe,on peut remarquer que 2 chemins mènent à E ; en appliquant la règle 4 on obtient la propriètè des probabilités totales pour cet événement qui est :
$P(E) = P(F \cap E) + P(G \cap E)$.
Ainsi, à l'aide de ce calcul ,on peut vérifier si les événements E et F sont indépendants . Il suffit de comparer $P_F(E)$ à $P(E)$ car $P(F) \neq 0$.

1.7 Probabilité conditionnelle et applications

1.7.1 En biologie

Exercice 1.7.1.

Test médical

On suppose qu'un sujet venant consulter dans un service hospitalier donné , a la probabilité $0,30$ d'être atteint d'une maladie difficile à diagnostiquer. Chaque sujet subit un test. On sait que :

– si un sujet n'est pas malade , 9 fois sur 10 la reponse au test est négatif,
– s'il est malade , 8 fois sur 10 la reponse est positive.

1. Quelle est la probabilité pour un sujet d'avoir une reponse positive au test ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un sujet soit atteint par cette maladie et ait une reponse positive au test ?

3. Si le résultat au test est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit atteint par cette maladie ?

Solution 1.7.1.

1) Calculons la probabilité pour un sujet d'avoir une réponse positive au test.
Pour le faire, définissons les événements suivants :
A « est atteint par cette maladie , »
B « le test est positif. » D'après l'énoncé, le sujet peut avoir une réponse positive et ne pas être malade ; ce qui nous permet d'établir 2 possibilités : soit il est atteint de la maladie c'est-à-dire l'événement A est réalisé ; soit alors il n'est pas malade c'est-à dire $\overline{A}$ est réalisé. Mais comme A et $\overline{A}$ forment une partition, on peut appliquer la formule de probabilité totales

$$\begin{aligned} \mathrm{P(B)} &= \mathrm{P(B}\cap \mathrm{A)} + \mathrm{P(B}\cap \overline{A}) \\ &= \mathrm{P(B/A)}\times \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B/}\overline{A})\times \mathrm{P(}\overline{A}) \\ &= 0,8 \times 0,3 + 0,1 \times 0,7 \\ &= 0,31 \end{aligned}$$

2) Calculons la probabilité pour qu'un sujet soit atteint par cette maladie et ait une réponse positive au test.
On peut remarquer que l'événement : $A \cap B$ est « être atteint par la maladie et le test est positif ». Alors ceci revient à calculer $P(A \cap B)$. Par la propriètè des probabilités composés on a :
$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) = 0,24$ puisque $P(B/A) = 0,8$ et $P(A) = 0,3$
3) Sachant que le résultat au test est positif ; Calculons la probabilité pour que le sujet soit atteint par cette maladie.
On constate qu'elle correspond à $P(A/B)$; du fait que $P(B) \neq 0$,on a
$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{24}{31}$.

<u>**Commentaire**</u> **1.7.1.** La probabilité à priori $P(A)$ est strictement inférieur à la probabilité à postériori $P(A/B)$. La probabilité à postériori est la probabilité d'un événement prenant en compte une information qui a lieu avant la réalisation de l'événement. Alors une fois que le test est positif le sujet doit être gardé car il représente un potentiel danger .

<u>**Exercice**</u> **1.7.2.**

Facteur Rhésus

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts :A, B, AB, O.

Indépendant du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur il est dit de Rhésus positif(noté Rh^+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-). Sur une population P les groupes sanguins se repartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

.

Pour chaque groupe la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

.Un individu ayant un sang de groupe O et de Rhésus négatif est appelé un donneur universel.

1.a) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard parmi ceux possédant le facteur Rhésus négatif soit du groupe O ?

.

Solution 1.7.2.

1.a)Calculons la probabilité pour qu'un individu pris dans la population P ait un sang du groupe O.

On peut lire dans le prémier tableau $P(O) = 0,45$.

1.b)Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel.

Par définition, un donneur universel est un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif. Posons O l'événement « est du groupe O »

Rh^- l'événement « a un Rhésus négatif » ; ainsi $O \cap Rh^-$ est l'événement : « est du groupe O et de rhésus négatif ». Le tableau 2 nous donne : $P(Rh^-/O) = 0,2$;ainsi , d'après la propriété des probabilités composés on a :
$P(O \cap Rh^-) = P(Rh^-/O) \times P(O) = \frac{9}{100}$.

1.c) Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ait un sang de Rhésus négatif.
L'individu pris au hasard qui est de Rhésus négatif peut être du groupe sanguin A ,B ,AB ou O.
En posant Ω l'ensemble des groupes sanguins, on a $\Omega = \{A, B, AB, O\}$ où l'événement A (resp B, AB) est « être du groupe sanguin A (resp B, AB) ». On peut remarquer que $\{A, B, AB, O\}$ forme une partition ; en appliquant à cette partition la formule des probabilité totales on a :

$$\begin{aligned} P(Rh^-) &= \mathrm{P}(Rh^- \cap A) + \mathrm{P}(Rh^- \cap B) + \mathrm{P}(Rh^- \cap AB) + \mathrm{P}(Rh^- \cap O) \\ &= \mathrm{P}(Rh^-/A) \times \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(Rh^-/B) \times \mathrm{P(B)} + \mathrm{P}(Rh^-/AB) \times \mathrm{P(AB)} + \mathrm{P}(Rh^-/O) \times \mathrm{P(O)} \\ &= 0{,}18 \times 0{,}40 + 0{,}19 \times 0{,}10 + 0{,}17 \times 0{,}05 + 0{,}20 \times 0{,}45 \\ &= 0{,}1895 \end{aligned}$$

2). Calculons la probabilité pour qu'un individu pris au hasard parmi ceux possédant le facteur Rhésus négatif soit du groupe O.
En reformulant l'énoncé on a : sachant un individu possédant le facteur Rhésus négatif, quelle est la probabilité qu'il soit du groupe sanguin O ? Ainsi cela revient à calculer $P(O/Rh^-)$; et puisque $P(Rh^-) \neq 0$, on a :
$P(O/Rh^-) = \frac{P(O \cap Rh^-)}{P(Rh^-)} = \frac{0{,}09}{0{,}1895} = \frac{180}{379}$

Commentaire 1.7.2. Connaissant le nombre exact de la population, on peut trouver le nombre de donneur universel ; et donc les préserver de maladie en cas de besoin immédiat de sang pour sauver un menbre de la population.

1.7.2 En économie

Exercice 1.7.3.

Une entreprise fabrique un même article dans trois usines A, B, C qui produisent respectivement $50\%, 30\%, 20\%$ du total de la production. On sait statistiquement que :

•4% des articles fabriqués par l'usine A sont défectueux ;

•3% des articles fabriqués par l'usine B sont défectueux ;

•2% des articles fabriqués par l'usine C sont défectueux.

a) Calculer la probabilité pour qu'un article produit soit défectueux.

b) Calculer la probabilité pour qu'un article provienne de l'usine A sachant qu'il est défectueux.

Solution 1.7.3.

a).Calculons la probabilité pour qu'un article produit soit défectueux.

Posons Ω l'ensemble des produits défectueux de cette entreprise pour cet article. Soit A l'événement :« article défectueux fabriqué par l'usine A ». De la même manière on définit les événements B et C. Ainsi $\Omega = \{A, B, C\}$; un article produit peut être défectueux provenant soit de l'usine A, soit de B , soit de C. Mais comme $\{A, B, C\}$ forme une partition , la formule des probabilités totales nous permet d'écrire : $P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$ c'est-à-dire

$\boxed{P(D) = P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C)}$. Mais $P(D/A) = 0,04$, $P(D/B) = 0,03$, $P(D/A) = 0,02$, $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ et $P(A) = 0,2$. Ainsi donc on a

$P(D) = 0,04 \times 0,5 + 0,03 \times 0,3 + 0,02 \times 0,2 = \frac{33}{1000}$ avec D l'événement : « l'article produit est défectueux ». D'où le résultat $\boxed{P(D) = \frac{33}{1000}}$.

b).Calculons la probabilité pour qu'un article provienne de l'usine A sachant qu'il est défectueux.

Cela revient à calculer $P(A/D)$; on a donc

$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)}$ cette dernière formule est connu sous le nom de théorèome de BAYES. Un calcul facile nous donne : $\boxed{P(A/D) = \frac{20}{33}}$.

<u>Exercice</u> 1.7.4.

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement ».

Calculer la probabilité de l'événement contraire $\overline{F}$.

On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement, il est toujours accepté à l'issue du test ;
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement, il peut être néamoins accepté, avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test . »

a). Vérifier que $P(T \cap F) = \frac{9}{10}$.

Calculer $P(T \cap \overline{F})$.

b). Déduire la probabilité de T.

c). calculer la probabilité conditionnelle de F sachant T.

Solution 1.7.4.

1).Calculons la probabilité de l'événement $\overline{F}$.

$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{1}{10}$ et par suite $\boxed{P(\overline{F}) = \frac{1}{10}}$

2.a) Vérifions que $P(T \cap F) = 0,9$

On sait que $P(T \cap F) = P(T/F) \times P(F) = P(F) = 0,9$; puisque l'appareil est toujours accepté quand il est en parfait état.

Calculons $P(T \cap \overline{F})$

On a $P(T \cap \overline{F}) = P(T/\overline{F}) \times P(\overline{F}) = \frac{1}{11} \times 0,1 = \frac{1}{110}$

b.) Déduisons-en la probabilité de T ;

$P(T) = P(T \cap F) + P(T \cap \overline{F}) = 0,9 + 0,0009 \approx 0,9009$.

c.) Calculons la probabilité conditionnelle de F sachant T.

On a $P(F/T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} \simeq 0,99$ et par suite $\boxed{P(F/T) \simeq 0,99}$

Commentaire 1.7.3. Les résultats laissent voir qu'il est difficile pour un client de laisser un appareil qui fonctionne parfaitement pour prendre un autre ; car $P(F/T) \approx 0,99$. Ceci exprime tout a fait la réalité.

1.8 Exercices proposés

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants une ou plusieurs réponses sont exactes.

1. Choisir parmi les phrases suivantes celles qui désigne une probabilité conditionnelle.

   a) la probabilité d'avoir une fille de Terminales S est $\frac{7}{20}$;

   b) Parmi les élèves de Terminales S, la probabilité que ce soit une fille est $\frac{1}{20}$;

   c) la probabilité d'avoir un élève de Terminales S qui est une fille est $\frac{7}{15}$

   .

2. Lors d'une expérience,tous les résultats sont équiprobables. Soit A et B deux événements de probabilité non nulles.

   a) $P(A|B) = \frac{card(A \cap B)}{card A}$;

b) Si A est inclu dans B, $P(A|B) = 1$;

c) Si A et B sont disjoints, $P(A|B) = 0$

.

3. On a deux urnes U_1 et U_2 : dans U_1 il ya trois boules blanches, deux noires ; dans U_2 il ya trois boules noires, deux boules blanches . On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne. On note B le tirage d'une boule blanche, N celui d'une noire et u_1 le tirage de U_1.

   a) $P(B|u_1) = \frac{3}{10}$

   b) $P(u_1|B) = \frac{3}{5}$

   c) la probabilité d'avoir une boule blanche est $\frac{1}{2}$

4. Lors d'un tirage sur l'équipement ménager d'une famille , on trouve les résultats suivants :
   – 60% des familles ont un magnétoscope ;
   – 60% des familles ont une télévision couleur ;
   – 24% des familles intérrogés n'ont ni télévision couleur, ni magnétoscope.
   Notons M l'événement « avoir un magnétoscope » et T l'événement « avoir une télévision couleur ». Laquelle de ces réponses donne la probabilité conditionnelle $P(M|T)$?

   a) $\frac{49}{60}$

   b) $\frac{49}{65}$

   c) $\frac{60}{100} \times \frac{65}{100}$.

5. Ω est l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire. Les événements A et B constituent une partition de Ω. On sait que $\frac{1}{3}$.
   M est un événement tel que $P(M|A) = \frac{1}{2}$ et $P(M|B) = \frac{3}{4}$. Laquelle de ces réponses donne la probabilité $P(M)$?

   a) $\frac{2}{10}$;

   b) $\frac{2}{3}$;

   c) $\frac{6}{10}$

6. On suppose que $P(A|\overline{B})= 0.2$. Dans ces conditions a t-on ?

   a) $P(\overline{A}|B)$ =0.8 ;

   b) $P(A|B)= 0.8$;

   c) $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.8$.

7. On suppose que $P(A)$= 0.8 ; $P(B)$ =0.3 ; $PA\cap B$= 0.2 .Alors $P(A|B)$ est égale à :

   a) $\frac{1}{4}$;

   b) $P(A)$;

   c) $\frac{2}{3}$.

Exercices sur le calcul des probabilités

Exercice 2. Une urne contient 26 boules de même rayon et de même poids ? 10 rouges et 16 noires. Parmi ces boules, 13 sont creuses : 1 rouge et 12 noires et 13 sont pleines : 9 rouges et 4 noires. Il est impossible de distinguer , par la vue ou le toucher les boules creuses des boules pleines. Mais chaque boule peut être séparée par 2 demi-boules et il est possible alors de savoir si elle est pleine ou creuse. On tire une boule au hasard. On constate qu'elle est rouge . On pose alors la question :
Quelle est la probabilité pour que cette boule soit creuse ?

Exercice 3.

Deux objets défectueux figurent dans un lot de 10. On teste les objets un à un jusqu'à ce que l'on ait trouvé ces deux objets(un même objet n'est pas testé deux fois). le choix des objets est effectué au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour que le second objet soit défectueux sachant que le premier est déja défectueux ?
2. Quelle est la probabilité pour que les deux premiers objets tités soient défectueux ?

Exercice 4.

Une usine de conditionnement de café abrite deux machines qui travaillent en chaîne. Les fèves de café décortiquées et séchées passent dans la première machine pour torréfaction, la deuxième machine a alors pour rôle de moudre les fèves de café grillées. Des experts ont estimé à :
$0,002$ la probabilité pour que la première machine tombe en panne ;
$0,003$ la probabilité pour que la 2^e machine tombe en panne lorsque la 1^{re} est en panne.
Calculer :

1. La probabilité pour que les deux machines tombent simultanément en panne ;
2. la probabilité pour que la 2^{me} machine tombe en panne lorsque la 1^{me} est en panne.

Exercice 5.

On jette une paire de dés bien équilibrés. Calculer la probabilité que la somme des numéros obtenus soit superieure ou égale à 10, sachant que :

a).Le premier dé a donné 5 ;

b).L'un au moins des dés a donné 5.

Exercice 6.

On donne $P(A) = \frac{3}{8}$;$P(B) = \frac{5}{8}$;$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$;
Calculer$P(A/B)$ et $P(B/A)$.

Exercice 7.

Une classe de terminale SE est constitué de 45 élèves dont 9 filles et 36 garçons. On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte. On obtient 3 filles et 30 garçons.
Parmi les 45 élèves , on choisit un au hasard. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

1. « l'élève choisi est une fille. »
2. « l'élève choisi est un volontaire. »
3. « l'élève choisi est une fille volontaire. »

Parmi les élèves, on choisit une fille au hasard. Calculer la probabilité de l'événement « la fille choisie est volontaire. »

Exercice 8. Un sondage éffectué dans une région montagneuse à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :

- 65% des personnes intérrogées sont contre la construction de ce barrage ;
- Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes ;
- Parmi les personnes favorables à la construction de ce barrage, 30% sont des écologistes.

On note C l'événement « la personne intérrogé est contre la construction » et $\overline{C}$ l'événement contraire. On note E l'événement « la personne intérrogée est écologiste ». Calculer les probabilités $P(C)$, $P(E|C)$,$P(C|E)$.

Exercice 9. Une urne contien cinq boules noires, six boules blanches et deux boules rouges ; on tire simultanément trois boules :

1. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleur différentes ?

2. Sachant qu'une des boules tirer est de couleur noire, quelle est la probabilité pour que les deux autres soient rouges ?

Exercice 10. Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements :

   – A :« obténir aumoins une boule blanche »
   – B : « obténir aumoins deux boules noires »
   – C : « obténir aumoins une boule blanche et une boule noire »

2. Calculer $P(A|B)$, $P(A|C)$,$P(B|A)$,$P(B|C)$, $P(C|A)$, $P(C|B)$.

Exercices sur les événements indépendants

Exercice 11.

Quatre lots sont repartis entre 5 personnes $P_1, \cdots, P_5$ de la facon suivante : chaque lot est attribué par tirage au sort d'une personne parmi les 5. L'univers Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble des listes de 4 éléments de $\{P_1; \cdots; P_5\}$. Il y en a 5^4. Pour tout $k \in [1; 5]$, notons E_k l'événement décrit par « la personne P_k ne recoit aucun lot ». Les événements E_k, $1 \leq k \leq 5$, sont-ils indépendants ?.

Exercice 12.

Soient A et B deux événements indépendants.
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Même question pour $\overline{A}$ et B ?

Exercice 13.

On sait par des enquêtes médicales, qu'un individu appartenant à une population donnée a la probabilité $\frac{1}{100}$ d'être atteint d'une affection A et la probabilité $\frac{1}{20}$ d'être atteint d'une autre affection B. Si ces affections sont indépendantes , combien environ de sujets atteints de l'une au moins des deux affections doit-on s'attendre à trouver dans un échantillon de 10000 sujets pris dans la population ?.

Exercice 14. Un joueur fait trois jeux consécutifs de manière indépendante. A chaque essai, sa probabilité de gagner est un nombre p ($p \in]0; 1[$).

1. Soit A l'événement : « le joueur gagne au prémier et au deuxième jeu » et B l'événement :« le joueur gagne au deuxième et au troisième jeu ». Calculer $P(A)$, $P(B)$.

2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 15. deux événements A et B vérifient : $P(A)= 0.2$ et $P(B)= 0.4$.
Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cup \overline{B})$,$P(\overline{A} \cup \overline{B})$,$P(\overline{A} \cup B)$.

Exercice 16. Une population se repartit en quatre classes selon deux caractères A et B . le tableau suivant indique les fréquences relatives de chaque classe.

	B	$\overline{B}$
A	a	b
$\overline{A}$	c	d

Quelle relation simple doivent vérifier a ,b ,c ,d pour que A et B soient indépendants ?

Exercices sur le calcul des prababilités totales

Exercice 17.

test de dépistage

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ? Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade (notée $P(M)$) avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné (notée $P_V(M)$). On suppose, de plus, que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades.
Quelle est la proportion de malades dans la population ?
Quelle est la probabilité pour qu'une personne non vaccinée tombe malade ?

Exercice 18.

Un voyageur décide de faire un aller-retour Paris-Brest,en plein hiver. La probabilité qu'il prenne pour le trajet aller le Train à Grande Vitesse (TGV) Atlantique est $\frac{2}{3}$, celle qu'il prenne l'avion est $\frac{1}{3}$.
A cause du brouillard fréquent sur Brest ,un vol sur dix est détourné sur lorient, et le voyage se termine en retard, par le trajet Lorient-Brest en car. Le TGV lui est toujours à l'heure.
Quelle est la probabilité pour que le voyageur arrive en retard par rapport à son planning ?
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le train sachant qu'il arrive à l'heure ?

Exercice 19.

Deux urnes indiscernables (1) et (2) contiennent des boules indiscernables au toucher.
L'urne (1) contient 4 boules rouges et 2 boules noires.
L'urne (2) contient 3 boules rouges et 1 boules noires.

On choisit au hasard une boule de cette urne et on note la couleur de la boule.
Calculons la probabilité pour que la boule tirée soit rouge.

Exercice 20. Une urne contient deux boules vertes et trois boules bleues. On tire successivement trois boules sans remise. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit verte ? bleue ?

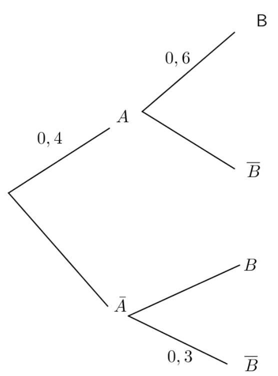
Exercice 21. On lance une pièce de monnaie truquée, telle que la probabilité d'obténir PILE est $\frac{1}{3}$.

- Si l'on obtient FACE , on tire au hasard un jeton d'un sac contenant neuf jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 9.
- Si l'on obtient PILE , on tire au hasard un jeton d'un autre sac contenant cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.

Quelle est la probabilité pour que le nombre obtenu soit impair ?

Calcul des probabilités en utilisant les arbres

Exercice 22. On donne l'arbre ci -contre :



Recopier le puis écriver sur les branches les probabilités manquantes.
Calculer $P(A \cap B)$;$P(A \cap \overline{B})$;$P(B)$.

Exercice 23.

Reprener l'exercice d'application sur les pièces de monnaie du paragraphe 1.4 en utilisant la méthode graphique.

Exercices de synthèse

Exercice 24. Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie M_a . Parmi les individus atteints de la maladie M_a , 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont la maladie M_b.
On prend un individu au hasatd et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :

- « l'individu est atteint de la maladie M_a » ;
- « l'individu est atteint de la maladie M_b »

1. Donnerles valeurs de $P(A)$, $P(B|A)$, $P(B|\overline{A})$.
2. Calculer $P(B)$
3. Calculer $P(A|B)$

Exercice 25. Dans une ville, les taxis sont numérotés 1,2,$\cdots$,n.Dans la rue , un promeneur observe les quatre prémiers taxis et note leurs numéros : 93, 205 , 77 , 191.
Un chauffeur de taxi intérrogé prétend que $n=$ 650. Quel crédit peut-on donner à cette affirmation ?

Exercice 26. Un laboratoire fabrique un test pour détecter des souris malades. Des essais montrent que :96 fois sur 100 le test est négatif alors que la souris n'est pas malade. Dans une population de souris comprenant 3% de souris malades ; on essaie le test sur une souris et on constate qu'il est positif. Quelle est la probabilité que la souris soit malade ?

Exercices de recherche

Exercice 27. Dans une classe de 34 élèves , est-il raisonnable de parier que deux élèves aumoins fêtent leur anniversaire le même jour de l'année ?