Leçon :
Produit vectoriel

par Tatoche fotso Guy Landry

Encadreur du lycée :

Mr Feudjo Anicet

Inspecteur :

Mr Mouchingam

Encadreur ENS :

Dr Temgoua

Objectifs pédagogiques

L'objectif général de ce chapitre est l'introduction de la notion de produit vectoriel qui sera utilisée en géométrie analytique.

A la fin de ce chapitre l'élève devra être capable de :

- Dire si une base donnée est directe ou indirecte.
- Déterminer les coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs dans une base orthonormée.
- Vérifier si trois points sont alignés à l'aide du produit vectoriel
- Étudier la position relative de deux plans en calculant le produit vectoriel de leurs vecteurs normaux.
- Calculer la distance d'un point à une droite, d'un point à un plan.
- Calculer l'aire d'un triangle dont on connait les coordonnées des sommets.
- Calculer le volume d'un tétraèdre dont on connait les cordonnées des sommets.
- vérifier si des vecteurs sont coplanaires à l'aide du produit vectoriel.
- Déterminer une équation cartésienne du plan défini par trois points en utilisant le produit vectoriel.

Historique et motivation ([8])

Le produit vectoriel prend naissance avec "l'invention" des quaternions (extension des nombres complexes dans l ?espace) en 1843, par le mathématicien irlandais *HAMILTON William Rowan* (1805-1865). Le mathématicien américain *GIBBS Josiah Willard* (New Haven 1839 - 1903) simplifie cet outil et définit le produit scalaire et le produit vectoriel dans une théorie appelée l'analyse vectorielle.

Parallèlement à l'américain GIBBS, le mathématicien anglais *HEAVISIDE Oliver* (1850-1925) introduit l'analyse vectorielle. Trouvant malcommode l'utilisation des quaternions en physique, il sépare du produit de 2 quaternions purs, la partie réelle et la partie vectorielle. Cela donnera au signe près le produit scalaire et le produit vectoriel.

L'approche du mathématicien allemand *GRASSMANN Hermann* (1809-1877) est plus géométrique. En 1844, GRASSMANN expose dans Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik l'introduction des notions fondamentales d'algèbre linéaire. GRASSMANN développe ainsi la notion de produit extérieur (produit vectoriel) et invente l'algèbre extérieure. Son idée est d'étendre le calcul des vecteurs à des grandeurs orientées de dimension quelconque. Il considère alors un produit extérieur (maintenant vectoriel) de deux vecteurs comme l'aire orientée du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

Introduction générale

Dans cette leçon, on cherche à introduire la notion de produit vectoriel pour les classes de terminales scientifiques.

Pour suivre ce cours, il suffit d'avoir des connaissances de géométrie des classes de secondes scientifiques et premières scientifiques.

Il est préférable de traiter ce sujet avant le cours sur les applications de l'espace ; l'écriture analytique de certaines applications telles que les réflexions, les demi-tours est facilitée par la connaissance du produit vectoriel.

Dans le soucis de rendre ce cours aisément utilisable par un élève de terminale, les notions et propriétés sont introduites par des activités simples. Ces activités permettent au lecteur de mieux comprendre les nouvelles notions ou de déduire les caractéristiques du produit vectoriel.

Cet ouvrage a été conçu dans les limites des programmes camerounais ; en particulier nous n'avons pas introduit les déterminants d'ordre trois, ni donner la définition du produit mixte. Néanmoins dans la deuxième partie on essayera d'analyser, les possibles conséquences de l'introduction du déterminant d'ordre trois en Terminale C sur cette leçon. Mais avant de commencer le cour sur cette notion, nous allons donner quelques applications pratiques du produit vectoriel. Dans ce document, on notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et $\vec{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace. On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan et $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

0.1 Activités d'introduction (test de pré-requis)

Activité 1

Le plan est muni d'une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ des vecteurs du plan.

1. Calculer $det(\vec{u},\vec{v})$ et $det(\vec{u},\vec{w})$. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
2. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Solution

1. Par définition $det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{vmatrix} = 4\times 2-(-1)(3) = 11$

De même $det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2(\frac{1}{2}) - (-1)(1) = 0.$

On a $det(\vec{u},\vec{w}) = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

2. $\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \times 3 + 4(-1) = 2$

   $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\,; \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

   $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}\sqrt{25}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{25}$

Activité 2

L'espace est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer deux vecteurs non nuls orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (2)(4) + (-3)(2) + (-3)(3) = 8 - 6 - 9 = -11$$

2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   On a $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$ c'est-à-dire $2a - 3b - 3c = 0$ et $4a + 2b + 3c = 0$. On obtient le système $\begin{cases} 2a - 3b - 3c = 0 \\ 4a + 2b + 3c = 0 \end{cases}$.

   Pour $c = -1$ le système devient $\begin{cases} 2a - 3b = 3 \\ 4a + 2b = -3 \end{cases}$. La résolution nous donne $a = \frac{3}{16}$, $b = \frac{9}{8}$ et $c = -1$.

   D'où on peut choisir $\vec{u}(\frac{3}{16}, \frac{9}{8}, -1)$.

   Pour $c = -2$ le système devient $\begin{cases} 2a - 3b = -6 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases}$. La résolution nous donne $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{9}{4}$ et $c = -2$.

   D'où on peut choisir $\vec{u}(\frac{3}{8}, \frac{9}{4}, -2)$.

Activité 3

Répondre par "vrai" ou "faux".

1. Deux vecteurs non colinéaires de l'espace déterminent un plan.
2. Si une droite (D) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$, alors (D) est orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$.
3. Une droite (D) est orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites concourantes incluses dans $(\mathcal{P})$.
4. Trois droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont incluses dans un même plan.
5. si deux plans sécants sont perpendiculaires à un plan $(\mathcal{P})$ leur droite d'intersection est orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.
6. Une base de l'espace est déterminée par trois vecteurs quelconques de l'espace.
7. Les vecteurs d'un repère orthonormal de l'espace ont toujours pour norme 1.
8. Quatre points distincts et non coplanaires de l'espace forment un repère.

Solution

1. faux (Des plans parallèles ont même vecteurs directeurs ; Donc en plus des vecteurs directeurs, il faut un point de l'espace pour déterminer un plan).
2. vrai (conséquence de la définition).
3. vrai (définition d'une droite orthogonale à un plan)
4. faux (Dans l'espace trois droites non coplanaires peuvent être parallèle).
5. vrai.
6. faux (une base est déterminée par trois vecteurs non coplanaires).
7. faux (c'est vrai pour un repère orthonormé).
8. vrai (ces 4 points forment trois vecteurs non coplanaires et par conséquent un repère lorsqu'on choisit un des points comme origine).

0.2 Orientation de l'espace et du plan

0.2.1 pré-requis-activités

Prérequis

Pour bien suivre ce cours le lecteur a besoin des notions suivantes :

– Notion de vecteurs (voir CIAM 3ième, CIAM seconde)

– Notion de repère de l'espace

Activités

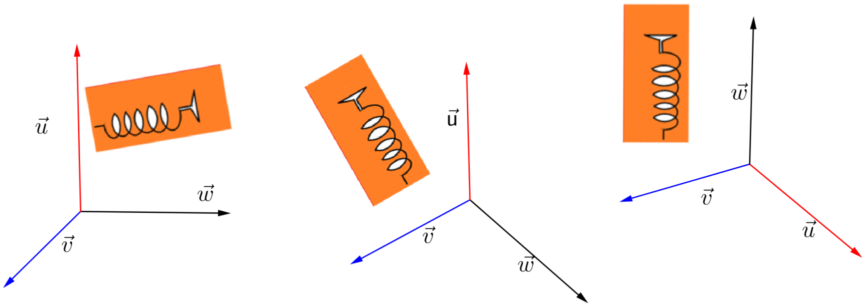


figure 1 figure 2 figure 3

Dans chaque cas de figure ci-dessus faites tourner le tir bouchon de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ et dire s'il progresse vers $\vec{w}$ ou vers $-\vec{w}$.

Solution En faisant tourner un tire-bouchon de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, On observe facilement que :

– Sur la figure 1 le tire-bouchon progresse vers $\vec{w}$.

– Sur la figure 2 le tire-bouchon progresse vers $\vec{w}$.

– Sur la figure 3 le tire-bouchon progresse vers $-\vec{w}$

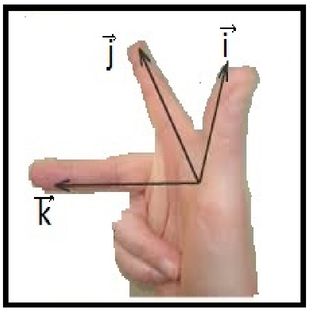
0.2.2 repères directs - repères indirects

Pour distinguer les repères directs et indirects, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

Règle des trois doigts de la main droite.

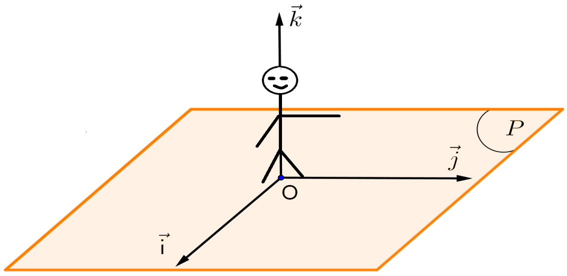
Un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sera dit direct si en pointant le pouce vers $\vec{i}$ et l'index vers $\vec{j}$, le majeur pointe vers $\vec{k}$ (voir figure ci-contre). Dans le cas contraire on dit que le repère est indirect.

Remarque: les trois doigts sont disposés tels qu'ils forment un repère orthogonal.



Règle du bonhomme d'ampère

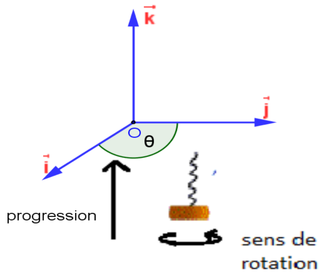
Considérons un observateur placé en O traversé par le vecteur $\vec{k}$ des pieds vers la tête et regardant dans le sens du vecteur $\vec{i}$. Deux situations sont possibles : $\vec{j}$ pointe vers la gauche de l'observateur, dans ce cas le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit direct ; Dans le cas contraire le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est dit indirect.



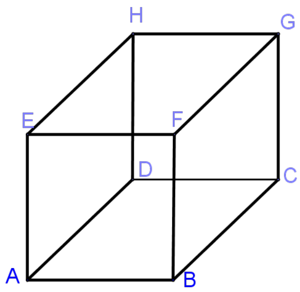
Remarque: On peut fabriquer un bonhomme avec un seul bras pour se repérer dans l'espace.C'est le bras gauche qui indiquera le sens du vecteur $\vec{j}$.

Règle du tire-bouchon

Le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sera dit direct si en tournant un tir bouchon de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, il progresse vers $\vec{k}$. Dans le cas contraire le repère est dit indirect.



Exemple 0.2.1 *Soit ABCDEFGH un cube d'arête* 1.



- $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ *est un repère orthonormé direct de l'espace.*
- $(G,\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH})$ *est un repère orthonormé direct de l'espace.*
- $(H,\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HD})$ *est un repère orthonormé indirect de l'espace.*

Remarque: La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe lorsque le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct.

0.2.3 Orientation de l'espace

Orienter l'espace c'est choisir trois vecteurs non coplanaires de l'espace et distinguer les repères directs et indirects formés par ces vecteurs et un point de l'espace.

Remarques:

$\mathcal{R}_1$ En permutant deux vecteurs d'une base, on change leur orientation. Ainsi $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ sont de sens contraires car on a permuter $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$\mathcal{R}_2$ En permutant les vecteurs d'une base de manière circulaire, on ne change pas son orientation. Ainsi $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{k},\vec{i},\vec{j})$ ont même sens.

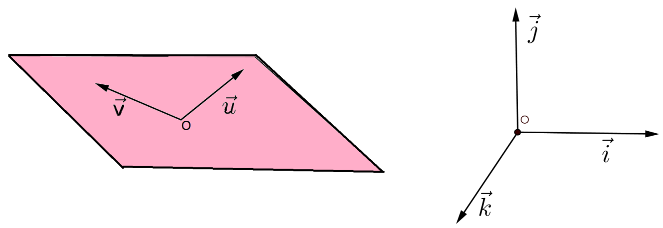
$\mathcal{R}_3$ En remplaçant un vecteur d'une base par son opposé, on change son orientation. Ainsi $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i},-\vec{j},\vec{k})$ sont de sens contraires.

0.2.4 Orientation du plan

L'espace étant orienté, on peut définir une orientation de tout plan de l'espace.

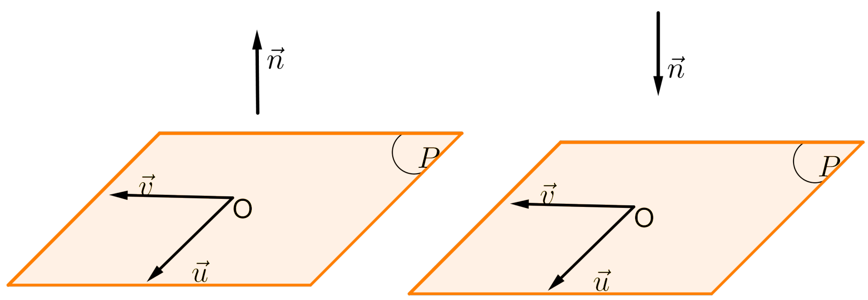
Soit $(\mathfrak{P})$ un plan de l'espace, de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, et $\vec{k}$ un vecteur normal à $(\mathfrak{P})$. On convient que $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère direct de $(\mathfrak{P})$ si $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère direct de l'espace.

Sur la figure ci-contre $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère direct du plan car le sens de rotation de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ est le même que celui de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ et de plus $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère direct de l'espace.



Remarque: Un plan dans l'espace orienté ne peut être orienté que par le choix d'un vecteur normal à ce plan.

En effet soit $(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère du plan. Si on choisit $\vec{n}$ comme vecteur normal du plan tel que $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{n})$ soit un repère direct de l'espace, alors $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère direct du plan(voir figure ci-dessous).



$(O,\vec{u},\vec{v})$ *direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *indirect*

Exercices d'application

Exercice I Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base orthonormé directe de l'espace. Dire en justifiant dans chaque cas si les bases suivantes sont directes ou indirectes.

a) $(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$ b) $(\vec{u},-\vec{v},-\vec{w})$ c) $(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$

d) $(-\vec{u},\vec{w},-\vec{v})$ e) $(\vec{w},\vec{u},-\vec{v})$ f) $(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$

Exercice II Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ soit une base orthonormé directe. Citer pour chaque sommet du cube un repère orthonormé direct d'origine ce sommet.

Correction

Exercice I

$(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$ est une base orthonormé indirecte car on a permuter les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$.

$(\vec{u},-\vec{v},-\vec{w})$ est une base orthonormé directe car lorsqu'on remplace un vecteur par son opposé, on change l'orientation de la base.

$(\vec{w},\vec{v},\vec{u})$ est une base directe car les vecteurs ont été permutés de façon circulaire.

On peut justifier de manière analogue que $(-\vec{u},\vec{w},-\vec{v})$ est une base indirecte, $(\vec{w},\vec{u},-\vec{v})$ est une base indirect et $(\vec{w},\vec{u},\vec{v})$ est une base directe.

Exercice II

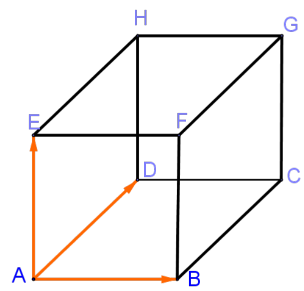
Un repère directe d'origine A est $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

Un repère directe d'origine B est $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BF})$

Un repère directe d'origine C est $(C,\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CG})$.

Un repère directe d'origine H est $(H,\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HE},\overrightarrow{HD})$

Un repère direct d'origine G est $(G,\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GF},\overrightarrow{GH})$



0.3 produit vectoriel

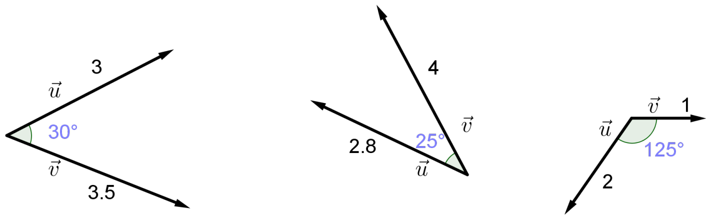
0.3.1 pré-requis - activités

Prérequis

Avant de lire cette section le lecteur doit s'assurer d'avoir des connaissances sur les notions suivantes :

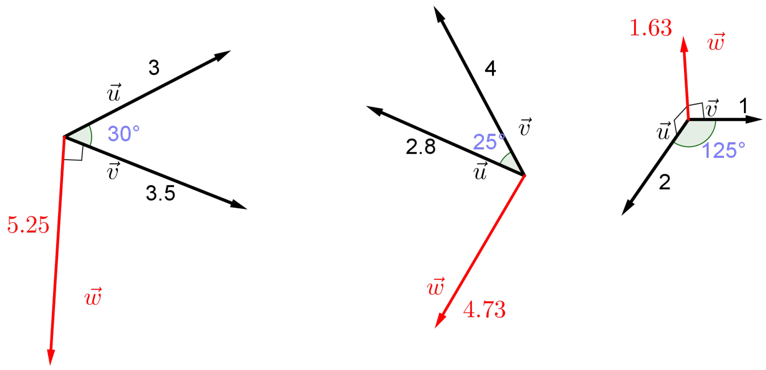
- produit scalaire (voir CIAM seconde c, Major seconde c)
- Déterminant de deux vecteurs (voir CIAM seconde c, Majors 3ième, Majors seconde C)
- Coordonnées des vecteurs de l'espace (voir CIAM seconde c-Première C, Majors seconde C-première C)
- Équation cartésienne d'un plan, système d'équations d'une droite (CIAM première C ; Majors première C)
- Aire d'un triangle, d'un tétraèdre(Voir CIAM troisième)

Activités



Dans chaque cas ci-dessus reproduire la figure, puis esquisser un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit un repère direct et dont la longueur est $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$.

Solution

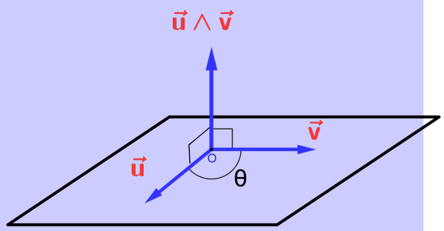


0.3.2 Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, défini de la façon suivante :

- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$;
- lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le vecteur vérifiant les propriétés suivantes :
  - ■ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction de $\vec{u}\wedge\vec{v}$)
  - ■ $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$ est une base directe (sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}$)
  - ■ $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$ (norme de $\vec{u}\wedge\vec{v}$) où $\theta=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.



Remarques:

$\mathcal{R}_1$ $\vec{u}\wedge\vec{v}\neq\vec{0}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\mathcal{R}_2$ Le vecteur nul étant colinéaire à tout vecteur, on a :

$\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

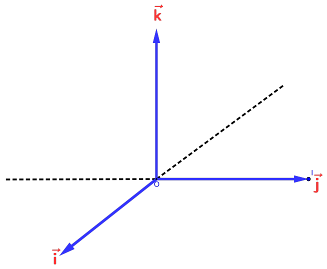
$\mathcal{R}_3$ $\vec{u}$ est colinéaire à lui-même donc $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

$\mathcal{R}_4$ Si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u'} \wedge \vec{v}$ ont même direction. Ces derniers ont même sens si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ont même sens ; ils sont de sens contraires si $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont opposés.

Exemple 0.3.1 *$(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est un repère orthonormé direct.*

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$;

$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$; $\quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

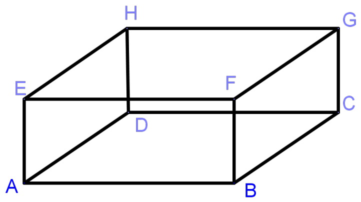


Exemple 0.3.2 *Soit ABCDEGGH un pavé tel que $AE = 2$, $AD = 3$ et $AB = 5$.*

- *Exprimons $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$ en fonction de l'un des vecteurs de la figure.*

En appliquant l'une des règles vues plus haut on peut voir que

$\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ et de même sens. De plus



$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| &= AE.AB\sin(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}) \\ &= AE.AB\sin 90^\circ \\ &= 5 \times 2 \\ &= 10\end{aligned}$$

Puisque $AD = 3$ on peut conclure que $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} = \frac{10}{3}\overrightarrow{AD}$

- *Déterminons $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{EF}$*

Remarquons que $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{HG}$ car $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{HG}\right\| &= HF.HG\sin(\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{HG}) \\ &= HF.HG.\frac{FG}{HF} \\ &= HG.FG \\ &= 5 \times 3 \\ &= 15\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Donc $\overrightarrow{HF} \wedge \overrightarrow{EF} = -\frac{15}{2}\overrightarrow{HD}$.

0.3.3 Propriétés du produit vectoriel

Activités

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

1. (a) Montrer que $\|\vec{v}\wedge\vec{u}\| = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

   (b) Justifier que $\vec{v}\wedge\vec{u}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

   (c) En déduire une relation entre $\vec{v}\wedge\vec{u}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

2. Soit $k > 0$

   (a) Justifier que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $(k\vec{u})\wedge\vec{v}$ ont même direction et même sens.

   (b) Montrer que $k\|\vec{u}\wedge\vec{u}\| = \|(k\vec{u})\wedge\vec{v}\|$.

   (c) En déduire une relation entre $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $(k\vec{u})\wedge\vec{v}$.

Solution

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{v}\wedge\vec{u} = \vec{0}$. Supposons $\vec{v}$ et $\vec{u}$ non colinéaires

1. (a) $\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \sin(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ car l'angle $(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$ est non orienté ; Donc

$$\begin{aligned}\|\vec{v}\wedge\vec{u}\| &= \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\\ &= \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\\ &= \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\end{aligned}$$

   (b) Les vecteurs $\vec{v}\wedge\vec{u}$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ont même direction car ils sont orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La règle du tir bouchon permet de dire qu'ils sont de sens contraires.

   (c) ces vecteurs ont même norme, même direction et de sens contraires donc $\vec{v}\wedge\vec{u} = -(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

2. (a) On a : $k > 0$, donc $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction et même sens, par conséquent $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $(k\vec{u})\wedge\vec{v}$ aussi(voir $\mathcal{R}_4$ ci-dessus).

   (b)

$$\begin{aligned}\|(k\vec{u})\wedge\vec{v}\| &= \|k\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})\\ &= k\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\\ &= k\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\end{aligned}$$

   (c) On peut conclure que $(k\vec{u})\wedge\vec{v} = k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

De ce qui précède on peut énoncer les propriétés suivantes :

Propriétés 0.3.1

$\mathcal{P}_1$ *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :*

- $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ *si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.*
- $(\vec{u}\wedge\vec{v}) \perp \vec{u}$ *et* $(\vec{u}\wedge\vec{v}) \perp \vec{v}$.

Exemple 0.3.3 *Soit* $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *une base de l'espace. Soient* $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$.

On a $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ *car* $\vec{v}=2\vec{u}$*(* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires).*

$\mathcal{P}_2$ *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ *de l'espace et pour tout réel* k, *on a :*

(2.1) $\vec{v}\wedge\vec{u}=-(\vec{u}\wedge\vec{v})$

(2.2) $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$

(2.3) $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$

(2.4) $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$

Remarque:

Les propriétés 2.3 et 2.4 sont admises.

Exemple 0.3.4 *Soient* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *des vecteurs de l'espace,* A, B *et* C *des points de l'espace.*

- $(2\vec{u})\wedge\vec{v}=2(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
- $(-2\vec{u})\wedge\vec{v}=-2(\vec{u}\wedge\vec{v})=2(\vec{v}\wedge\vec{u})=(2\vec{v})\wedge\vec{u}$
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AB}\wedge(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\&=\vec{0}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

0.3.4 Expression analytique du produit vectoriel

Activité

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.

1. Déterminer les vecteurs $\vec{i}\wedge\vec{i}$, $\vec{i}\wedge\vec{j}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{i}$, $\vec{j}\wedge\vec{j}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}$ et $\vec{k}\wedge\vec{k}$.
2. Montrer que $\vec{u}\wedge\vec{v}=(yz'-yz)\vec{i}+(zx'-z'x)\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}$

Solution

1. $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}$, $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$, $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{0}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$.

2.

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\wedge\vec{v} &= \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)\\
&= x\vec{i}\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})+y\vec{j}\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})+z\vec{k}\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})\\
&= xx'\vec{i}\wedge\vec{i}+xy'\vec{i}\wedge\vec{j}+xz'\vec{i}\wedge\vec{k}+yx'\vec{j}\wedge\vec{i}+yy'\vec{j}\wedge\vec{j}+yz'\vec{j}\wedge\vec{k}+\\
&zx'\vec{k}\wedge\vec{i}+zy'\vec{k}\wedge\vec{j}+zz'\vec{k}\wedge\vec{k}\\
&= \vec{0}+xy'\vec{k}-xz'\vec{j}-yx'\vec{k}+\vec{0}+yz'\vec{i}+zx'\vec{j}+\vec{0}\\
&= (yz'-yz)\vec{i}+(zx'-z'x)\vec{j}+(xy'-x'y)\vec{k}\\
&= \begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}
\end{aligned}
$$

Propriétés 0.3.2

Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace. Les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont : $\left(\begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix},\begin{vmatrix} z & z'\\ x & x'\end{vmatrix},\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\right)$

Disposition pratique

Pour faciliter la détermination des coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$, on peut disposer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme suit : $\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}$

L'abscisse (première coordonnée) de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le déterminant obtenu en supprimant la première ligne comme ci-contre : $\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'}\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix} \Rrightarrow \begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}$

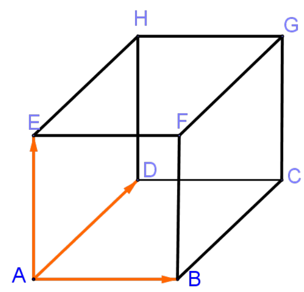
L'ordonnée (deuxième coordonnée) de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est l'opposé du déterminant obtenu en supprimant la deuxième ligne comme ci-contre : $-\begin{vmatrix} x & x'\\ \cancel{y} & \cancel{y'}\\ z & z'\end{vmatrix} \Rrightarrow -\begin{vmatrix} x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}$

La cote (troisième coordonnée) de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est le déterminant obtenu en supprimant la troisième ligne comme ci-contre : $\begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\\ \cancel{z} & \cancel{z'}\end{vmatrix} \Rrightarrow \begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$.

Exemple 0.3.5 *Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$. *La disposition pratique nous donne* $\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\\-3 & 5\end{vmatrix}$.

En appliquant l'astuce ci-dessus on obtient : $\vec{u}\wedge\vec{v}\left(\begin{vmatrix}1 & 3\\-3 & 5\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}2 & -1\\-3 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}\right)$ *c'est-à-dire* $\vec{u}\wedge\vec{v}(14,-7,7)$

Exercices d'application



Exercice I

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ soit une base orthonormée directe de l'espace.

Déterminer les vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GF}$

d) $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{HC}$ e) $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{FH}$ f) $\overrightarrow{HG}\wedge\overrightarrow{BF}$

Exercice II Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe de l'espace.

1. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et déduire en degré la valeur de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :

   a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.
2. En déduire pour chaque cas une valeur à 10^{-2} près de la mesure de l'angle non orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Correction

Exercice I

a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$ car $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée directe par hypothèse.

b)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{EA}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GF} &= (-\overrightarrow{AE})\wedge(-\overrightarrow{AD})\\ &= \overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

d) $\overrightarrow{BE}\wedge\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ car ces vecteurs sont colinéaires.

e) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$ car $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$

$$= a\overrightarrow{AE} \text{ où } a \text{ est la norme du vecteur } \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH}$$
$$= \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \overrightarrow{AE}$$
$$= 2\overrightarrow{AE}$$

autre méthode

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{FH} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \wedge (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}) \quad \text{car } ABCD \text{ et } FEHG \text{ sont des parallélogrammes} \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \wedge (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
&= (-\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD}) \\
&= (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) - (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}) \\
&= (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \\
&= 2\overrightarrow{AE}
\end{aligned}$$

f) $\overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{CG}$

$$= \overrightarrow{GH} \wedge \overrightarrow{GC}$$
$$= \overrightarrow{GF}$$

Exercice II Posons $\theta = mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Pour le premier cas $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\right)$ c'est-à-dire $(-1,2,-5)$. $\sin\theta = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = 1$. Donc $\theta = 90^\circ$

Pour b) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right)$ c'est-à-dire $(-2,-14,-3)$. $sin\theta = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \simeq 1.23$. Donc $\theta \simeq 70{,}92^\circ$.

De manière analogue on montre dans le dernier cas que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $(-1,-1,1)$.

$sin\theta = \frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \simeq 0.19$. Donc $\theta \simeq 10{,}95^\circ$.

0.4 Applications du produit vectoriel

0.4.1 pré-requis

- vecteurs colinéaires, points alignés.
- vecteurs coplanaires
- distance d'un point à une droite, d'un point à un plan
- aire d'un triangle
- volume d'un tétraèdre
- Équation d'un plan

0.4.2 Alignement des points

Activités

Soient $A,\ B$ et C des points distincts de $\mathscr{E}$

1. Justifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si les points A, B et C sont alignés.
2. Réciproquement justifier que les points $A,\ B$ et C sont alignés si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Solution

1. Si les points A, B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par définition du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
2. Si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire les points A, B et C sont alignés.

Propriétés 0.4.1

Des points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Exemple 0.4.1 *Soient $A\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-6\\1\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$ des points de l'espace.*

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3,-15,2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(0,0,0)$.

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, donc les points A, B, D sont alignés.
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

0.4.3 Position relative de deux plans

Activité On considère deux plans (P) et (P') de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

1. Justifier que les plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (P) et (P') soient sécants.
3. Dans le cas où (P) et (P') sont sécants, donner un vecteur directeur de leur droite d'intersection.

Solution :

1. (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ colinéaires(figure 1) c'est-à-dire $\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}$.
2. Il faut et il suffit que $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$.
3. $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont des vecteurs normaux de l'intersection des deux plans (ici (D)) ; donc $\vec{n} \wedge \vec{n'}$ est un vecteur directeur de (D)(figure 2).

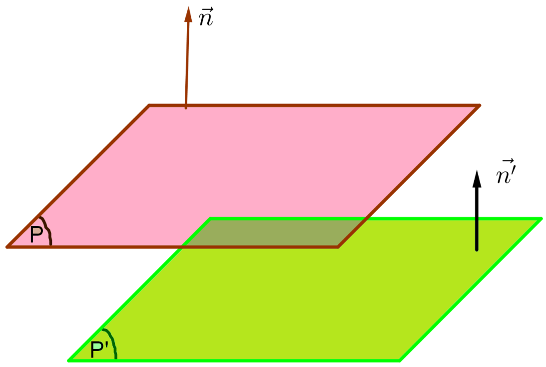


figure 1

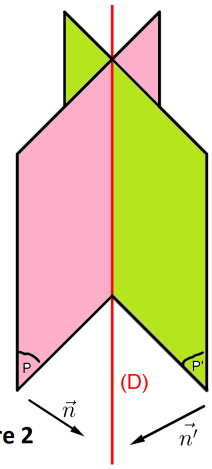


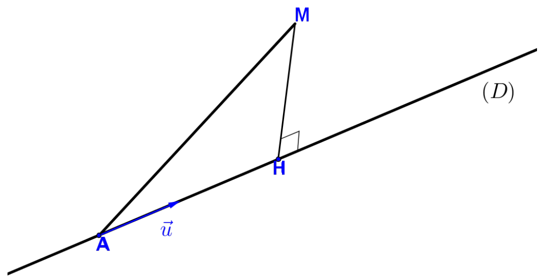
figure 2

0.4.4 Calcul des distances

Distance d'un point à une droite

Activité

Soit (D) une droite de repère $(A, \vec{u})$ et M un point de $\mathscr{E}$, H le projeté orthogonal de M sur (D).



1. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$.
2. Établir l'égalité $MH = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

Solution :

1. En utilisant la relation de Chasles on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{u} \\ &= \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u} + \vec{0} \ \text{ car } \overrightarrow{HA} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \\ &= \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

2. En prenant la norme de l'égalité ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\| &= \left\|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\right\| \\ &= MH \times \|\vec{u}\| \sin(90^\circ) \quad \text{car } \overrightarrow{MH} \perp \|\vec{u}\| \\ &= MH \times \|\vec{u}\|\end{aligned}$$

Donc $MH = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

D'après ce qui précède on peut déduire la propriété suivante :

Propriétés 0.4.2

Soit (D) une droite de repère $(A,\vec{u})$ et M un point de l'espace. La distance de M à (D) est $d = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

Exemple 0.4.2 *Soient $A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ des points de l'espace.*

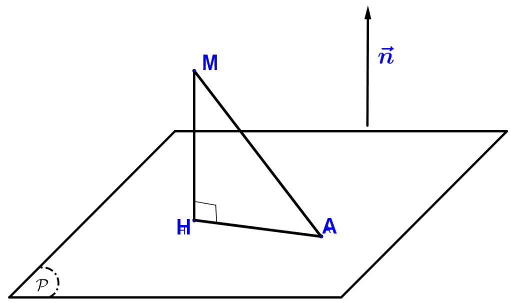
La distance de C à la droite (AB) est : $d = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ c'est à dire $d = \dfrac{\|(-6,-10,1)\|}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{137}}{3\sqrt{3}}$.

Distance d'un point à un plan

Activités

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$. A un point du plan $\mathcal{P}$; M un point de l'espace et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\vec{n} = \overrightarrow{MH}.\vec{n}$
2. En déduire que $MH = \frac{\overrightarrow{MA}.\vec{n}}{\|n\|}$
3. En sachant qu'un plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$ a pour vecteur normal $\vec{u}\wedge\vec{v}$, donner une formule pour calculer la distance d'un point M au plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$.



Solution

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\vec{n} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}).\vec{n})\\ &= \overrightarrow{MH}.\vec{n} + \overrightarrow{HA}.\vec{n}\\ &= \overrightarrow{MH}.\vec{n} + 0 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{MH}\perp\vec{n}\end{aligned}$$

2. En prenant la valeur absolue de l'égalité obtenue ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MA}.\vec{n}\right| &= \left|\overrightarrow{MH}.\vec{n}\right|\\ &= MH \times \|n\| \quad \text{car} \quad \overrightarrow{MH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}\end{aligned}$$

Il en résulte que $MH = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}.\vec{n}\right|}{\|n\|}$

3. voir propriété ci-dessous

Propriétés 0.4.3

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur le plan $\mathcal{P}$.

La distance du point M au plan $(\mathcal{P})$ est $\boxed{MH = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}}$

Exemple 0.4.3 *Soient* $A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ *et* $D\begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix}$ *des points de l'espace.*

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, *d'où* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$. *Donc (ABC) est un plan de repère* $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

La distance de D à (ABC) est $d = \frac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$. *Or* $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}-5\\3\\-2\end{pmatrix}$;

donc : $d = \frac{|-20-3-2|}{18} = \frac{25}{18}$

0.4.5 Calcul d'aires et de volumes

Aire d'un triangle

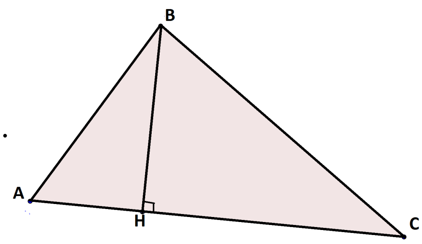
Activités

Soit ABC un triangle et $[BH]$ la hauteur issue de B.

1. Exprimer $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ en fonction de BH et AC.
2. En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

Solution

1. $$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| &= AB\times AC\sin\hat{A}\\ &= AC\times BH \quad \text{car} \quad \sin\hat{A} = \frac{BH}{AB}.\end{aligned}$$



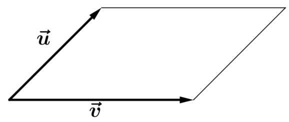
2. $$\begin{aligned}Aire_{ABC} &= \frac{AC\times BH}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|.\end{aligned}$$

On a donc la propriété suivante :

Propriétés 0.4.4

L'aire d'un triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.

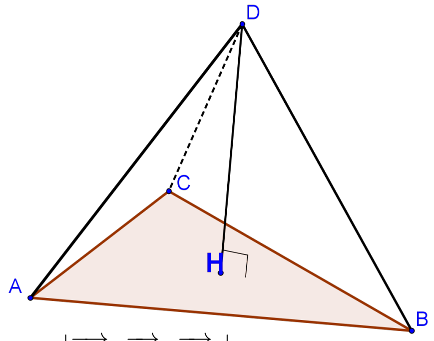
<u>*Remarque:*</u> On peut interpréter le module du produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Volume d'un tétraèdre

<u>Activités</u>

Soit $ABCD$ un tétraèdre de volume V. H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).



1. Justifier que $DH = \frac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$
2. En déduire que $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$

<u>Solution</u>

1. DH est la distance de D au plan (ABC). Donc $DH = \frac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.
2. Le volume du tétraèdre est $V = \frac{1}{3} \times \textit{hauteur} \times \textit{volume de base}$ c'est à dire $V = \frac{1}{3} \times DH \times \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle ABC.
   Par ailleurs on sait que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$; en remplaçant DH et $\mathcal{A}$ par leur expression, on obtient $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$

Propriétés 0.4.5

Soit $SABC$ un tétraèdre de sommet S. Le volume V de ce tétraèdre est :

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AS}\right|}$$

<u>**Exemple**</u> **0.4.4** *On considère les points non coplanaires* $F\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}-4\\2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}$ *et* $H\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$. *Déterminons le volume du tétraèdre $TFGH$.*

On a : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{FT}\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

donc : $\overrightarrow{FG} \wedge \overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-7\\-11\\-26\end{pmatrix}$ *et* $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{FG} \wedge \overrightarrow{FH}).\overrightarrow{FT}\right| = 6$.

0.4.6 Vecteurs coplanaires

<u>Rappel :</u> On dit que quatre points A, B, C et D de l'espace sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe quatre points coplanaires A, B, C et D de l'espace tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$

Activité

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace.

1. On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Justifier que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$. En déduire que $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$.
2. Réciproquement on suppose $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$, justifier que ces trois vecteurs sont coplanaires.

Solution

1. Ces vecteurs étant coplanaires tout vecteur orthogonal à l'un est orthogonal aux autres. On sait que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et par conséquent orthogonal à $\vec{w}$. $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{w}\Leftrightarrow(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$
2. $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$ signifie $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{w}$. Par ailleurs $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{u}$ et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\perp\vec{v}$, donc $\vec{w}$ a un support parallèle au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On conclut donc que ces trois vecteurs sont coplanaires.

De ce qui précède on peut déduire la propriété suivante :

Propriétés 0.4.6

Des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ sont coplanaires si et seulement si $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=0$.

Exemple 0.4.5 *Dire si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sont coplanaires ou non.*

On a : $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$, donc $(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}=(-3)(1)+(1)(1)+(2)(1)=0$. Par conséquent ces trois vecteurs sont coplanaires.

0.4.7 Équation cartésienne d'un plan

Activité

Soient A, B, C des points non alignés de l'espace. Justifier que pour tout point M du plan (ABC) on a : $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$

Solution

Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires c'est-à-dire $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0$ (Voir section 0.4.6)

Exemple 0.4.6 *Déterminons l'équation cartésienne de la base du tétraèdre $TFGH$ de l'exemple 0.4.4.*

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *un point de l'espace. On a :* $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{FG}\wedge\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-7\\-11\\-26\end{pmatrix}$
D'où

$$\begin{aligned} M\in(FGH) &\Leftrightarrow \overrightarrow{FM}.(\overrightarrow{FG}\wedge\overrightarrow{FH})=0\\ &\Leftrightarrow -7(x+5)-11(y-2)-26(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow 7x+11y+26z-13=0\end{aligned}$$

L'équation cartésienne du plan (FGH) *est donc* $7x+11y+26z-13=0$.

Exercices d'application

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Exercice I Vérifier dans chaque cas si les points A, B et C forment un plan, puis écrire l'équation cartésienne du plan ABC.

a) $A\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ -1 et $C\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-3\\-5\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice II On donne les points $A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $I\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

1.) Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{G})$ passant par le point A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2.) Déterminer la distance du point I à la droite de repère $(A,\vec{u})$.

3.) Déterminer la distance du point I au plan $(\mathcal{G})$.

Exercice III Soit les points $A\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

Correction

Exercice I On a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}22\\0\\-22\end{pmatrix}$ donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de $\mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } M\in(ABC) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\\ &\Leftrightarrow 22(x-2)+0(y+3)-22(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow x-z-1=0\end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de répondre à la question b)

Exercice II

1.) Soit M un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\text{On a : } M \in (\mathcal{G}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\Leftrightarrow 2(x-1)+3(y+1)-(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y-z=0$$

2.) La distance d du point I à la droite de repère $(A, \vec{u})$ est : $\frac{\left\|\overrightarrow{IA} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.

Or $\left\|\overrightarrow{IA} \wedge \vec{u}\right\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$, d'où $d = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

3.) La distance d_1 du point I au plan $\mathcal{G}$ est

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\left|\overrightarrow{IA}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \\ &= \frac{|(-2,-1,-1).(2,3,-1)|}{\|(2,3,-1)\|} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

<u>Exercice III</u>

1. On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix}$, donc l'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{467}u.a$
2. Le volume de ce tétraèdre est $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AO}\right|$.

   On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AO} = -6$.

   Il en résulte que $V = 1u.v$.

0.5 Exercices

QCM

1

1. Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère direct de l'espace. un autre repère direct de l'espace est :

   i)$(O,\vec{j},\vec{i},\vec{k})$ ii)$(O,\vec{i},\vec{k},\vec{j})$ iii)$(O,\vec{k},\vec{j},\vec{i})$ iv)$(O,\vec{j},\vec{k},\vec{i})$

2. Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls est :

   i) un entier ii) un réel négatif iii) un vecteur iv) un réel positif

3. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à :

   i) $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA}$ ii) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CA}$ iii) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$ iv) $-\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{CA}$

4. La norme du produit vectoriel de deux vecteurs non nuls orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

   i) 0 ; ii)$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$; iii) $\frac{1}{2}\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$; iv)$\frac{\sqrt{3}}{2}\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$.

5. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. A, B et C des points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est égal à :

   i) $AB.AC\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$; ii) $AB.AC\sin\widehat{BAC}$; iii) $AB.AC\sin\widehat{ABC}$; iv) $AB.AC\sin\widehat{BCA}$

2

1. Des points A, B et C définissent un plan si :

   i) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; ii) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0$; iii) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \neq 0$; iv) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$.

2. Un vecteur normal unitaire du plan (ABC) est :

   i) $\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$; ii) $\frac{1}{AB.AC}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; iii) $\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}$; iv) $\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

3

1. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles si :

   i) $\vec{n}.\vec{n'} = 0$; ii) $\vec{n} \wedge \vec{n'} = 0$; iii) $\vec{n}.\vec{n'} \neq 0$; iv) $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$

2. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants si :

   i) $\vec{n}.\vec{n'} = 0$; ii) $\vec{n} \wedge \vec{n'} = 0$; iii) $\vec{n}.\vec{n'} \neq 0$; iv) $\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}$

3. Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

   $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires si :

   i) $\vec{n}.\vec{n}' = 0$; ii) $\vec{n} \wedge \vec{n}' = 0$; iii) $\vec{n}.\vec{n}' \neq 0$; iv) $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$

4

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme.
   (a) L'aire du triangle ABC est :
   i) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ ii) $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$; iii) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$; iv) $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
   (b) L'aire du parallélogramme $ABCD$ est :
   i) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ ii) $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$; iii) $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$; iv) $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.
2. Soit (ABC) un plan de l'espace, M un point tel que A, B, C et M soient non coplanaires.
   (a) La distance de M à la droite (AB) est :
   i) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$ ii) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$; iii) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$; iv) $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.
   (b) Le volume du tétraèdre $MABC$ est :
   i) $\dfrac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$ ii) $\dfrac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}\right|}{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$; iii) $\dfrac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{AM}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$; iv) $\dfrac{\left|(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$.

Repères directs- bases directes

5 Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1.

1. Citer tous les repères orthonormé directs de sommet A et dont l'un des vecteurs est $\overrightarrow{AB}$.
2. Citer tous les repères orthonormé indirects de sommet F dont l'un des vecteurs est $\overrightarrow{FB}$.

6 Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base directe de l'espace.

Préciser si chacune des bases est directe ou indirecte

a) $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$ b) $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB})$ c) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$
d) $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EH})$ e) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{HE})$ f) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AE})$

Produit vectoriel

7 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. Soient $\vec{u}(2;-1;1)$, $\vec{v}(-4;-2;2)$ et $\vec{w}(6;3;2)$.

Déterminer les coordonnées respectives des vecteurs suivants :

a) $\vec{u} \wedge \vec{w}$; b) $\vec{w} \wedge \vec{v}$; c) $\vec{w} \wedge (\vec{v} + \vec{u})$

d) $(\vec{w} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$; e) $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$

8 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On pose $\vec{U} = \vec{i}$, $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{W} = \vec{j}$.
Calculer $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W}$ et $\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W})$. Que peut-on conclure ?

9 Soit ABC un triangle équilatéral de centre de gravité G et de côté a. Calculer en fonction de a les nombres $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{GC}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|$.

10 Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté a. Déterminer en fonction de a, $\left\|\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{OD}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{IO} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{OI}\right\|$.

Applications du produit vectoriel

11 Dans chaque cas déterminer λ pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\\lambda\end{pmatrix}$. b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1+\lambda\\-3\end{pmatrix}$.

12

Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base directe de l'espace. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AG]$ et $[AD]$. On désigne par P le point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. (a) Déterminer l'équation du plan (IJP) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

   (b) En déduire la distance de E au plan (IJP).

2. Donner une autre méthode pour déterminer la distance de E au plan (IJP).

13

Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit tel que $AB = 3$, $AE = 2$ et $AD = 1$.

Déterminer la distance de A à la droite (BH).

14 Soit $ABCDEFGH$ un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soit une base directe de l'espace.
Déterminer le volume du tétraèdre $GEDB$.

Exercices de synthèse

15 Soit $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\-7\end{pmatrix}$.

1. Justifier que les points B, C et A ne sont pas colinéaires.
2. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
3. Déterminer les coordonnées du point D pour que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit une base directe et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 2$.

16

Soient les points $A\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les points A, B et C forment un plan. Même question pour les points B, C et D.
2. Donner une représentation paramétriques de la droite d'intersection des plans (ABC) et (BCD).
3. Déterminer l'ensemble des points équidistants des plans (ABC) et (BCD).

17

Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\vec{u}.\vec{v})^2 + \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$

18

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ de l'espace.

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$.
2. Comparer les coordonnées de $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ et de $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$. Conclure.

19

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ les plans d'équations respectives $2x - z = 0$, $-x - y + z = 1$ et $-x - y + 2z = 1$.

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$ sont sécantes.
2. Soit p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à la droite $(\mathscr{D})$ intersection des plans $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}''$.
   (a) Déterminer l'expression analytique de p.
   (b) Déterminer l'expression analytique de la projection sur $(\mathscr{D})$ parallèlement à $(\mathscr{P})$.

20

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésien $2x - y + z = 1$. Déterminer l'expression analytique de la réflexion s de plan $\mathscr{P}$.

21

Déterminer le vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

22 Soit ABC un triangle tel que $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$
2. En déduire le théorème des sinus ($\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$)

Approfondissement

23 L'espace est muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. On considère le plan de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit $\vec{u}(a;b)$, $\vec{v}(c;d)$, $\vec{w}(e;f)$ les vecteurs de la base $(\vec{i},\vec{j})$ et λ un réel.

   Démontrer que $det\left((\vec{u}+\vec{v}),\vec{w}\right) = det(\vec{u},\vec{v}) + det(\vec{u},\vec{w})$ et que $det(\lambda\vec{u},\vec{v}) = \lambda det(\vec{u},\vec{v})$ où $det(\vec{u},\vec{v})$ est le déterminant des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan considéré.
2. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

   Montrer à l'aide de l'expression analytique du produit vectoriel que

   $$(\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

24 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que : $AB = 2$, $BC = CG = 1$. I le milieu de $[AB]$.

1. Choisir un repère orthonormé direct d'origine A pour travailler dans ce solide.
2. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par les points I, F et H.
3. Calculer la distance du point G au plan $(\mathscr{P})$.
4. (a) Calculer la distance du point G à la droite (IH).

   (b) Le projeté orthogonal de G sur $(\mathscr{P})$ appartient-il à la droite (IH) ? justifier.