Réflexion pédagogique: Approches du produit vectoriel en classe de terminale C

Tatoche Fotso Guy Landry

14 juillet 2014

♥♥ Table des matières ♥♥

..

Introduction

Le produit vectoriel est une notion qui peut être approchée de plusieurs façons. Généralement les approches dépendent du contexte mathématique dans lequel on se trouve (géométrie vectorielle, géométrie affine, algèbre linéaire, etc..). Parmi ces nombreuses définitions, on peut se demander laquelle est la mieux adaptée à nos programmes scolaires, ou lesquelles pouvons-nous combiner pour faciliter l'appréhension de cette notion par nos enfants. Dans les manuels utilisés au Cameroun, la définition adoptée est la définition géométrique de la géométrie euclidienne. Ensuite on arrive à la définition algébrique (expression analytique du produit vectoriel) en énonçant un certains nombres de propriétés. Nous allons analyser ces deux définitions et essayer de voir comment les structurer ou compléter pour permettre une meilleure compréhension de cette notion.

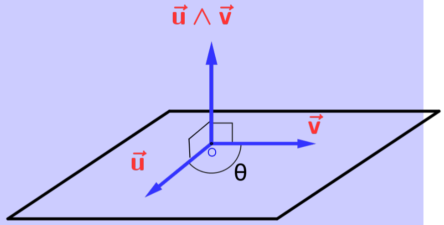
0.1 Approche géométrique

Comme nous l'avons dit les manuels qui sont au programme dans nos établissements, optent usuellement pour une définition géométrique du produit vectoriel ; Rappelons cette définition.

Définition 1 *([4]) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.*

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini de la façon suivante :

- *lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;*
- *lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur vérifiant les propriétés suivantes :*
  - *$\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$*
  - *$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.*
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$ *où $\theta = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.*



Cette définition a l'avantage de nous renseigner rapidement sur les caractéristiques du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et est indépendante d'un système d'axes ou repères.

Cependant avec cette définition, les élèves ont du mal à donner le sens du produit vectoriel de deux vecteurs. En effet, la plupart ne saisissent pas bien la notion un peu intuitive de la règle de main droite ou de tire-bouchon. La plus grande difficulté lorsqu'on utilise cette définition est la démonstration des propriétés du produit vectoriel. c'est le cas avec la démonstration de la distributivité du produit vectoriel, c'est-à-dire montrer que pour trois vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on a : $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ et $\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

Analysons comment procèdent certains manuels que nos élèves utilisent généralement.

- Dans l'un des manuels (plus précisément CIAM), on se contente de renvoyer le lecteur à un exercice (dans la partie approfondissement) qui n'est pas à la portée du « premier venu ». En renvoyant cette démonstration dans cette partie, on peut interpréter cela, comme une façon de dire à l'élève "prépare toi avant de te lancer : c'est du coriace".
- Dans un autre cas (LES Majors), cette propriété est admise.

Nous voyons qu'aucun de ces manuels ne donne une démonstration satisfaisante de cette propriété. Néanmoins nous esquissons ici une démonstration de cette propriété en deux étapes (on supposera les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls) :

Cas où $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$ et $\vec{v}$

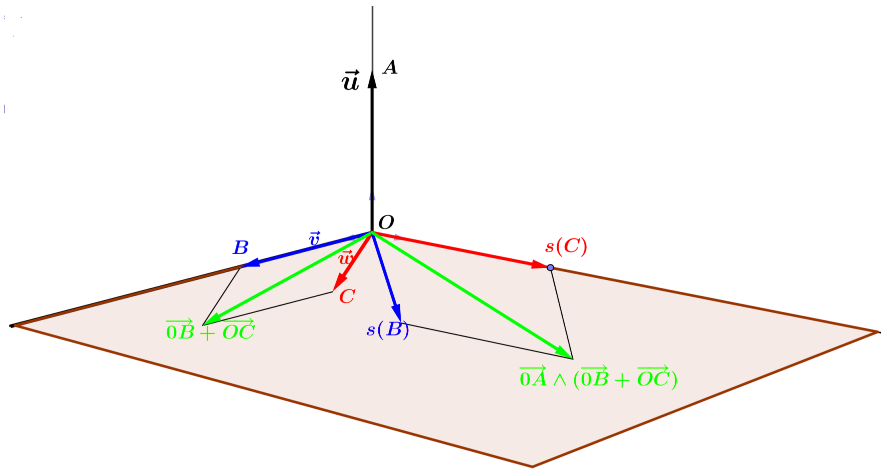
Sans nuire à la généralité supposons que l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est direct.
Soit O, A, B et C les points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

Posons $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = a$ et $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = b$.

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est un vecteur perpendiculaire au plan (OAB) de norme

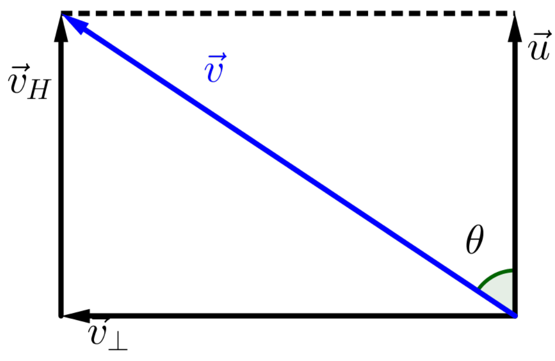
$\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\| = ab\sin 90^\circ = ab$. Ainsi $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OB}$ par la similitude s dans le plan (OBC), de centre O, de rapport a et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
De même $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OC}$ par s.
De la même façon $\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ par s.

Comme les similitudes conservent les sommes vectorielles, on a :
$\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}$



Cas général (les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont quelconques)([5])
Écrivons $\vec{v}$ comme la somme de deux vecteurs $\vec{v}_\perp$(orthogonal à $\vec{u}$) et $\vec{v}_H$ colinéaire à $\vec{u}$ (voir figure ci-dessous). Alors $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_H$. Si θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\|\vec{v}_\perp\| = \|\vec{v}\|\sin\theta$. Ainsi $\|\vec{u}\wedge\vec{v}_\perp\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}_\perp\| = \|\vec{v}\|\sin\theta$.

La direction, la norme et le sens de $\vec{u}\wedge\vec{v}_\perp$ sont les mêmes que ceux de $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Par conséquent $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{v}_\perp$.



De même si on décompose $\vec{w}$ suivant deux composantes vectorielles $\vec{w}_\perp$ (orthogonal à $\vec{u}$) et $\vec{w}_H$(parallèle à $\vec{u}$), alors $\vec{u}\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w}_\perp$.

Puisque $\vec{v}+\vec{w} = \vec{v}_\perp+\vec{v}_H+\vec{w}_\perp+\vec{w}_H = (\vec{v}_\perp+\vec{w}_\perp)+(\vec{v}_H+\vec{w}_H)$, il en résulte que : $\vec{u}\wedge(\vec{v}_\perp+\vec{w}_\perp) = \vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})$.

Maintenant $\vec{v}_\perp$ et $\vec{w}_\perp$ sont des vecteurs orthogonaux à $\vec{w}$ et ainsi d'après le premier cas $\vec{u} \wedge (\vec{v}_\perp + \vec{w}_\perp) = \vec{u} \wedge \vec{v}_\perp + \vec{u} \wedge \vec{w}_\perp$.

Donc $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

De manière analogue on peut montrer la distributivité à droite.

Les approches de cette démonstration sont toujours délicates, on doit noter que celle donnée ci-dessus dépend de la position de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si le sens de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ est le sens des aiguilles d'une montre alors l'angle de la similitude sera $\frac{-\pi}{2}$.

Lorsque nous regardons cette démonstration, nous pouvons comprendre l'attitude des manuels susmentionnés vis-à-vis de cette propriété. Quant aux autres propriétés, des démonstrations guidées sont données dans le chapitre 2 de ce document.

Nous passons rapidement à la découverte de l'approche algébrique de cette notion.

0.2 Approche algébrique

L'une des définitions que l'on rencontre dans les livres de physiques et mathématiques du supérieur, est la définition algébrique à l'aide du déterminant. Rappelons cette définition.

Définition 2 *([6]) L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \\ &= (yz' - y'z)\vec{i} + (zx' - z'x)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k} \end{aligned}$$

Le déterminant utilisé dans cette approche est un peu inhabituel, car certaines entrées sont des vecteurs. Cette définition est relative aux systèmes d'axes $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La principale difficulté lors du passage de cette définition à la définition géométrique est de montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe.

Toutefois cette approche a l'avantage d'être courte et elle permet de justifier brièvement les propriétés du produit vectoriel (voir épilogue). On peut remarquer aussi que cette définition n'est que l'expression analytique du produit vectoriel (lorsqu'on considère l'approche géométrique). Mais le déterminant n'étant pas au programme officiel, cette définition peut être donnée sous une autre forme (voir section 4 épilogue). On justifiera plus tard le choix de l'utilisation du déterminant.

Lorsqu'on examine les manuels aux programmes, on peut se rendre compte que c'est la définition algébrique (expression analytique) qui est la plus sollicitée, surtout dans les applications du produit vectoriel (voir chapitre 2). Dans un premier temps montrons que cette définition vérifie la définition géométrique.

- **Montrons que si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$**

  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires si et seulement si il existe un réel $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u}\wedge\vec{v} &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ kx & ky & kz\end{vmatrix}\\ &= (ykz-kyz)\vec{i}+(zkx-zx)\vec{j}+(xky-kxy)\vec{k}\\ &= \vec{0}.\end{aligned}$$

- **Montrons que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$**

  En gardant les mêmes coordonnées que précédemment on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}.(\vec{u}\wedge\vec{v}) &= x(yz'-y'z)+y(zx'-z'x)+z(xy'-x'y)\\ &= xyz'-xy'z+x'yz-xyz'+xy'z-x'yz=0.\end{aligned}$$

  De manière analogue on montre que $\vec{v}.(\vec{u}\wedge\vec{v})=0$. D'où le résultat.

- **Montrons que $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$ où $\theta=Mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$** ([7])

  Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ et $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|=0$. d'où $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

  On suppose $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}.\vec{v})^2 &= (yz'-y'z)^2+(zx'-z'x)^2+(xy'-x'y)^2 + (xx'+yy'+zz')^2\\ &= (yz')^2-2yz'y'z+(y'z)^2+(zx')^2-2zx'z'x+(z'x)^2+(xy')^2\end{aligned}$$
$$-2xy'x'y+(x'y)^2+(xx')^2+(yy')^2+(zz')^2+2xx'yy'+2xx'zz'+2yy'zz'$$

$$\begin{aligned}&= (yz')^2+(y'z)^2+(zx')^2+(z'x)^2+(xy')^2+(x'y)^2\\ &+(xx')^2+(yy')^2+(zz')^2\\ &= x^2(x'^2+y'^2+z'^2)+y^2(x'^2+y'^2+z'^2)+z^2(x'^2+y'^2+z'^2) \quad =(x+y+z)^2(x'+y'+z')^2\\ &= \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

On a bien $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2+(\vec{u}.\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$.

En divisant les membres de cette égalité par $\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$, on obtient :

$$\left(\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2+\left(\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2=1 \text{ or}, \ \cos\theta=\frac{(\vec{u}.\vec{v})}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

.

$$\text{Donc } \left(\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2+(\cos\theta)^2=1 \text{ c'est-à-dire}$$

$\left(\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)^2=1-(\cos\theta)^2=(\sin\theta)^2$. On conclut donc que $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$.

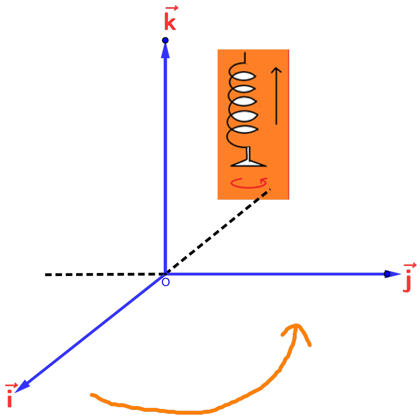
- **Vérification de la règle de la main droite ou règle du tire-bouchon** ([9])

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le seul point qui ne se règle pas avec les manipulations algébriques usuelles est la règle de la main droite.

Nous allons vérifier cela en simplifiant la réflexion ; En utilisant les vecteurs de la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Considérons d'abord le produit vectoriel $\vec{i}\wedge\vec{j}$. On a :

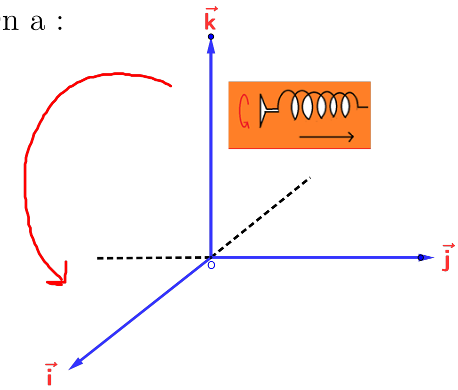
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+1\vec{k}=\vec{k}$$



En tournant le tire-bouchon de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, il progresse vers $\vec{k}$ (voir figure ci-contre).

Considérons maintenant le produit vectoriel $\vec{k}\wedge\vec{i}$. On a :

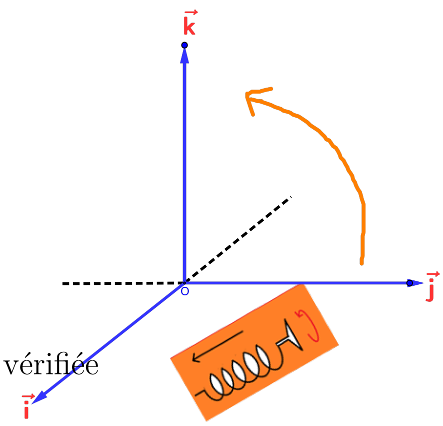
$$\vec{k}\wedge\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0\vec{i}+1\vec{j}+0\vec{k}=\vec{j}$$



En tournant le tire-bouchon de $\vec{k}$ vers $\vec{i}$, il progresse vers $\vec{j}$ (voir figure ci-contre) .

Enfin considérons le produit vectoriel $\vec{j} \wedge \vec{i}$. On a :

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = \vec{k}$$



En tournant le tire-bouchon de $\vec{j}$ vers $\vec{i}$,
il progresse vers $\vec{k}$ (voir figure ci-contre) .
On vient de montrer que la règle du tire-bouchon est vérifiée pour les vecteurs de la base. De manière générale, on peut montrer que tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ vérifie cette règle, mais on ne le fera pas ici.

Le gros avantage avec cette définition est que, les propriétés du produit vectoriel sont justifiées très aisément. En effet :

♣ Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (anti-commutativité) car le déterminant est alterné.

♣ Pour tout réel k et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u} \wedge (\overrightarrow{kv}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (pseudo-associativité) car le déterminant est multilinéaire.

♣ pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et $\vec{w}$ on a :
$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$ (distributivité à gauche) car le déterminant est multilinéaire.

Cette définition nous donne une multitude d'idées pour créer des activités qui permettront à l'élève de s'approprier les rouages de la notion.

A présent analysons certaines définitions de la géométrie vectorielle.

0.3 Approche à l'aide de transformations vectorielles

L'ancien programme de mathématiques au Cameroun était riche en géométrie vectorielle ; C'est ainsi qu'on retrouve les définitions suivantes dans l'un des livres utilisé à cette époque([2]).

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une famille libre de vecteurs de l'espace vectoriel euclidien E_3.

Dans cette section on désigne par :

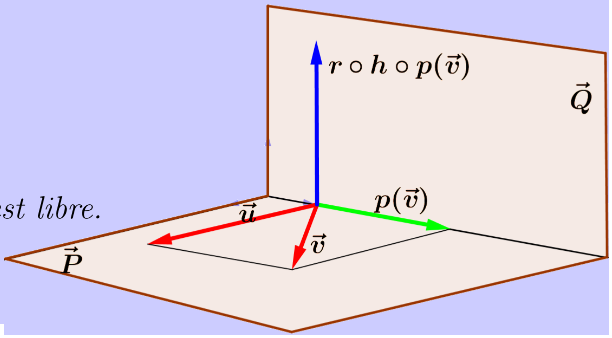
– $\vec{P}$ le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
– $\vec{D}$ (resp. $\vec{d}$) la droite vectorielle(respectivement demi-droite vectorielle) engendré par le vecteur non nul $\vec{u}$.

- $\vec{Q}$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{D}$.
- p la projection vectorielle orthogonale sur $\vec{Q}$.
- h l'homothétie vectorielle de E_3 de rapport $\|\vec{u}\|$.
- r la rotation vectorielle de E_3 d'axe $\vec{d}$.
- $\vec{k}$ l'unique vecteur unitaire de E_3 tel que la famille $(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{p(\vec{v})}{\|p(\vec{v})\|}, \vec{k})$ soit une base orthonormée directe de E_3.

Définition 3 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.*

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini comme suit :

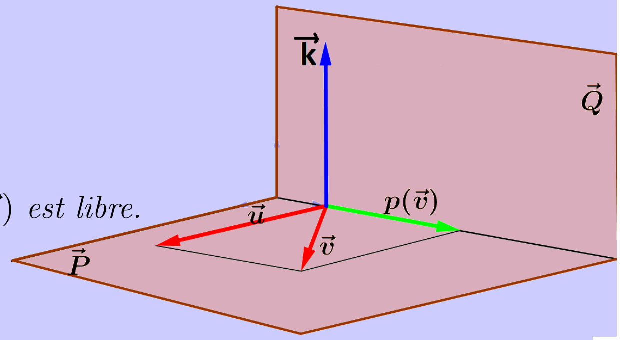
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *si la famille* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est liée.*
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = r \circ h \circ p(\vec{v})$ *si la famille* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est libre.*



Définition 4 *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E_3.*

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini comme suit :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ *si la famille* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est liée.*
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| . \|p(\vec{v})\| \vec{k}$ *si la famille* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est libre.*



m

Le préambule de ces deux définitions est fastidieux ; Il faut déjà le lire plusieurs fois pour pouvoir aborder les définitions proprement dites. Cette approche nécessite de nombreux prérequis (rotations vectorielles, homothétie vectorielle, projection vectorielle, composée de transformations, etc..).

D'autre part le programme en vigueur ne met pas l'accent sur la géométrie vectorielle. Donc cette approche n'est pas recommander pour nos objectifs. Cependant cette définition est très pratique lorsqu'on manipule les transformations vectorielles et le produit vectoriel.

Dans la suite on va se focaliser sur les deux premières approches.

0.4 Épilogue

Dans l'analyse des deux premières approches, on a relativement montré l'équivalence des deux définitions. D'une part on a vu que la définition géométrique possède quelques avantages et que la difficulté majeure était la démonstration de la distributivité de $''\wedge''$ par rapport à $''+''$.

D'autre part, on a montré que la définition algébrique permettait de démontrer aisément l'essentiel des propriétés, notamment la distributivité. On peut donc conclure qu'il y a une certaine complémentarité dans les deux approches ; Du fait que chaque définition a l'avantage de justifier facilement la propriété que l'autre prouve péniblement. Mais vient donc le problème du déterminant d'ordre trois (qui n'est pas au programme).

On s'est rapproché des élèves de Terminale C du lycée de NSAM-EFOULAN et du collège Montesquieu. On les a soumis au questionnaire suivant :

FICHE QUESTIONNAIRE : Déterminant d'ordre trois

Q1 : Avez-vous déjà entendu parler du déterminant d'ordre trois ?

☐ Non

☐ Oui

Si votre réponse est « non « alors vous pouvez remettre le formulaire sinon répondre aux questions suivantes :

Q2 : Comment avez-vous découvert cet outil ?

☐ Dans un livre de mathématiques

☐ Via une connaissance (membre de la famille, amis, répétiteurs)

Q3 : Maîtrisez-vous son utilisation ?

☐ Non

☐ Oui

Si oui trouvez-vous qu'il facilite vos opérations ?

☐ Non

☐ Oui

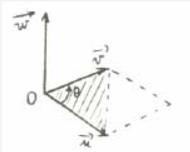
Sur un échantillon de 84 élèves, 43 ont entendu parler du déterminant d'ordre trois et 21 « savent »l'utiliser. Concernant la dernière question ces derniers ont tous répondu oui.

Soyez rassuré que nous ne prendrons pas "les dire" de quelques enfants comme preuve irréfutable de la nécessite d'introduire le déterminant d'ordre trois aux secondaires. Nous voulons juste attirer l'attention des uns et des autres sur l'enthousiasme des enfants qui manipulent cet outil.

Par ailleurs nous avons regardé l'extrait du premier cours d'une unité de valeur du niveau I (premier semestre) en physique de l'université de Yaoundé *I*.

MECANIQUE DU POINT MATERIEL / 1. RAPPELS 08-10-05
Dr P.S. NGOHE-EKAM

$(\vec{u},\vec{v})$ est toujours pris en valeur algébrique par rapport au sens trigonométrique Du fait $\sin(k\pi)=0$,les vecteurs parallèles entre eux auront un produit vectoriel nul



Remarque

On a

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin\theta'$ où θ' est le plus petit angle entre les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le module $\vec{u}\wedge\vec{v}$de repésente aussi l'aire du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c.à.d. le double de l'aire du triangle construit sur $\vec{u}$ et$\vec{v}$.

Si dans un repère orthonormé $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$, alors

$\vec{W}=(w_1, w_2, w_3)$ avec $w_1= v_3u_2-u_3v_2$, $w_2= v_1u_3-u_1v_3$
$W_3= v_2u_1-u_2v_1$

c.à.d. que : $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

On a en outre la propriété de différentiation :

$d(\vec{u}\wedge\vec{v})=\vec{u}\wedge d\vec{v}+\vec{v}\wedge d\vec{u}$.

Application :

Pour les points A et A' du cercle trigonométrique considéré plus haut, en exprimant le fait que le point P, milieu du segment [A A']

ENSP Page 17/162

En observant ce cours on se rend compte qu'il s'agit de rappels. La partie entourée en rouge indique bien que la définition à l'aide du déterminant est considérée comme un rappel. Ce cas n'est pas isolé, c'est cette définition que l'on rencontre généralement lors des rappels d'éléments mathématiques, dans les premiers cours de physique.

On peut dire que si les élèves possèdent cet outil, ils pourraient facilement s'approprier la notion de produit vectoriel et donner raisons aux enseignants qui considèrent l'approche à l'aide du déterminant comme un rappel.

Mais en attendant que nos vœux soient exaucés, nous proposons ici une définition qui permet de contourner l'utilisation du déterminant d'ordre trois.

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ des vecteurs de l'espace.
On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ définit comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \begin{vmatrix} y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}\\ &= (yz'-y'z)\vec{i} + (zx'-z'x)\vec{j} + (xy'-x'y)\vec{k}\end{aligned}$$

Cette définition est loin de faciliter la démonstration des propriétés du produit vectoriel comme celle donnée plus haut. Néanmoins on peut construire des activités permettant aux élèves d'y arriver. Nous donnons ici un exemple d'activité permettant à l'élève de démontrer la distributivité à gauche du produit vectoriel.

Activité

1. Démontrer que pour tous réels x, x', y, y', x'' et y'' :
   $$\begin{vmatrix} x+x' & x''\\ y+y' & y''\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x''\\ y & y''\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x''\\ y' & y''\end{vmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'.$$
2. L'espace est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
   On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}$.
   Montrer à l'aide de la définition analytique du produit vectoriel (définition ci-dessus) que $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$.

Solution

1.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x+x' & x'' \\ y+y' & y'' \end{vmatrix} &= (x+x')y'' - x''(y+y') \\
&= xy'' + x'y'' - x''y - x''y' \\
&= xy'' - x''y + x'y'' - x''y' \\
&= \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

2. En appliquant trois fois le résultat ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{w} &= \begin{vmatrix} y+y' & y'' \\ z+z' & z'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z+z' & z'' \\ x+x' & x'' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x+x' & x'' \\ y+y' & y'' \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & z'' \\ x & x'' \end{vmatrix}\vec{j}\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix}\vec{k} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & z'' \\ x & x'' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix}\vec{k} + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}
\end{aligned}$$

Nous pensons que si les deux définitions (algébrique et géométrique) sont données à l'enfant, on aura l'avantage de produire des activités simples pour la démonstration des propriétés mais aussi, on pourra développer leur efficacité en calculs algébriques. Il suffit de donner l'expression analytique du produit vectoriel sous forme d'une définition. A l'aide de ces deux définitions on pourra produire des activités qui établissent les caractéristiques de cette notion ; A chaque propriété on ferra correspondre une activité, fonction de l'approche qui facilite sa démonstration.
Ainsi on aura moins de propriétés admises dans le cours. Nous ne sommes en aucun cas entrain de dire que toutes les propriétés données doivent être démontrées, mais si pour une propriété, on peut construire une activité simple qui aboutit au résultat, alors il serait avantageux pour nos élèves de l'effectuer.

♥♥ Bibliographie et Webographie ♥♥

Bibliographie

[1] GUY AULIAC et al, *Algèbre et géométrie*, © **Dunod, Paris, 2005** .

[2] M. Monge et al, *Mathématiques terminale C*, **BELIN, 1973**.

[3] Charles MVOMO OTAM et les autres, *Majors EN MATHEMATIQUES* $T^{le}C$, **ASVA EDUCATION, 2012**.

[4] ALASSANE Taïrou et al, *CIAM Terminale sciences mathématiques*, **EDICEF, 1999**.

Webographie

[5] M. Berteau. Exercices relatifs au produit vectoriel, juin 2009. http ://math.15873.pagespro-orange.fr.

[6] A. Boileau. La double nature du produit vectoriel. UQAM, juin 2009. http ://www.math.uqam.ca/.

[7] M. Deleze. Produit vectoriel. Produit vectoriel-determinant nb, juillet 2004. http ://www.deleze.name/ marcel//sec2/cours/Geom3D/.

[8] A. Dieudo. Produit vectoriel, 2012. http ://www.math93.com.

[9] D. Zuchowski. Produit vectoriel, 2011. http ://dzuchowski.ep.profweb.qc.ca/Math.