ETUDE DE CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES EN TERMINALE D.

Ecrit par

HAMADOU BAKARI

dirigé par

Pr. TCHANTCHO Bertrand

Inspecteur: NKENG ESSOMBO

Encadreur du Lycée: BOUDA Albert

Yaoundé, le 8 décembre 2014

♣ Table des matières ♣

♣ ETUDE DE CONTINUITE DES FONCTIONS EN TERMINALE D. ♣

Objectifs pédagogiques spécifiques :

A la fin de ce cours, le lecteur doit être capable de :

1. Etudier la continuité d'une fonction en un point ;
2. Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle ;
3. Faire un prolongement par continuité d'une fonction ;
4. Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
5. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
6. Etudier les variations et représenter le graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

♣ LIENS AVEC LES AUTRES PARTIES DU PROGRAMME ♣

0.1 Les parties du programme nécessaires au développement de la ressource et les contributions de ces parties

1. Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction ;
2. Calculs des limites de fonctions ;
3. Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions.

0.2 Les apports de la ressource à d'autres parties du programme

1. Détermination des primitives d'une fonction continue ;
2. Intégrations de fonctions continues ;
3. Etudes des fonctions.

0.3 Les différentes applications de la ressource

1. L'image d'un intervalle par une fonction continue ;
2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
3. L'application réciproque continue et strictement monotone sur un intervalle image d'une application continue et strictement monotone sur un intervalle.

♣ Introduction générale ♣

La notion mathématique de continuité peut dériver du mot ≪ *continu* ≫ possédant deux significations, non étrangères l'une à l'autre. D'une part, ≪ *continu* ≫ a le sens de : non interrompu dans son étendue ou sa durée, exempt de lacunes, d'un seul tenant(une rangée de piqués continus d'une clôture, une muraille continue). D'autre part ≪ *continu* ≫ peut signifier : exempt de sauts, de modifications subites (évolution continue).

Si l'on adopte la première interprétation, on conçoit intuitivement une fonction continue comme une fonction prenant toute les valeurs intermédiaires entre deux valeurs données. Avec la seconde interprétation, toujours d'un point de vue intuitif, dire qu'une fonction f est continue signifie : si, à x_0, correspond la valeur $f(x_0)$ de la fonction, à des valeurs de x peu différentes de x_0 correspondent des valeurs de la fonction peu différentes de $f(x_0)$. La première interprétation est donc liée à la notion d'ordre, alors que la seconde tient à la notion de distance. Les mathématiciens ont adopté le second point de vue, qui, de plus que le premier, permet de faire correspondre à des valeurs x proches de x_0, des valeurs $f(x)$ proches de $f(x_0)$. Ce qui fait que la notion de continuité d'une fonction va de façon formelle s'appuyer sur la notion de limite.

En fait, la notion de continuité étant déjà introduite en classe de première, en terminale, il est question de renforcer la connaissance de l'élève sur cette notion de continuité des fonctions réelles en un point et ses propriétés, lui présenter la continuité d'une fonction sur un intervalle et ses propriétés, et enfin lui montrer ses importances dans la détermination de l'image d'un intervalle par une fonction continue, l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation, et dans l'étude de variations et de représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

Quelques rappels

Dans ce chapitre, il s'agit de rappeller quelques notions comme la détermination de l'ensemble de définition d'une fonction, les Calculs des limites de fonctions et l'interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions servant d'outils pour l'enseignement des notions suivantes :

- Continuité d'une fonction en un point ;
- Continuité d'une fonction sur un intervalle ;
- Prolongement par continuité d'une fonction ;
- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solution d'une équation ;
- Etudier les variations et représenter le graphique de fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.

1.1 Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

Exemple 1.1.1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{|x|-x}}$ et $g(x) = \frac{ln(4-x)}{|x-1|-1}$.
Solution :

-Pour $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{|x|-x}}$: Le numérateur n'est défini que pour les valeurs de x telles que l'on ait $(x-2)(x+2) \geq 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$. Le dénominateur est défini quel que soit x, mais il n'est différent de zéro que pour les valeurs de x strictement négatives, c'est-à-dire $x \in]-\infty; 0[$. Donc l'ensemble de définition de f est $D_f =]-\infty; -2]$.

-Pour $g(x) = \frac{ln(4-x)}{|x-1|-1}$: Le numérateur n'est défini que pour les valeurs de x telles que l'on ait $4 - x > 0$, c'est-à-dire $x \in]-\infty; 4[$. Le dénominateur n'est défini que pour les valeurs de x autres que celles pour lesquelles on a $|x-1| - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ et $x = 2$, donc l'ensemble de définition de g est $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 4[$.

Exercice 1.1.1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis les représenter sous forme de réunion d'intervalles :
i) $f(x) = 4$, $g(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x - 1}$ et $h(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 2$;
ii) $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-4}$;
iii) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+2}$, $g(x) = \frac{ln(x^2)-x-6}{\sqrt{2x^2+1}}$ et $h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$
iv)$f(x) = x^2 + E[\frac{1}{1-E(x^2)}]$.

1.2 Calcul des limites

1.2.1 Limites de fonctions élémentaires

(a) a et c sont des nombres réels.

- $\lim\limits_{x \to a} c = c$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$.

(b) a est un nombre réel et n est un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \; si \; n \; est \; pair \\ -\infty \; si \; n \; est \; impair \end{cases}$;
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$;
- Pour n pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- Pour n impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Exemple 1.2.1.

i) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^6} = 0$.

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x^3} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^5} = +\infty$

Exercice 1.2.1.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^4$; $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^5}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x^4}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^6}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x^5}$.

Remarque 1.2.1.

(i) Dans le cas où f est définie en a, f admet une limite en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à $f(a)$;

(ii) Dans le cas où f n'est pas définie en a, f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a une limite à gauche et une limite à droite égales à l.

Exemple 1.2.2.

1) Soit $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous : .

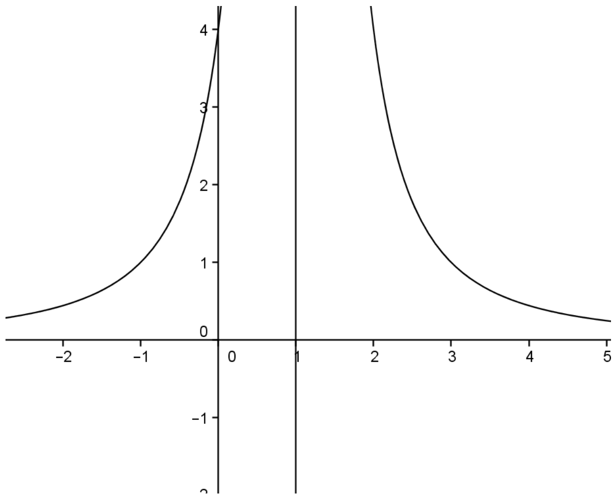

FIGURE 1.1 – C_f

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = +\infty$.

2) Considérons la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} (-x+5)\ si\ x < 2 \\ \frac{x^2}{4}\ si\ x \geq 2. \end{cases}$

-$D_g = \mathbb{R}$

-$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}}(-x+5) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}}(\dfrac{x^2}{4}) = 1.$

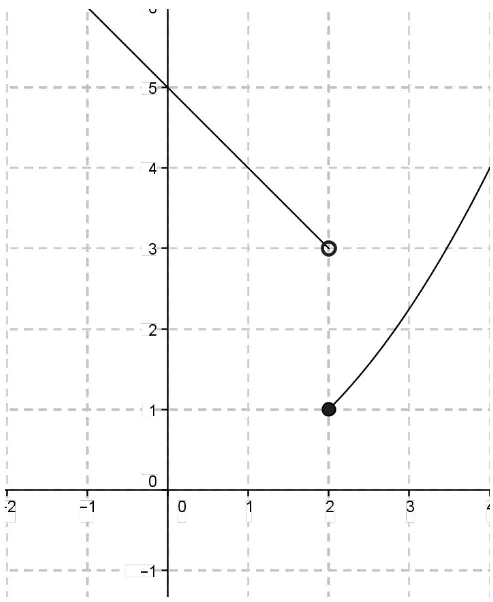

FIGURE 1.2 – C_f

Exercice 1.2.2.

1. Les fonctions suivantes admettent-elles de limite en x_0?

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \; si \; x < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \; si \; x > 0 \\ -1 \; si \; x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

ii) $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \; si \; x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 \; si \; x > 1 \\ -1 \; si \; x = 1 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, puis calculer leur limite en x_0 :

i) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ en $x_0 = 0$ et $g(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x < 0 \\ x \; si \; x > 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$.

ii) $g(x) = \frac{x^2}{x}$ en $x_0 = 0$.

1.2.2 Propriétés de comparaison

Soient f et g deux fonctions numériques à variable réelle x.

Propriété 1.1.
Si $f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 1.2.
Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Propriété 1.3.
Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

<u>Exemple</u> 1.2.3.
Calculons la limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{x-1}{\sin^2(x)+2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
$\forall x \in]-\infty;1[$,

$$\begin{aligned} 2 \leq \sin^2 x + 2 \leq 3 \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{3} \leq \tfrac{1}{\sin^2 x+2} \leq \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{x-1}{2} \leq \tfrac{x-1}{\sin^2 x+2} \leq \tfrac{x-1}{3}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{1}{3})(x-1) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
De même $\forall x \in]1;+\infty[$,

$$\begin{aligned} 2 \leq \sin^2 x + 2 \leq 3 \quad &\Rightarrow \quad \tfrac{1}{3} \leq \tfrac{1}{\sin^2 x+2} \leq \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{x-1}{3} \leq \tfrac{x-1}{\sin^2 x+2} \leq \tfrac{x-1}{2}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{3})(x-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>Exercice</u> 1.2.3.
1. Utiliser les propriétés ci-dessus pour calculer les limites des fonctions suivantes :
i) $f(x) = \frac{2}{3+E(x)}$ en $+\infty$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x ;
ii) $f(x) = x^3 \cos \frac{2}{x^2}$ en 0.
iii) $f(x) = -x + 1 - \cos x$ et $g(x) = \frac{x \sin x}{x^2+2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}$.
i) Déterminer un encadrement de f par deux fonctions rationnelles.
ii) En déduire la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

1.2.3 Opération sur les limites

Limite d'une somme de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m deux autres nombres réels.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$
l	m	$l+m$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*pas de conclusion immédiate*

Exemple 1.2.4.
$\lim\limits_{x\to 0} x^3 + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 5x + 3 = 9$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 + 10 = -\infty$

Exercice 1.2.4.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^4 + 3x^3 - x + 6$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -x^3 + 2x^2 - 2$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 - 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^4}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^6}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 + x - 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^5}$.
3. $\lim\limits_{x\to -2} x^5$; $\lim\limits_{x\to 3} x^3$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^5}$.

Limite d'un produit de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m sont deux autres nombres réels.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$
l	m	$m\times l$
$l\neq 0$	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ } si \text{ l>0} \\ -\infty \text{ } si \text{ l<0} \end{cases}$
$l\neq 0$	$-\infty$	$\begin{cases} +\infty \text{ } si \text{ l<0} \\ -\infty \text{ } si \text{ l>0} \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$ ou $-\infty$	*pas de conclusion immédiate*

Remarque 1.2.2.
Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f^n(x) = l^n$ où $f^n(x) = \underbrace{f(x) \times f(x) \times ... \times f(x)}_{n fois}$.

Exemple 1.2.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-5x^4) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 + x = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4(1 + \frac{1}{x^3}) = +\infty$

Exercice 1.2.5.
Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes :
i) $f(x) = x^3(-3 + \frac{2}{x})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
ii) $g(x) = -3(\frac{1}{2}x + 5)$ en 2.
iii) $h(x) = (\sqrt{x^2+1} + 6)(x - 2)$ en $+\infty$.
iv) $j(x) = (x - 1)(\frac{-2}{x^2})$ en $+\infty$.

Limite d'un quotient de deux fonctions

a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et m sont deux autres nombres réels.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$m \neq 0$	$\frac{l}{m}$
$l \neq 0$	0	$\begin{cases} +\infty \ si \ l>0 \\ -\infty \ si \ l<0 \end{cases}$
l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$+\infty$	l	$\begin{cases} +\infty \ si \ l>0 \\ -\infty \ si \ l<0 \end{cases}$
$-\infty$	l	$\begin{cases} +\infty \ si \ l<0 \\ -\infty \ si \ l>0 \end{cases}$
0	0	*pas de conclusion immédiate*
$+\infty$ ou $-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$	*pas de conclusion immédiate*

Exemple 1.2.6. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}$; $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x+4}{x+1} = \frac{5}{2}$;
$\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{2}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$.

Exercice 1.2.6.
Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes :
i) $f(x) = \frac{x-5}{-x^2+3}$ en -1, en $\sqrt{3}$ et en 5.
ii) $g(x) = \frac{x^2}{x(x+3)}$ en 0 et en $+\infty$.

Limite de la composée d'une fonction de limite l et d'une fonction qui a une limite en l

f et g sont des fonctions, a, l et l' des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = l'$.

Exemple 1.2.7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2-3}} = \dfrac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{4x^2-3} = \dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 1.2.7.
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{2x+2}{x}}$.
On pose $u(x) = \frac{2x+2}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
i) Calculer la limite de u en 2 et la limite de v en 3.
ii) En déduire la limite de $f(x) = (v \circ u)(x)$ en 2.
2. Calculer la limite des fonctions suivantes :
i) $f(x) = \sqrt{\frac{8x+1}{2x-3}}$ en $+\infty$.
ii) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

1.2.4 Limite à l'infini des fonctions polynômes et rationnelles

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$;
(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$;
(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Exemple 1.2.8.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + x^2 - x^4 + x - 5) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{2 - 3x + 4x^3 - 5x^2}{2x^3 - x^2 + 3}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{4x^3}{2x^3}) = 2$.

Exercice 1.2.8.
Calculer la limite de chacune des fonctions suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$:
i) $f(x) = 2x^3 - 3x + \frac{1}{2}$; $g(x) = -\frac{1}{3}x^4 - 6x + \frac{2}{5}$ et $h(x) = -x^5 - 8x^2 + 5$.
ii) $f(x) = \frac{-x^3+5x^2+x-8}{8x^2+4x-5}$; $g(x) = \frac{2+5x-x^2}{3-x-3x^2}$ et $h(x) = \frac{-x^5}{3x^3+2x^2+5x+8}$.

1.3 Lecture et interprétation des graphiques ou des tableaux de variation de fonctions

Exemple 1.3.1. Soit f la fonction à variable réelle définie par $f(x) = \frac{4x^2-3x-1}{4x^2+1}$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous :

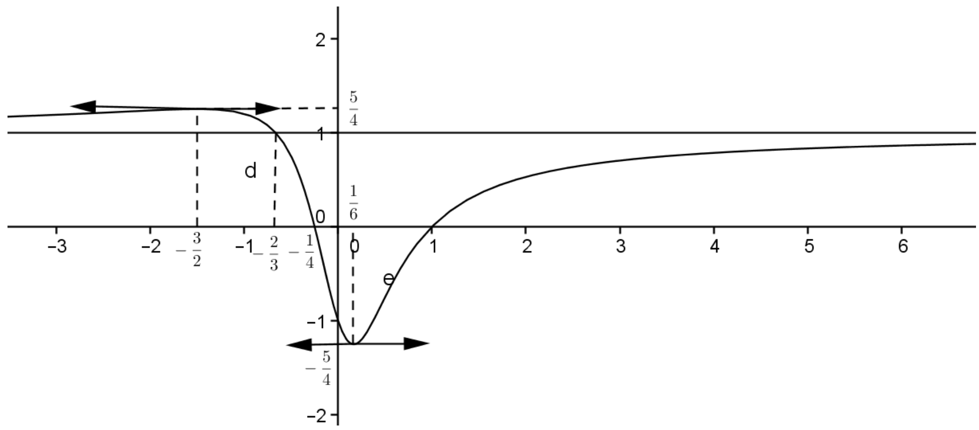

FIGURE 1.3 – C_f

1. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $]-\infty; -\frac{2}{3}]$ et $[-\frac{3}{2}; 1]$.
2. Déterminer l'image réciproque de $[-\frac{5}{4}; 1]$ et $[0; 1]$.

Solution :

1. $f(]-\infty; -\frac{2}{3}]) = [1; \frac{5}{4}]$ et $f(]-\frac{3}{2}; 1]) = [-\frac{5}{4}; 1]$.
2. L'image réciproque de $[0; 1]$ est $[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}] \cup [1; +\infty[$.

<u>Exercice</u> 1.3.1. Soit g une fonction définie par $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

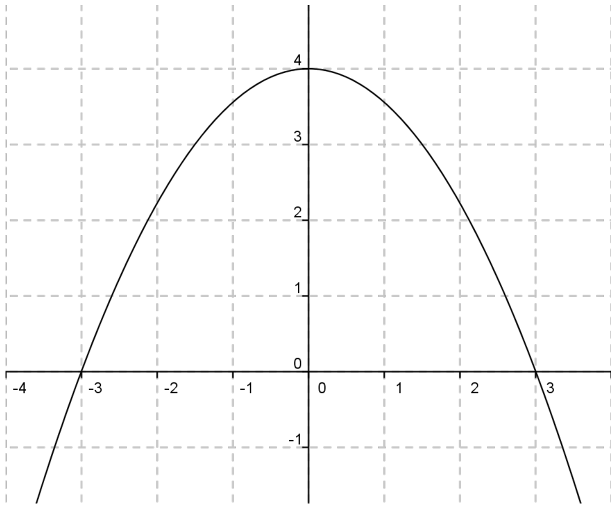

FIGURE 1.4 – C_g

1. Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par g : $[-3; 3]$; $[-3; 0]$ et $[0; 3]$.
2. Déterminer l'image réciproque de [0 ;2].
3. Déterminer la variation de g sur l'intervalle $[-3; 3]$, puis donner un intervalle sur lequel g réalise une bijection.

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

Continuité d'une fonction en un point

Objectifs spécifiques : Dans ce chapitre, il est question de renforcer la connaissance de l'élève sur la notion de continuité des fonctions réelles en un point déjà étudiée en classe de première. Il est donc important qu'à la fin de ce chapitre l'élève soit capable de donner les définitions de la fonction continue en un point ainsi que ses propriétés.
Prérequis : Calculs de limites.

2.1 Notion de continuité en un point x_0

Activité1 : Fatimata et Momo ont tracé chacun une courbe sur le sol du point A au point B et du point C au point D respectivement. Momo, en traçant sa courbe , a rencontré un caillou placé sur le sol qu'il n'a pas voulu contourner, il a donc soulevé sa main pour continuer le tracé de sa courbe après le caillou. Lorsqu'il a déplacé ce caillou, ils ont obtenu leurs courbes représentées ci-après :

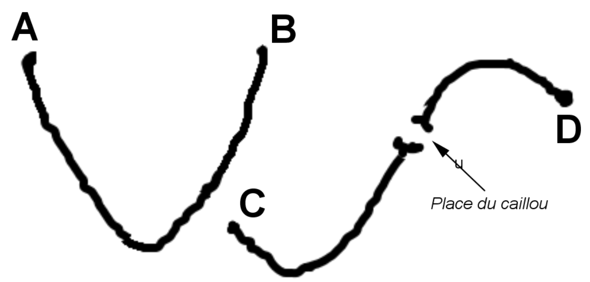

FIGURE 2.1 – courbes de Fatimata et Momo

(a) Laquelle de ces deux courbes présente-t-elle une rupture ?

(b) Que peut-on dire de l'autre courbe ? A-t-on levé la main pendant son tracé ?

<u>Activité</u>2 : Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle $[a; b]$ dont les courbes représentatives sont celles de Fatimata et de Momo reportées chacune dans un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ci-après :

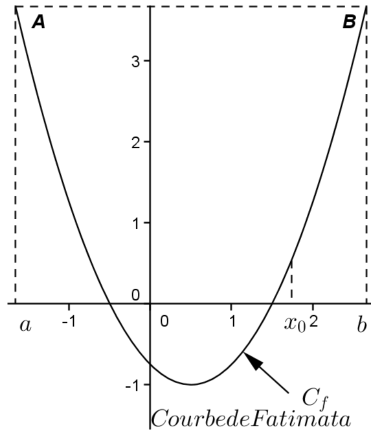

FIGURE 2.2 – Courbe de Fatimata

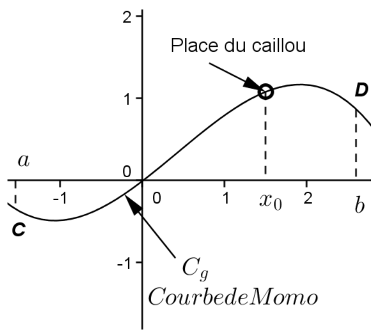

FIGURE 2.3 – Courbe de Momo

On observe graphiquement que la fonction g n'est pas continue en x_0(point d'abscisse x_0 où le caillou était placé) puis qu'elle n'est pas définie en x_0 ou encore qu'elle n'a pas d'image en x_0. On dit que g n'est pas continue en x_0 ou encore g est discontinue en x_0. Par contre, la fonction f est tracée sans rupture en x_0. On dit que la fonction f est continue en x_0.

QUESTION : Peut-on donc dire que si une fonction est définie en x_0, alors elle est continue en x_0 ?

Pour répondre à cette question, l'élève est appelé à traiter l'exercice suivant :

Soit f une fonction définie par $f(x) = E(x)$ la partie entière du nombre réel x $(x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1)$.

(i) Déterminer l'ensemble de définition de f.

(ii) Compléter le tableau suivant :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8
$f(x)$								

1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5

(iii) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ puis comparer les à $f(2)$.

(iv) Donner la représentation graphique de f dans l'intervalle $[1; 2,5]$.

(v) Peut-on parler de rupture sur la fonction f en 2 par exemple ?

(vi) Que peut-on dire de la continuité de f en 2.

Remarque 2.1.1.

La notion de limite permet d'étudier la continuité d'une fonction en x_0. Pour cela, la définition de continuité d'une fonction va de façon formelle s'appuyer sur la notion de limite.

2.2 Définitions

Soient f une fonction et x_0 un nombre réel.

Définition 2.1.

f est continue en x_0 si f est définie en x_0 et admet une limite en x_0 égale à $f(x_0)$(c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).

Définition 2.2.

f est continue à gauche de x_0 si f est définie sur un intervalle $]a; x_0]$ et admet une limite à gauche de x_0 égale à $f(x_0)$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$).

Définition 2.3.

f est continue à droite de x_0 si f est définie sur un intervalle $[x_0; a[$ et admet une limite à droite de x_0 égale à $f(x_0)$ (c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$).

Théorème 2.1.

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0 (c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$).

Démonstration :

-Si f est continue en x_0, alors f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ qui signifient $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$, c'est-à-dire f est continue à gauche et à droite de x_0.
-Si f est continue à gauche et à droite de x_0, alors $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x)$ qui signifie f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ qui veut dire f est continue en x_0.

Remarque 2.2.1.

Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ signifie aussi que $\lim\limits_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

Exemple 2.2.1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = 3x + 2$.

Montrer que f est continue en 5.

Solution :

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (3x + 2) = 17$ et $f(5) = 17$. on a $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 17 = f(5)$. Donc f est continue en 5.

Exemple 2.2.2.

Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \ si \ x < 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \ si \ x > 0 \\ -1 \ si \ x = 0 \end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et $g(0)$
2. g est-elle continue en 0 ?

Solution :

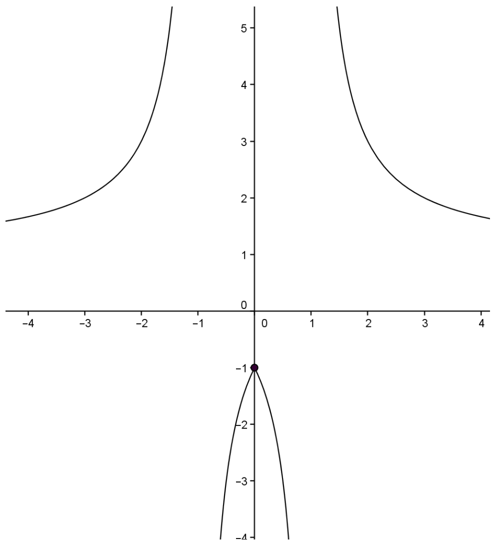

Figure 2.4 – C_g

1. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x-1}{x+1} = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$ et $g(0) = -1$
2. D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$, donc g est continue en 0.

Exemple 2.2.3.

Soit h une fonction définie par $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \ si \ x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 \ si \ x > 1 \\ 1 \ si \ x = 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de h en 1.
2. Dessiner la courbe représentative C_h de h.

Solution :

1)

- On a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 - 2x = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} x^2 - 2x + 2 = 1$ et $h(1) = 1$
- h n'est pas continue à gauche de 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) \neq h(1)$ et h est continue à droite de 1 car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x) = h(1)$.
- h n'est pas continue en 1, car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} h(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} h(x)$.

2)la courbe représentative C_h de h

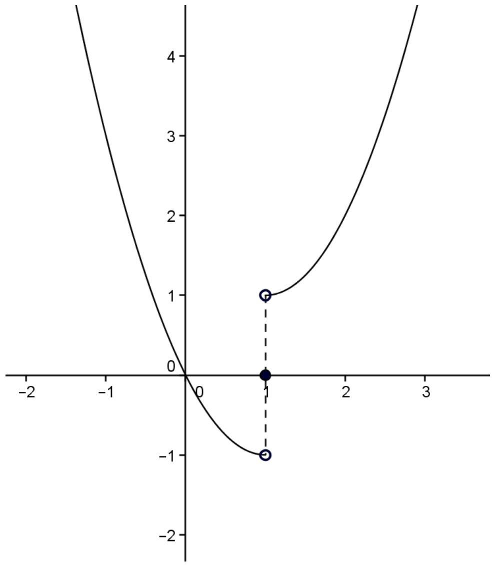

FIGURE 2.5 – C_h

Exercices d'application :

1. Soit f une fonction définie par $f(x) = x^2 + x - 1$. f est-elle continue en 1 ?
2. Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} \ si \ x \neq 1 \\ -1 \ si \ x = 1 \end{cases}$
   (i) Écrire g sans symboles valeur absolue.
   (ii) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (iii) Étudier la continuité de g en 0.
3. Étudier la continuité de h en 0 pour $h(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) \ si \ x \neq 0 \\ 0 \ si \ x = 0 \end{cases}$

2.3 Opérations sur les fonctions continues en un point x_0

2.3.1 Continuité de la somme de deux fonctions continues en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0. Montrer que $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = (f+g)(x_0)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) &= \lim_{x \to x_0} (f)(x) + \lim_{x \to x_0} (g)(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0. \\ &= (f+g)(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.1.
Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors leur somme $f+g$ est continue en x_0.

Exemple 2.3.1.
Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 1$.
Montrons que f est continue en 1.
Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto (x^2 - 1)$ sont continues en 1. Donc f est continue en 1 comme somme de deux fonctions continues en 1.

Exercice 2.3.1.
Etudier la continuité de la fonction $f(x) = (3x^2 - 3) + \sqrt{2x+1}$ en 1.

2.3.2 Continuité du produit de deux fonctions continues en x_0

Activité :
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0.
Montrer que $\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = (f \times g)(x_0)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) &= (\lim_{x \to x_0} (f)(x)) \times (\lim_{x \to x_0} (g)(x)) \\ &= (f(x_0)) \times (g(x_0)) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0. \\ &= (f \times g)(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.2.
Si f et g sont deux fonctions continues en x_0, alors leur produit $f \times g$ est continue en x_0.

Exemple 2.3.2.

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}(x^2 + x - 1)$.
Etudions la continuité de f en 2.
Les fonctions $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x}$ et $x \mapsto (x^2 + x - 1)$ sont continues en 2, donc f est continue en 2 comme produit de deux fonctions continues en 2.

Exercice 2.3.2.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :
i)$f(x) = (2x^2 + x + 3)\sqrt{x+1}$ en 2 ;
ii)$g(x) = x \sin x$ en $\frac{\pi}{2}$.

2.3.3 Continuité du quotient de deux fonctions continues en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle contenant x_0 avec $g(x_0) \neq 0$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to x_0} (\dfrac{f}{g})(x) = (\dfrac{f}{g})(x_0)$.
Indication :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (\frac{f}{g})(x) &= (\tfrac{f(x_0)}{g(x_0)}) \text{ car } f \text{ et } g \text{ sont continues en } x_0 \\ &= (\tfrac{f}{g})(x_0). \end{aligned}$$

Propriété 2.3.

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors leur quotient $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Exemple 2.3.3.

Soient f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x-1}$.
Montrons que f continuité en $\frac{\pi}{2}$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto (x - 1)$ sont continues en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} - 1 \neq 0$. Donc f est continue en $\frac{\pi}{2}$ comme quotient de deux fonctions continues en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.3.3.

Etudier la continuité des fonctions suivantes :
i)$f(x) = \frac{2x^2+x+3}{x-1}$ en 2 ;
ii)$g(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3}{2\pi + \cos x}$ en π.

2.3.4 Continuité de la racine carrée d'une fonction continue en x_0

Activité : Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle x définies respectivement par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Que peut-on dire de la continuité de $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en 0 ?
3. Étudier la continuité de f en 2.
4. Que peut-on dire de la continuité de $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ en 2 ?

Propriété 2.4.
Si f est une fonction continue en x_0 et $f(x_0) \geq 0$, alors la racine carrée de f est continue en x_0.

Exercice 2.3.4.
Etudier la continuité des fonctions suivantes :
i)$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x+3}{x-1}}$ en 2 ;
ii)$g(x) = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}x^3}{1+\cos x}}$ en π.

2.3.5 Continuité de la valeur absolue d'une fonction continue en x_0

Activité : Soient f une fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = x^2 - 1$.

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Posons $g(x) = |f(x)|$. Que peut-on dire de la continuité de g en 0 ?

Propriété 2.5.
Si f est une fonction continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.

Exercice 2.3.5. Etudier la continuité de la fonction $f(x) = |-5x^3 + 2x + 1|$ en 1.

2.3.6 Continuité de la composée de deux fonctions en un point x_0

Propriété 2.6. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(I)$.*
Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration :

f est continue en a, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et g est continue en $f(a)$, alors $\lim_{y\to f(a)} g(y) = g[f(a)]$. On en déduit que $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = g\circ f(a)$. Donc $g\circ f$ est continue en a.

Exemple 2.3.4.

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

1.Déterminer le domaine de définition de f et de g.

2.Etudier la continuité de $g \circ f$ en 0 et en 1.

Solution :

1. $D_f =]-\infty; -2[\bigcup]-2; +\infty[$ et $D_g = [0; +\infty[$. f et g sont continues sur leur domaine de définition.

2.

- On a : $0 \in D_f$. Comme f est continue sur D_f, alors f est continue en 0. Mais $f(0) = -\frac{1}{2}$ n'appartient pas à D_g, donc $g \circ f$ n'est pas continue en 0.
- On a : $1 \in D_f$. Comme f est continue sur D_f, alors f est continue en 1 et $f(1) = 0 \in D_g$, donc $g \circ f$ est continue en 1.

Exercice 2.3.6.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

Appliquer la propriété ci-dessus pour étudier la continuité de f en 0.

⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

Continuité des fonctions sur un intervalle

Objectifs spécifiques : A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Donner la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle et ses propriétés ;
- Etudier la continuité d'une fonction sur un intervalle.

Prérequis :

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction ;
- Calculer des limites de fonctions ;
- Déterminer les extrémités de l'intervalle image par interprétation graphique ou du tableau de variation.

Activité :

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+5}{x-2} \ si \ x < 2 \\ 4x - 2 \ si \ x \geq 2 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Etudier la continuité de f en -2, à gauche et à droite de 2, et en 3.
3. En déduire la continuité de f sur les intervalles $[-2; 2[$; $[2; 3]$ et $]2; 3]$.

Définition 3.1.

Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I.

La fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point x_0 de I.

Exemple 3.0.5. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. f est-elle continue sur tout intervalle de son domaine de définition ? Sinon déterminer les points où f n'est pas continue.

Solution :

1. Déterminons le domaine de définition de f.

$$\begin{array}{lll} f(x) \text{ existe} & \text{si et seulement si} & |x|+1 \neq 0 \\ & \text{si et seulement si} & x \in \mathbb{R} \text{ car } |x|+1>0, \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Donc $D_f =]-\infty; +\infty[$.

2. Etudions la continuité de f en 0 et en 1. Pour le faire, écrivons f sans symbole de valeur absolue. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	1	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$ $\quad$ o	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$ $\quad$ o	$x-1$
$f(x)$	$\frac{-x+1}{-x+1}$	$\frac{-x+1}{x+1}$	$\frac{x-1}{x+1}$

Donc $f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \leq 0 \\ \frac{-x+1}{x+1} \ si \ 0 < x < 1 \\ \frac{x-1}{x+1} \ si \ x \geq 1 \end{cases}$

continuité en 0 : On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} 1 = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{-x+1}{x+1} = 1$ et $f(0) = 1$.

Donc f est continue en 0.

continuité en 1 : On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{-x+1}{x+1} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{x-1}{x+1} = 0$ et $f(1) = 0$. Donc f est continue en 1.

On conclut en disant que f est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ qui est son domaine de définition.

Exemple 3.0.6.

Soit g une fonction définie par $g(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de g.
2. g est-elle continue sur tout intervalle de son domaine de définition ? Sinon déterminer les points où g n'est pas continue.

Solution :

1. Déterminons le domaine de définition de g, donc $D_g =]-\infty; +\infty[$.

2. Etudions la continuité de g en 0. Pour le faire, écrivons g sans symbole de valeur absolue. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$	o	x
$x^2 + \frac{\lvert x\rvert}{x}$	$x^2 + \frac{-x}{x}$		$x^2 + \frac{x}{x}$

Donc $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ si \ x < 0 \\ x^2 + 1 \ si \ x > 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases}$

continuité en 0 : On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x^2 - 1) = -1$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2 + 1) = 1$ et $g(0) = 1$. Donc g est continue à droite en 0, mais elle n'est pas continue à gauche en 0. Donc g n'est pas continue en 0. On conclut en disant que g n'est pas continue sur tout intervalle de D_g contenant 0.

Remarque 3.0.1.

La fonction g est définie en 0 mais elle n'est pas continue en 0.

Exercice 3.0.7.

i) On donne les fonctions suivantes :$f(x) = \frac{-2x^2+3}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{3x-2} + x^2 + 1$ et $h(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x - 5$.

1. Déterminer le domaine de définition de chacune de ces fonctions.
2. Etudier la continuité de chacune de ces fonctions sur son domaine de définition.

ii) Etudier la continuité de $f(x) = \frac{|x+2|}{3x-2}$ en -2

Remarque 3.0.2.

1. Toute fonction polynôme à coefficients réels est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle à coefficients réels est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.
3. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.0.7. (cas des graphiques illustrant des fonctions continues ou non sur un intervalle)
Parmi les fonctions suivantes dont les courbes représentatives sont données ci-après, identifier celles qui sont continues sur l'intervalle [a ;b] et celles qui ne sont pas :

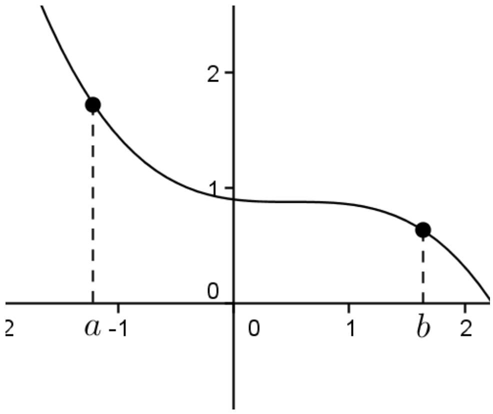

FIGURE 3.1 – Courbe de f_0

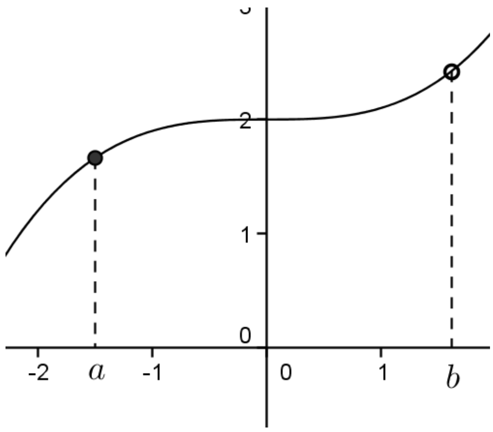

FIGURE 3.2 – Courbe de f_1

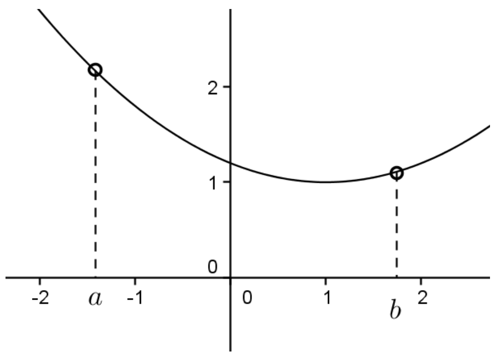

FIGURE 3.3 – Courbe de f_2

Remarque 3.0.3. On peut avoir une fonction dont la courbe représentative est représentée d'un trait continu en apparence mais qu'elle présente une infinité de discontinuités.

Exemple 3.0.8.

La courbe représentative de la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 \ sinon \end{cases}$ est d'un trait continu à l'apparence ($\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$), mais présente une infinité de discontinuités.

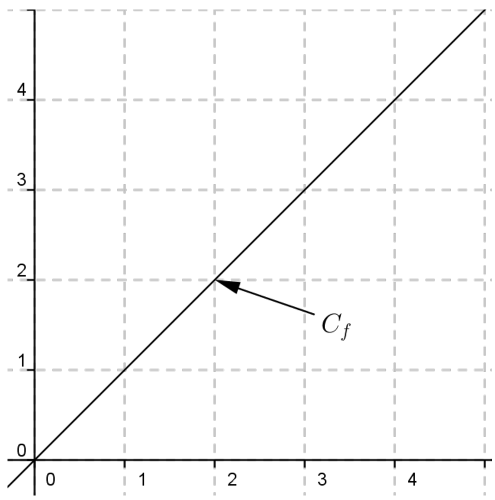

FIGURE 3.4 – Courbe f

3.1 Opération sur les fonctions continues sur un même intervalle

3.1.1 Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 3.1.
Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$ est continue sur I.

Propriété 3.2.
Si f et g sont continues sur I, alors $f.g$ est continue sur I.

Propriété 3.3.
Si f et g sont continues sur I et de plus g est non nulle sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Propriété 3.4.
Si f est continue sur I, alors $\lambda.f$ est continue sur I.

Propriété 3.5.
Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.

Propriété 3.6.
Soit h une fonction, $h \circ f$ est continue sur I si et seulement si f est continue sur I et h est continue sur $f(I)$.

Exemple 3.1.1.
1. Soit la fonction $f : x \mapsto 5x^2 - 4x + 2$. Montrons que f est continue sur l'intervalle $[-2; 7]$.
La fonction f est un polynôme donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $[-2; 7]$.
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{2x}{2x^2-3}$.
Etudions la continue de g sur l'intervalle $[0; 3]$.
La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\}$, et $\sqrt{\frac{3}{2}} \in [0; 3]$. Comme g n'est pas continue en $\sqrt{\frac{3}{2}}$, alors g n'est pas continue sur $[0; 3]$. Mais sur $[0; \sqrt{\frac{3}{2}}[\cup]\sqrt{\frac{3}{2}}; 3]$.

Exercice 3.1.1.
1. Etudier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition :
i) $f(x) = 4$ et $g(x) = 3x^3 + x^2 - 4x + 2$;

ii) $f(x) = \frac{2x+1}{4x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-4}$;
iii) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|+2}$ et $g(x) = \frac{lnx^2-x-6}{\sqrt{2x^2+1}}$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.
Appliquer la propriété précédente pour étudier la continuité de f sur les intervalles $[1;2]$ et $[0;2]$.

⋆ ⋆ Chapitre Quatre ⋆ ⋆

Prolongement par continuité d'une fonction

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre l'élève doit être capable de :

-Réconnaitre qu'une fonction est un prolongement par continuité d'une autre fonction;

-Déterminer un prolongement par continuité d'une fonction en un point x_0.

Prérequis :

-Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction;

-Etudier la continuité d'une fonction en un point.

Activité : On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[\bigcup]1;+\infty[$ par :$f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}$.

1. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles de son domaine de définition.
2. f est-elle continue en 1 ? Justifier votre réponse.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
4. Peut-on dire que la fonction g par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x+1}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ 1 \; si \; x = 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété et définition :

Soit f une fonction non définie en x_0, mais possédant une limite réelle l en x_0.

La fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \; si \; x \neq x_0 \\ l \; si \; x = x_0 \end{cases}$ est continue en x_0.

On dit que g est le prolongement par continuité de f en x_0. (On dit aussi que f est prolongeable par continuité en x_0).

Exemple 4.0.2. Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
1.Déterminer le domaine de définition de f.

2.Peut-on avoir un prolongement par continuité de f en 0 ?

Solution :

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Calculons la limite de f en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} f(x) \ si \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} \ si \ x = 0 \end{cases}$ est prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 4.0.2. 1.Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$.
i) Déterminer le domaine de définition de f.

ii) Calculer la limite de f en 0 et en déduire un prolongement par continuité g de f en 0.

2. Vérifier que la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1} \ si \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\} \\ -\frac{25}{16} \ si \ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ est un prolongement par continuité de la fonction $j(x) = \frac{2x^3+x^2+6x+3}{4x^2-1}$ en $-\frac{1}{2}$.

⋆ ⋆ Chapitre Cinq ⋆ ⋆

Utilisations de continuité des fonctions

Objectifs spécifiques :

A la fin de ce chapitre, le lecteur doit être capable de :

-Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;

-Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer ou justifier l'existence de solution d'une équation.

-Etudier les variations et la représentation graphique de la fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

Prérequis :

-calculs des limites de fonctions ;

-Interprétation des graphiques ou des tableaux de variation des fonctions ;

-Détermination de l'image d'un point ou d'un segment par une fonction.

-Fonction bijective.

5.1 Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité1 : Considérons la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

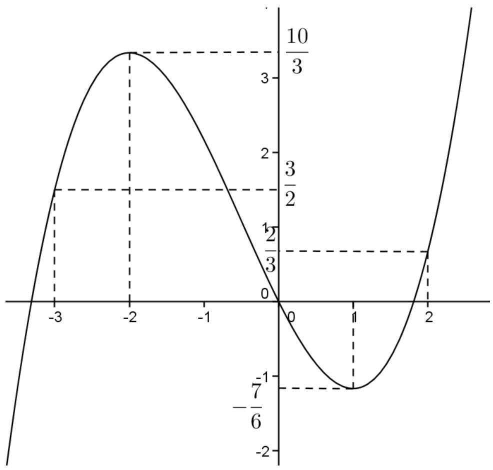

Figure 5.1 – Courbe de f

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f :
$[-2;2]$; $[0;+\infty[$; $]-\infty;-2]$ et $[-2;1]$.

Activité2 : Considérons la fonction g continue sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est donnée ci-après :

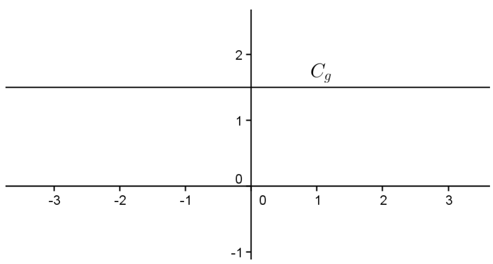

Figure 5.2 – Courbe de g

Déterminer l'image de l'intervalle $[-2;3]$ par g.

Propriété 5.1.

- *L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle ou un singleton noté $f(I)$;*
- *L'image d'un intervalle fermé $[a; b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé ou un singleton noté $[m; M]$ où m et M désignent respectivement le minimum et le maximum de f sur $[a; b]$.*

Remarque 5.1.1.
m et M ne sont pas toujours les images des bornes de l'intervalle en question.

Exemple 5.1.1.
1. Soit f la fonction continue sur son domaine de définition dont le tableau de variation est donné ci-après :

x	$-\infty$		-1			2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$		$+$	0	$-$	
f			$+\infty$ $\|$			3		
		$\nearrow$	$\|$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0		$\|$	$-\infty$				0

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x^2 - x - 3$. Déterminer l'image de l'intervalle $[-1; 0]$ par g.

Solution :
1. $f(]-\infty; -1[) =]0; +\infty[$ et $f(]-1; +\infty[) =]-\infty; 3]$.
2. Déterminons l'image de l'intervalle $[-1; 0]$ par g.
g est strictement décroissante sur $[-1; 0]$. On a :

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \leq & x & \leq & 0 \\ 0 & \leq & x^2 & \leq & 1 \\ 0 & \leq & 2x^2 & \leq & 2 \\ 0 & \leq & 2x^2 - x & \leq & 3 \\ -3 & \leq & 2x^2 - x - 3 & \leq & 0 \end{array}$$

Donc $f([-1; 0]) = [-3; 0]$.

Exercice 5.1.1.

1. Déterminer les images des intervalles $]-\pi;0[$; $]-\pi;\pi]$; $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; $[0;\frac{\pi}{2}]$ et $]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[$ par la fonction sinus dont la courbe représentive est donnée ci après :

2. Déterminer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

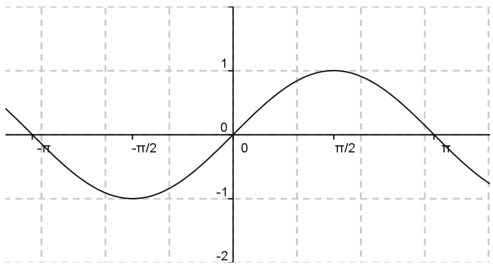

Figure 5.3 – Courbe de f

i) $f(x) = x^2 + x - 2$, $I = [-2;3]$.

ii) $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$, $I = \mathbb{R}$.

5.2 Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

<u>Activité</u> : Considérons la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \; si \; x < 0 \\ \frac{1}{x} \; si \; x > 0 \end{cases}$, dont la représentation graphique est donnée ci-après :

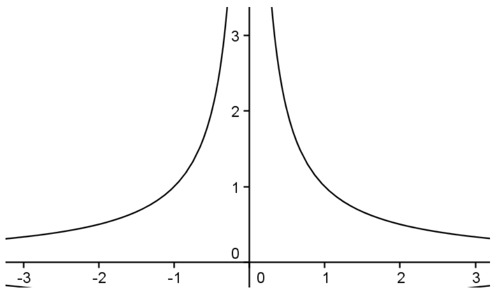

FIGURE 5.4 – Courbe de f

1. Déterminer l'image des intervalles $[-3;-1]$ et $]-\infty;-3]$ par f.
2. Déterminer l'image des intervalles $[1;3]$ et $]3;+\infty]$ par f.

Propriété 5.2.

α et β sont des éléments de $\mathbb{R}\bigcup\{-\infty;+\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$, f est une fonction admettant une limite à droite de α et une limite à gauche de β.

- *Si f est continue et strictement croissante sur $[\alpha;\beta]$, alors $f([\alpha;\beta]) = [f(\alpha);f(\beta)]$;*
- *Si f est continue et strictement croissante sur $]\alpha;\beta[$, alors $f(]\alpha;\beta[) =]\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ >}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ <}} f(x)[$;*
- *Si f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha;\beta]$, alors $f([\alpha;\beta]) = [f(\beta);f(\alpha)]$;*
- *Si f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha;\beta[$, alors $f(]\alpha;\beta[) =]\lim\limits_{\substack{x\to\beta \\ <}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ >}} f(x)[$.*

Exemple 5.2.1. Soit f une fonction continue à variable réelle x dont la courbe représentative est donnée ci-après :
i)Etudier la variation de f.

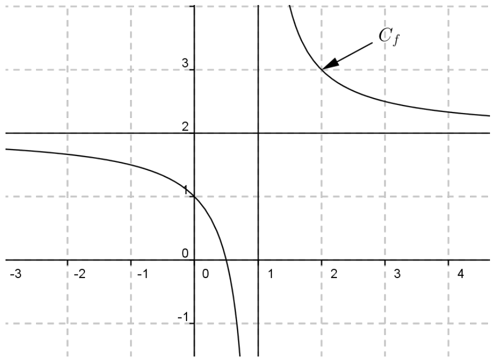

FIGURE 5.5 – Courbe de f

ii)Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $]-\infty;0]$ et $]1;2[$.

Solution :
i) La variation de f :
f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.
ii)$f(]-\infty;0]) = [0;2[$ et $f(]1;2[) = [3;+\infty[$.

Remarque 5.2.1.
On admet les résultats du tableau ci-après :

Intervalle I	$f(I)$	$f(I)$
	f est croissante	f est décroissante
$[a;b]$	$f(I) = [f(a);f(b)]$	$f(I) = [f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$f(I) = [f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$f(I) =]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x);f(b)]$	$f(I) = [f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)[$
$]a;b[$	$f(I) =]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)[$
$]a;+\infty[$	$f(I) =]\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x)[$
$]-\infty;b]$	$f(I) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);f(b)]$	$f(I) = [f(b);\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)[$

Exercice 5.2.1.

1.Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		$\Vert$		$-$		
f	2	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	-3

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par f : $]-5;-2[$; $]-2;1]$; $]-2;+\infty[$ et $]-\infty;-5[$.

2. On donne la fonction $g(x) = \frac{2x+3}{x^2-9}$.Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par g : $]-3;3[$; $[0;3[$ et $]-\infty;-3[$.

5.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité :

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ dont la représentation graphique est donnée ci-après :

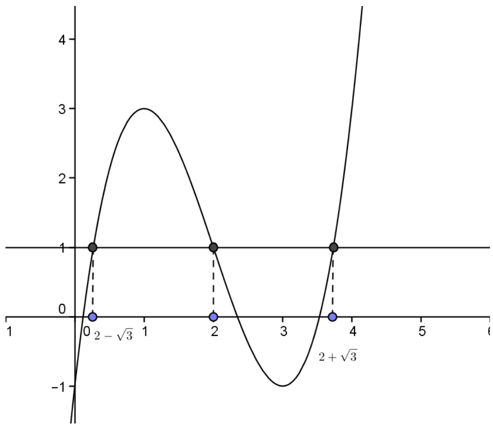

FIGURE 5.6 – Courbe de f

1. Justifier que f est continue sur $[0; 4]$.
2. Calculer $f(0)$ et $f(4)$ et justifier que 1 est compris entre $f(0)$ et $f(4)$.
3. Déterminer les antécédents de 1.
4. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$
5. En déduire que tout élément α compris entre $f(0)$ et $f(4)$ a au moins un antécédent par f compris appartenant à $[0; 4]$.

Remarque 5.3.1.

La figure nous montre que pour toute valeur α (intermédiaire) comprise entre $f(0)$ et $f(4)$, elle correspond au moins une valeur x_0(intermédiaire comprise entre 0 et 4 telle que $f(x_0) = \alpha$.

Théorème 5.1.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$, $a < b$. Alors pour tout réel α de $f([a; b])$, il existe au moins un réel x_0 appartenant à $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Démonstration :

f est continue sur $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [m;M]$ est un intervalle fermé, m et M sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de l'image de $[a;b]$ par f . Soit donc α un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Supposons que $f(a) < f(b)$ donc $\alpha \in [f(a); f(b)] \subset [m;M]$. On en déduit que α a au moins un antécédent compris entre a et b.

Iterprétation graphique :

Le lan est muni d'un repère orthonormé. Soit C_f la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle I. Alors pour toute valeur α comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = \alpha$ coupe C_f en au moins un point entre a et b d'ordonnée α.

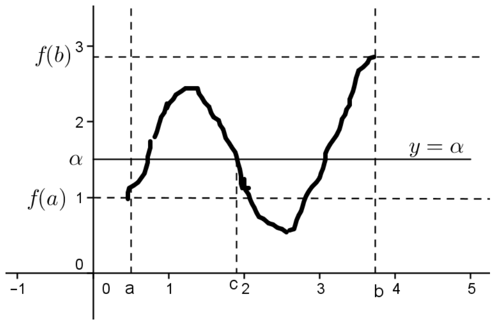

Figure 5.7 – Courbe de f

Corollaire 5.1.

Si une fonction f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b)$ est strictement négatif, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution .

Indication :

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$.

i) Justifier que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

ii) Supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Justifier que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

iii) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Exemple 5.3.1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{8}(8x^3 + 12x^2 - 18x - 11)$. Montrer que $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-2;1]$.

Solution :

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ donc continue sur l'intervalle $[-2;1]$. On a $f(-2) = \frac{9}{8}$, $f(1) = -\frac{9}{8}$ et $f(-2) \times f(1) < 0$.Donc $f(x) = 0$ admet une solution.

Théorème 5.2. *Toute fonction continue et strictement monotone est bijective.*

Conséquences 5.1.1 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. Alors :

(i) Si f est strictement croissante sur $[a; b]$, alors pour tout $\alpha \in [f(a); f(b)]$, il existe un unique x_0 de $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

(ii) Si f est strictement décroissante sur $[a; b]$, alors pour tout $\alpha \in [f(b); f(a)]$, il existe un unique x_0 de $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$.

Démonstration :

(i) Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$. Alors pour un réel α de $f([a; b])$, il existe au moins un réel x_0 appartenant à $[a; b]$ tel que $f(x_0) = \alpha$ d'après le théorème ci-dessus. Et comme f est strictement croissante alors x_0 est unique. Sinon on aurait au moins deux réels x_0 et x_1 tels que $x_0 \neq x_1$, soit $x_0 < x_1$ et $f(x_0) = f(x_1) = \alpha$ en contradiction avec le fait que f est strictement croissante.

(ii) Similaire à (i).

Remarque 5.3.2.

Après avoir prouvé l'existence de solutions de l'équation de la forme $f(x) = \alpha$, les valeurs approchées de celles-ci peuvent être déterminées par la méthodes de dichotomie ou par balayage.

Exercice 5.3.1.

1.Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.

i) Dresser le tableau de variation de f.

ii)En déduire le nombre de racines de f.

2.Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

Montrer que g possède une unique racine.

3.Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = x^2 + \sqrt{x} - 3$. Montrer que h possède une unique racine puis en donner un encadrement d'amplitude 0.01.

5.4 la variation et la représentation graphique de fonction réciproque d'une fonction continue monotone.

Activité : Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2+1$ et dont la représentation graphique est donnée ci-après :

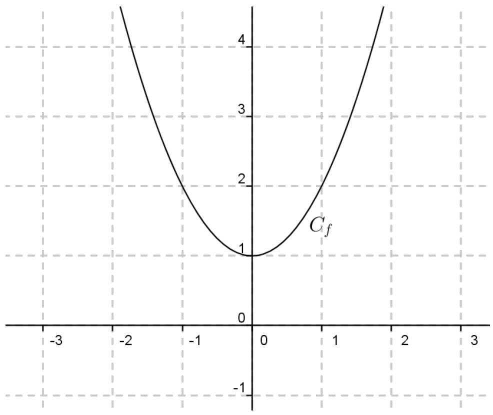

FIGURE 5.8 – Courbe de f

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Déterminer $f([0;+\infty[)$.
3. Démontrer que f détermine une bijection g de $[0;+\infty[$ vers $[1;+\infty[$.
4. Déterminer la formule analytique de g^{-1} de $[1;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$.
5. Etudier le sens de variation de g^{-1}. Est-elle bijective ?
6. Etudier la continuité de g^{-1}.
7. Représenter C_f, $C_{f^{-1}}$ et la droite d'équation $y = x$ dans un même repère orthonormé $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.Que constate-t-on ?

Propriété 5.3.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I, alors :

1. *f réalise une bijection de I vers $f(I)$ (c'est-à-dire $\forall y \in f(I)$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$).*
2. *La bijection réciproque de f, notée f^{-1}, est continue et strictement monotone de $f(I)$ vers I, de même sens de variation que f.*
3. *Pour tout $x \in I$, $f(x) \in f(I)$ et $f(x) = y$ équivaut à $x = f^{-1}(y)$.*

Exemple 5.4.1.

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie de$]0; +\infty[$ vers $]-\infty; 0[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$.

1. Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.
2. Justifier que f réalise une bijection.
3. Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de f.
4. Etablir le tableau de variation de f^{-1}.
5. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ de f et f^{-1}.

Solution :

1. Etudions la continuité de f sur son domaine de définition : $\frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle, elle est donc continue sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. On en déduit donc que f est continue sur $D_f =]0; +\infty[$.
2. Justifions que f réalise une bijection : On a $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ $\forall x \in D_f$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$. Donc f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; 0[$.
3. Déterminons la bijection réciproque f^{-1} de f :

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\text{équivaut à} \quad \frac{1}{x} = y \\ &\text{équivaut à} \quad x = \frac{1}{y} \\ &\text{équivaut à} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

4. Etablissons le tableau de variation de f^{-1}.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0

5. Construire C_f et $C_{f^{-1}}$ de f et f^{-1}.

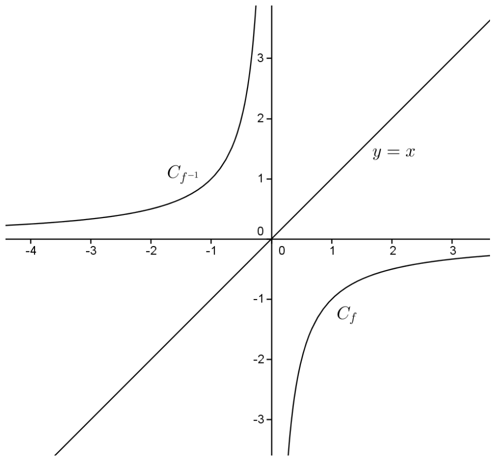

FIGURE 5.9 – Courbe de f

Remarque 5.4.1. La courbe représentative de la réciproque d'une fonction bijective f est l'image de la courbe représentative de la fonction f par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

<u>Exercice</u> 5.4.1. 1 Soit f une fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan x$.
i) Montrer que f réalise une bijection de $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle $f(I)$ à déterminer.
ii) Etudier la continuité de f^{-1}.
2. Soit g une fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$.
i) Montrer que g réalise une bijection de $[0;1]$ vers $[0;1]$.
ii) Montrer que $g^{-1} = g$.
3. Montrer que la fonction $h(x) = x^3$ réalise une bijection. En déduire la variation et continuité de h^{-1} la bijection réciproque de h.

♣ Exercices ♣

Exercice 5.4.2. Etudier la continuité des fonctions suivantes en x_0 :

1.$f : x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $x_0 = 0$.

2.$g(x) = \begin{cases} \frac{2-3x}{9x^2-4} \ si \ x \neq \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} \ si \ x = \frac{2}{3} \end{cases}$. en $x_0 = \frac{2}{3}$.

Exercice 5.4.3. Exploiter la figure des chacunes des fonctions suivantes et dire si elle continue en x_0.

1.$f(x) = \begin{cases} -x+1 \ si \ x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} \ si \ x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$.

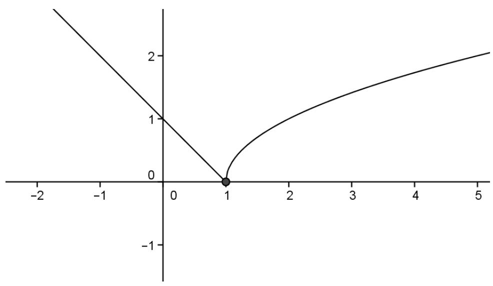

Figure 5.10 – Courbe de f

2.$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 5 \ si \ x \leq 2 \\ 3x + 1 \ si \ x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$.

Exercice 5.4.4. On considère la fonction définie de la façon suivante :

$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction est-elle continue pour $x = 0$?

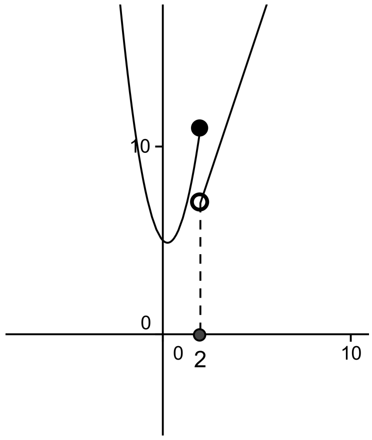

Figure 5.11 – Courbe de f

Même question pour la fonction $\varphi(x)$ définie par
$\varphi(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = -1$.

Exercice 5.4.5. 1.Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \ si \ x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 2 - x \ si \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
Démontrer que cette fonction n'est continue qu'en deux points, que l'on précisera.
2.Soit g la fonction de la variable réelle x définie par
$x \mapsto g(x) = x|1 + \frac{1}{x}|$.
i)Déterminer l'ensemble de définition de g.
ii)Etudier la limite de $f(x)$ en 0.
iii)g admet-t-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 5.4.6.
1.Etudier la continuité de chacune des fonctions suivantes sur son ensemble de définition :
i) $f(x) = \frac{2}{5}$ et $g(x) = 3x^4 + x^3 - 4x + 2$;
ii) $f(x) = \frac{3x-1}{3x^2-1}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x-4}$;
iii) $f(x) = \frac{|x-2|}{|x|+3}$, $g(x) = \frac{lnx^2-3x-6}{\sqrt{2x^2+1}}$ et $h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{|x|}{x} \ si \ x \neq 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases}$
iv)$f(x) = x^2 + E[\frac{1}{1-E(x^2)}]$.

Exercice 5.4.7. 1.Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie par sa formule.
Démontrer que f définit une bijection de l'intervalle K sur un intervalle que l'on précisera.
i)$f(x) = 6x^2 - 11x + 4$, $K = [\frac{11}{12}; +\infty[$.
ii)$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $K =]-1; 2]$.

iii)$f(x) = 2x + 3 + ln(\frac{x+1}{x-1})$, $K = [\sqrt{2}; +\infty[$.

iv) $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-2x+8}$, $K = [0; 2]$.

2.Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ définie de $f(]-1; 2])$ vers $]-1; 2]$.

♣ Bibliographie ♣

[1] Abdou Khadre BARRY, Joseph TSOUMTSA, Jules N'DA KOUADIO, Olivier Théodule RAZQFINDRANOVONA, Saliou Touré, Tairou ALASSANE,Paul REY, Julien SANHOUIDI, Soma TRAORE et al, CIAM Terminale Sciences mathématiques : Limites et continuité, EDICEF 1999.

[2] Abdou KOUMCHEGHAME, Benoît Eric MINALI, Bernard Eto MONEVONDO, Casimir NDEUTCHOUA, Charles MVOMO OTAM, François TCHETGNA, ISSA OUMAROU, Jean Roland ELANDI ELANDI, Luc Calvin MEGAMTCHE, Nicolas Gabriel ANDJIGA, OlivierTCHOUMGUI FOM, Samuel TOBOU, Séverin Didier FOUDA, Stanislas Hervé NKOULE, Raoul AYISSI, MAJORS en mathématiques, Terminales C-E : Limites et continuité, 2012.

[3] A. Combes et D. Barues, ALGEBRE première S et E, Exercices VUIBERT,1982.

[4] Baye OULD EL HADJ AMAR, Denis OUEHI, Faustin TOUADERA, Georgette OUEDRAOGO-HADDAD, Saliou Touré, Pierre LAWIN ORE, CIAM Treminale Sciences expérimentales : Limites et continuité, EDICEF 1999.

[5] Saliou Touré et al, CIAM première Sciences mathématiques : Limites et continuité, EDICEF 1998.

[6] TAGNE TAKAM Griaul Bruno, Enseignement et apprentissage de la notion de continuité des fonctions numériques en classe de terminale : Conception des élèves, 2013.

[7] http ://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/ANALY/ANALY2.PDF, 2013.

[8] G. COSTANTINI http ://bacamaths.net/Continuité.

[9] http ://www.uqac.ca/rebaine/8GMA050/SagnetTOME2.pdf.