APPLICATION DE LA DÉRIVÉE en Terminale D

-Etudiant: KOYAM Laguerre

-Encadreur ENS: Pr DIFFO Lambo

- Inspecteur: Monsieur MOUNCHINGAM Abdou Salam

- Encadreur du lycée: Monsieur TCHOKONA Donatien

Yaoundé, le 16 juillet 2014

♣ Table des matières ♣

Avertissement :

Cette Resource a été rédigée en vue d'aider les apprenants à avoir une maîtrise de la notion de déruvée. Les lecteurs spécialistes voudront bien, de ce fait excuser certaines précisions qu'ils pourraient juger inutiles, mais qui ne leur sont nullement destinées.

Introduction

Ce travail entre dans la ressource de PRENUM-AC (Production de Ressources Numériques pour l'enseignement des Mathématiques en Afrique Centrale). Dans ce projet,les ressources pédagogiques couvrant le programme de la terminale "D" et "C" sont en cours de l'élaboration. Il s'agit dans ma ressource de l'application de la dérivée en classe de la terminale "D".Une autre ressource ayant le même titre et destinée aux élèves de la terminale "C" existe déjà et est livrée en 2013.

Notre travail est organisé en six chapitre comme suit. Le chapitre 1 est consacré à l'application à l'étude de fonctions. Le chapitre 2 est consacré à la reconnaissance d'une bijection à l'aide de la dérivée. Le chapitre 3 est consacré à l'application à l'existence de solution des équations du type $f(x) = 0$. Le chapitre 4 est consacré au calcul approché. Le chapitre 5 est consacré à la dérivée d'ordre supérieur et enfin le chapitre 6 est consacré l'application à la résolution de l'intégrale par parti $(I.P.P)$

Chapitre Un

Application à l'étude de fonctions

Objectif pédagogique général :
Ce cours sur l'application à l'étude des fonctions vise a renforcer la capacité des élèves sur les différentes méthodes utilisées pour étudier la variation d'une fonction, à prouver l'existence de racines à certaines équations,et lui Familiariser avec quelques inégalités utiles pour faire certaines démonstrations,à déterminer les extrémums relatifs à une courbe ainsi que le point d'inflexion d'une fonction.

Objectifs pédagogiques spécifiques :
A l'issue de ce cours, l'élève doit être capable de :

1. découvrir le théorème de Rolle et pouvoir l'appliquer pour prouver l'existence de racines à certaines équations ;
2. découvrir l'inégalité des accroissements finis et pouvoir l'appliquer pour obtenir des majorations ou des minorations utiles pour certaines démonstrations.
3. découvrir l'inégalité des accroissements finis avec valeurs absolue et pouvoir l'appliquer pour encadrer certaines fonctions.
4. déduire le signe de la dérivée de la fonction f sur un intervalle lorsque le sens de variation de la fonction est connu ;
5. déduire le sens de variation de la fonction f sur un intervalle quand le signe de sa dérivée est connu.
6. comprendre pourquoi f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
7. pouvoir identifier les points d'inflexion en analysant les racines de la fonction dérivée seconde.

Pré-requis :

Les notions ci-après ont été rencontrées dans les classes antérieures, et elles constituent des pré-requis importants :

- Le calcul des limites ;
- L'étude de la continuité ;
- Le calcul de la dérivée ;
- La résolution des équations ;
- L'étude de signe d'une fonction ;
- L'encadrement des fonctions ;
- L'étude de sens de variation d'une fonction.

1.1 Théorème de Rolle

Activité :

Soient a et b deux réels tels que l'on ait :$a < b$ et f une application de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$

1. On suppose que f est constante sur $[a; b]$.
   Démontrer qu'il existe un réel c de $]a; b[$ tel que l'on ait : $f'(c) = 0$.
2. On suppose que f n'est pas constante et on désigne par $[m; M]$ l'intervalle image par f de l'intervalle $[a; b]$.
   - Démontrer qu'il existe un réel c de $]a; b[$ tel que :
   $f(c) = m$ ou $f(c) = M$.
   - Démontrer que l'on a : $f'(c) = 0$(on écrira la définition de $f'(c)$).

Théorème 1.1.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

1. *f est continue $[a; b]$;*
2. *f est dérivable $]a; b[$,*
3. *$f(a) = f(b)$.*
   Alors, il existe c appartenant à l'intervalle $]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

Supposons que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a;b[$, $f'(x) \neq 0$. Alors,pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a;b[$, $f'(x) > 0$ ou bien pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a;b[$, $f'(x) < 0$.
Soit $f$est strictement croissante sur $[a;b]$,soit f est strictement décroissante sur $[a;b]$.
Donc $f(a) < f(b)$ ou bien $f(a) > f(b)$, contradiction.
Donc, il existe c appartenant à l'intervalle $]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

1.2 Théorème des accroissements finis

1.2.1 Théorème des accroissements finis

Activité :

Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et f une application de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.

1. Soit φ l'application de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   Pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
   Vérifier que φ satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle.
   En déduire qu'il existe un réel c de]a ;b[tel que l'on ait :
   $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.
2. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Théorème 1.2.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle satisfaisant :
- f est continue sur $[a;b]$.
- f est dérivable sur $]a;b[$.
Alors,il existe un réel c appartenant à l'intervalle $]a;b[$ tel que :
$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

.

Démonstration :

Considérons la fonction φ définie par :
$\varphi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x)$
φ est dérivable sur $]a;b[$.
Alors $\varphi' = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$
$\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 0$, alors φ respecte le théorème de Rolle.Donc, il existe un réel c appartenant à $]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ c'est à dire que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0$.
D'où $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1.2.2 Inégalité des accroissements finis

Activité :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soient m et M deux réels tels que : $m \leq f(x) \leq M$, pour tout réel x de I.
Soient a et b deux éléments de I avec $a \leq b$.
En considérant les deux fonctions R et Q définies sur I par : $R(x) = Mx - f(x)$ et $Q(x) = mx - f(x)$:

1. Vérifier que $R'(x) \geq 0$ sur I et en déduire que $R(x)$ est croissante sur I.
2. Vérifier que $Q'(x) \leq 0$ sur I et en déduire que $Q(x)$ est décroissante sur I.
3. En déduire que si $a \leq b$, alors : $R(a) \leq R(b)$ et $Q(a) \geq Q(b)$.
4. Conclure que $Ma - f(a) \leq M(b) - f(b)$ et $ma - f(a) \geq mb - f(b)$.
5. En déduire alors les inégalités : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Théorème 1.3.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe deux réels m et M tels que : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout réel x élément de I.
Alors pour tous réels aet b éléments de I avec $a \leq b$, on a :
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Démonstration :

En effet, notons h la fonction définie sur un intervalle I par :
$h(x) = Mx - f(x)$.
Alors h est dérivable et pour tout réel x élément de I,$h'(x) = M - f'(x)$ et de l'hypothèse $f'(x) \leq M$, on déduit que $h'(x) \geq 0$.

Par conséquent, la fonction h est strictement croissante sur I ; de $a \leq b$, on déduit $h(a) \leq h(b)$, c'est à dire $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$.
D'où : $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
De manière analogue, on obtient $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$ en utilisant la fonction R définie sur I par $R(x) = mx - f(x)$

.

1.2.3 Inégalité des accroissements finis avec valeur absolue

Théorème 1.4.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ; M un réel positif.
- Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout réel x élément de I, alors quels que soient les réels a et b éléments de I, avec $a \leq b$,
on a :
$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$.

Démonstration :

En effet ; l'hypothèse $|f'(x)| \leq M$ est équivalente à $-M \leq f'(x) \leq M$.
Nous déduisons, d'après le théorème précèdent que :
- pour $a \leq b$, $-M(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$;
- Pour $b \leq a$,$-M(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.
D'où le résultat énoncé.

Exemple 1.2.1.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \sin(x)$.

1. Montrer que pour tous réels a et b, $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$.
2. En déduire que pour tout réel x, $|\sin(x)| \leq |x|$.

.

Solution :
$f(x) = \sin(x)$

1. Montrons que pour tous réels a et b,
   $|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$.

f étant une fonction trigonométrique, donc dérivable.

Alors, pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x)$.

Or,$|\cos(x)| \leq 1$ c'est à dire $|f'(x)| \leq 1$.

D'après le théorème ci-dessus, $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$ $(*)$,

avec $f(b) = \sin(b)$, $f(a) = \sin(a)$ et $M = 1$.

En remplaçant $f(b)$ et $f(a)$ par leurs valeurs dans$(*)$, on obtient :

$|\sin(b) - \sin(a)| \leq |b - a|$.

2. Déduisons que pour tout réel x,$|\sin(x)| \leq |x|$.

   En prenant $a = 0$ et $b = x$, on obtient le résultat.

Exercice 1.2.1.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty; 1[\bigcup]1; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout réel x dans $[2; 3]$, $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 1$.
2. Déduisez-en un encadrement de $f(x) - f(2)$ sur $[2; 3]$, puis un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines g et h sur $[2; 3]$.

Exercice 1.2.2.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ par :

$f(x) = x\sqrt{x+1}$.

1. Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ et la dérivée seconde $f''(x)$.
2. Démontrer que la fonction dérivée $f'(x)$ est croissante sur $[-1; +\infty[$, et en déduire un encadrement de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 3]$.
3. Soit x un réel de l'intervalle $[0; 3]$.

   - Appliquer l'inégalité des accroissements finis pour encadrer$f(x) - f(0)$ par deux fonctions affines.

   - Appliquer à nouveau l'inégalité des accroissements finis pour encadrer $f(3) - f(x)$, puis en déduire un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines.

1.3 Dérivée et sens de variation

1.3.1 Du signe de la dérivée au sens de variation

Activité :

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{3x^2-x-1}{x+1}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que f est une fonction dérivable sur son domaine de définition et $f'(x) = \frac{3x(x+2)}{(x+1)^2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ puis calculer $f(0)$ et $f(-2)$.
4. En déduire le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; -2]$, $[-2; 0]$ et $[0; +\infty[$
5. Que représente le tableau ci-dessous pour la fonction f.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1,3$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Théorème 1.5.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si f' est positive (ou strictement positif) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de point de I où elle s'annule, alors f est croissante (ou strictement croissante) sur I.
- Si f' est négative(ou strictement négative) sur I, sauf en un nombre fini de point de I où elle s'annule, alors f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Remarque 1.3.1. :

- Ce théorème a été admis en première et admis également en terminale car assez délicat (voir les comportements des exercices pour une épreuve basée sur des accroissements finis).
- Lors d'une étude classique de fonction, l'obtention du tableau de variation s'obtient en résolvant par exemple l'inéquation $f'(x) \geq 0$; la résolution de $f'(x) = 0$ est insuffisante car elle ne fournit pas le signe de $f'(x)$.
- Si $f'(x)$ est strictement positive (respectivement négative) à l'exception de point isolé ou elle s'annule alors f est néanmoins toujours strictement croissante (respectivement décroissante).

.

1.3.2 Du sens de variation au signe de la dérivée

Théorème 1.6.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors, pour tout réel x élément de I, $f'(x) \geq 0$.

- Si f est décroissante sur I, alors, pour tout réel x élément de I,$f'(x) \leq 0$.

- Si f est constante sur I,alors pour tout réel x élément de I,$f'(x) = 0$.

Exemple 1.3.1. Soit f la fonction rationnelle définie par :
$f(x) = \frac{2x^2-5x+4}{x-2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

Solution :

1. Déterminons le domaine de définition de f :

   $f(x)$ est définie si et seulement si $x - 2 \neq 0$

   si et seulement si $x \neq 2$.

   $D_f =]-\infty; 2] \bigcup [2; +\infty[$.
2. Montrons que $f'(x) = \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$.

   $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$ alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\frac{U(x)}{V(x)})' \\ &= \frac{U'(x)V(x) - V'(x)U(x)}{(V(x))^2} \end{aligned}$$

avec $U(x) = 2x^2 - 5x + 4 \Rightarrow U'(x) = 4x - 5$ et $V(x) = x - 2 \Rightarrow V'(x) = 1$

Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-5)(x-2)-(2x^2-5x+4)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{4x^2-8x-5x+10-2x^2+5x-4}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x^2-4x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = \frac{2(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

3. Étudions le signe de $f'(x)$ et déduisons le sens de variation de f.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\text{si et seulement si} \quad 2(x-3)(x-1) = 0 \\ &\text{si et seulement si} \quad x-3 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \\ &\text{si et seulement si} \quad x = 3 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty;1]\bigcup[3;+\infty[$, $f'(x) > 0$ implique que $f(x)$ est strictement croissante.

Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1;2[\bigcup]2;3]$, $f'(x) < 0$ implique que $f(x)$ est strictement décroissante.

Exercice 1.3.1.

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de $f(x)$

1. $f(x) = \frac{3x^2-6x+5}{x-1}$
2. $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1}$
3. $f(x) = -2x^2+5x+12$
4. $f(x) = (\ln(\frac{x+1}{x})) - (\frac{1}{x+1})$
5. $f(x) = (e^x-2)^2e^{2x}$

6. $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$
7. $f(x) = x + 1 - (\ln(x))$
8. $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$
9. $f(x) = x^2 - (\ln(x)) + 2$
10. $e^x - x - 4$

1.4 Extremum local et point d'inflexion

1.4.1 Extremum local

Activité :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

1. Dresser le tableau de signe de $[f(x) - f(-1)]$
2. Donner un intervalle ouvert contenant -1 sur lequel $[f(x) - f(-1)] \geq 0$, pour tout réel x. Que peut-on dire de $f(-1)$?
3. Justifier que f est dérivable.
4. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(-1) = 0$

Définition 1.1.
Soit f la fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
On dira que $f(a)$ est un maximum local (respectivement un minimum local), s'il existe un intervalle ouvert I_a tel que $f(x) \leq f(a)$(respectivement $f(x) \geq f(a)$).

Remarque 1.4.1. - On appelle extremum local, un maximum local ($f(a)$ sur la figure ci-dessous) ou un minimum local ($f(b)$ sur la figure ci-dessous).
- Lorsque $f(a)$ est un maximum local (respectivement un minimum) local, on dit aussi que la fonction f a un maximum (respectivement un minimum) local en a.

.

Graphique :

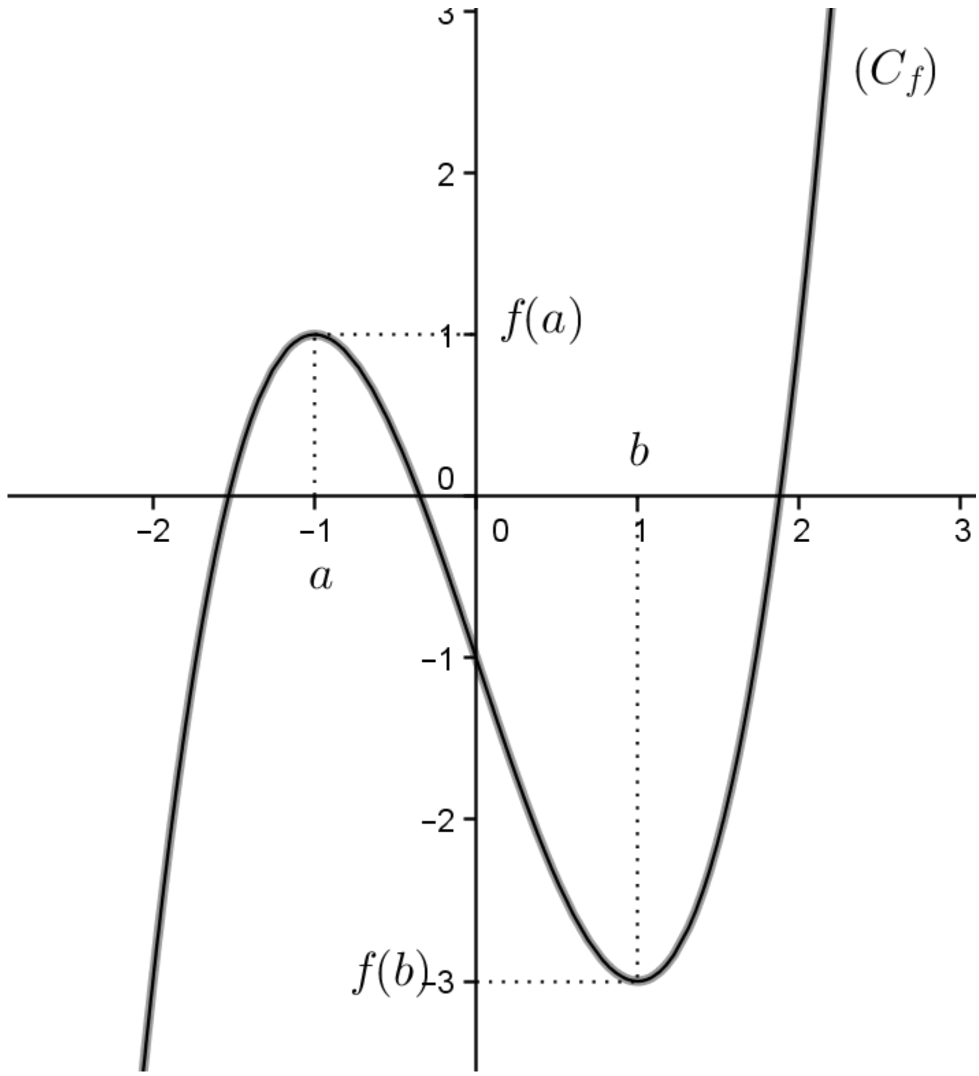

FIGURE 1.1 –

Théorème 1.7.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.

- Si f admet un extrémum local en a alors $f'(a) = 0$.

- Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en a.

- Si $f(a)$ est un extrémum local,alors, la tangente à la courbe représentative de f est horizontale au point de coordonnées$(a; f(a))$.

Démonstration :

On sait que $f'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Supposons par exemple que $f(a)$ soit un maximum local. Pour x dans voisinage de a, on a donc $f(x) < f(a)$.
Par conséquent $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y est positif si $x < a$ et négative si $x > a$.
La limite à gauche de ce taux d'accroissement est donc positif et la limite à droite est négative.
la limite de $f'(a)$ est donc positif et négative c'est à dire nulle.
- Supposons par exemple que dans un voisinage $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ de a,f' soit positive sur $]a-\varepsilon; a[$ puis négative sur $]a; a+\varepsilon[$. Ainsi f est croissante puis décroissante et finalement $f(a)$ est un maximum local.

Remarque 1.4.2.

Il peut arriver que $f'(a) = 0$ sans que $f(a)$ soit un extrémum. Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant $f(0) = 0$ n'est pas un extrémum (voir la figure ci-dessous).

Remarque 1.4.3.
- Les extremums locaux sont donc à rechercher parmi les zéros de la dérivée.
- Être un zéro de la dérivée ne suffit pas être un extrémum local (par exemple x^3 en 0).
- En pratique, on fera souvent un tableau de variation afin de faire apparaître les extrémums locaux.

Exemple 1.4.1. On considère f la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :
$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f sur son domaine de définition. En déduire les extrémums relatifs à la courbe représentative (C_f) de la fonction f.

Solution :

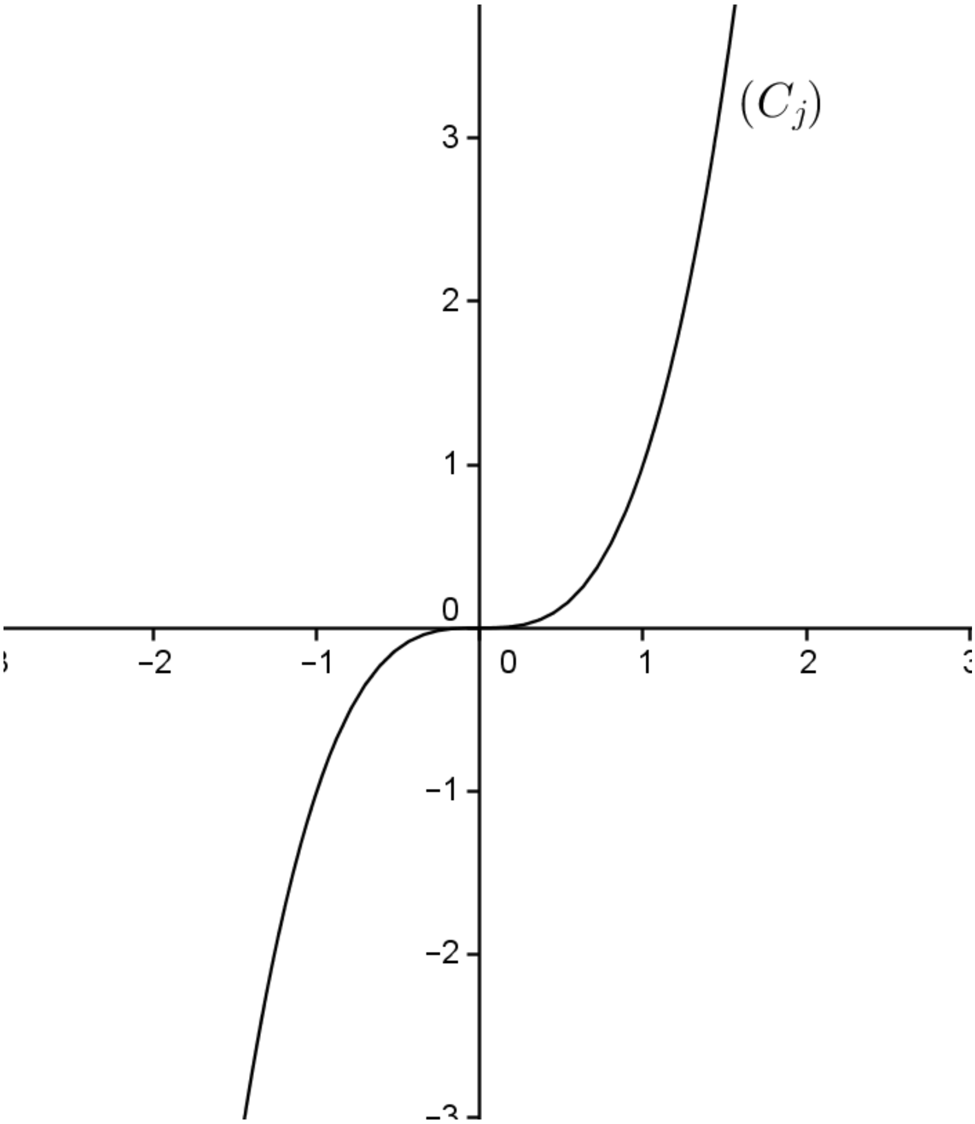

FIGURE 1.2 –

1. Déterminons le domaine de définition de f.

$$\begin{array}{lll} f(x) \text{ est définie} & \text{si et seulement si} & x+2 \neq 0 \\ & \text{si et seulement si} & x \neq -2 \end{array}$$

$D_f =]-\infty; -2[\bigcup]-2; +\infty[$

2. Étudions les variations de f sur son domaine de définition. $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$ alors :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (\dfrac{U(x)}{V(x)})' \\ & = & \dfrac{U'(x)V(x) - V'(x)U(x)}{(V(x))^2} \end{array}$$

Avec $U(x) = x^2 + x - 1 \Rightarrow U'(x) = 2x + 1$

et $V(x) = x + 2 \Rightarrow V'(x) = 1$.

Alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2 + x - 1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 5x + 2 - x^2 - x + 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Donc $f'(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$

Signe de $f'(x)$

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 0 & \text{si et seulement si} & (x+3)(x+1) = 0 \\ & \text{si et seulement si} & (x+3) = 0 \text{ ou } (x+1) = 0 \\ & \text{si et seulement si} & x = -3 \text{ ou } x = -1 \end{array}$$

TABLEAU DE VARIATION

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty; -3] \bigcup [-1; +\infty[$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.

- Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-3; -2[\bigcup] - 2; -1]$,$f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante.

D'après l'étude ci-dessus, $f'(x)$ s'annule en changeant de signe au point $x = -3$ et $x = -1$. Par conséquent, le point $A(-3; -5)$ est le maximum à la courbe représentative (C_f) et le point $B(-1; 1)$ est le minimum à la courbe représentative (C_f) de la fonction f.

1.4.2 Point d'inflexion

Définition 1.2.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a un élément de I. On dira que le point de coordonnées $(a; f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si cette courbe change de concavité en ce point.

Théorème 1.8.
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I (c'est à dire f et f' sont dérivables sur I), et a un élément de I.
On dit que le point de coordonnées $(a; f(a)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple 1.4.2.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (-x^2 + 2)^2$

1. Déterminer le point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Solution :
$f(x) = (-x^2 + 2)^2$
$D_f =]-\infty; +\infty[$

1. Déterminons le point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
   f étant une fonction polynôme donc dérivable et sa fonction dérivée est dérivable.
   Donc, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-2x)(-x^2 + 2) \\ &= -4x(-x^2 + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4(-x^2 + 2) - 2x(-4x) \\ &= 4x^2 - 8 + 8x^2 \\ &= 12x^2 - 8 \\ &= 4(3x^2 - 2) \end{aligned}$$

Signe de $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad & 4(3x^2-2)=0 \\ \text{si et seulement si} \quad & 3x^2-2=0 \\ \text{si et seulement si} \quad & x^2=\tfrac{2}{3} \\ \text{si et seulement si} \quad & x=\tfrac{-\sqrt{6}}{3} \text{ ou } x=\tfrac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

TABLEAU DE SIGNE DE $f''(x)$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$3x+\sqrt{6}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x-\sqrt{6}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	

L'étude ci-dessus montre que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe aux points $x=\frac{-\sqrt{6}}{3}$ et $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Donc les points $A(-\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{16}{9})$ et $B(\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{16}{9})$ sont les points d'inflexion à la courbe représentative de la fonction f.

<u>Exercice</u> 1.4.1.

Déterminer les extrémums et les points d'inflexion de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=x^3-3x+1$
2. $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+2}$
3. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+2$

Reconnaitre une bijection à l'aide de la dérivée

Objectif pédagogique général :

Renforcer la capacité de l'élève à sur les bijections.

Objectifs pédagogiques spécifiques :

1. Utiliser la monotonie pour déduire la bijection.
2. Utiliser le sens de variation de la bijection pour déduire le sens de variation de la bijection réciproque.

Pré-requis :

Être apte à l'étude de la monotonie.

Activité :

on considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x+2)^2 - 3$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. En déduire le tableau de variation de f.
3. Montrer que $f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} - 2$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-3; +\infty[$.
4. En déduire que $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3} - 2$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty; -3]$.
5. Que peut-on dire de f et f^{-1} pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.

Soit $f$une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$.

- Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a;b[$, $f'(x) > 0$, (respectivement $f'(x) < 0$), alors f définie une bijection de l'intervalle $[a;b]$ sur l'intervalle image $[f(a);f(b)]$, (respectivement $[f(b);f(a)]$).

- Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a;b[$, $f'(x) \geq 0$ ou f' s'annule en un nombre fini de réel, alors f est bijective.

- La bijection réciproque f^{-1} de f est définie sur l'intervalle image et a le même sens de variation que f sur cet intervalle.

Exemple 2.0.3.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \sqrt{x^2+5}+1$

1. Étudier la parité de f.

2. Étudier les variations de f sur un intervalle $[2;7]$.

3. La fonction est-elle bijective dans $[2;7]$? Justifier et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} sur cet intervalle.

4. En déduire le sens de variation de f^{-1}.

Solution :

1. Étudions la parité de f.

   Pour tout x appartenant à D_f, $-x$ appartient à D_f et

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{(-x)^2+5}+1 \\ &= \sqrt{x^2+5}+1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Donc $f(x) = f(-x)$, d'où f est paire.

2. Étudions les variations de f sur l'intervalle $[2;7]$.

   f étant une fonction racine carrée donc dérivable sur $[2;7]$.

   Pour tout réel x appartenant à $[2;7]$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$.

Signe de $f'(x)$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$
Or 0 n'appartient à $[2;7]$.

Donc pour réel x appartenant à $[2;7]$, $f'(x) > 0$

TABLEAU DE VARIATION

x	2		7
$f'(x)$		+	
		$\nearrow$	$3\sqrt{6}+1$
$f(x)$	4		

3. L'étude ci-dessus montre que la fonction f est dérivable et strictement monotone sur l'intervalle $[2;7]$, donc réalise une bijection de $[2;7]$ sur $[4;3\sqrt{6}+1]$.
   Alors, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[4;3\sqrt{6}+1]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{(x-1)^2-5}$
4. Déduisons le sens de variation de $f^{-1}(x)$.
   D'après le théorème ci-dessus, f et f^{-1} ont le même sens de variation.
   Donc, pour tout réel x dans $[4;3\sqrt{6}+1]$, $f^{-1}(x)$ est strictement croissante.

Exercice 2.0.2.

Dans chacun des cas suivants, démontrer que la fonction f est une bijection de l'intervalle I donné sur un intervalle J à déterminer.

1. $f(x) = x + \sin(x)$ $\quad I = [-\pi;\pi]$
2. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $\quad I = [1;\frac{3}{2}]$
3. $f(x) = \frac{3x^2+4x-3}{x^2-1}$ $\quad I = [-5;-2]$
4. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$ $\quad I = [3;\frac{11}{2}]$
5. $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+3x}$ $\quad I = [\frac{1}{2};3]$
6. $f(x) = \cos(x)$ $\quad I = [0;\frac{\pi}{2}]$

Chapitre Trois

Application à l'existence de solution des équations du type $f(x) = 0$

Objectif pédagogique général :

Ce cours vise à initier l'élève sur l'existence de certaines solution des équations à l'aide de la dérivée.

Objectifs pédagogiques spécifiques :

A la fin de ce cours, l'élève doit être capable de :

- d'utiliser la dérivée pour prouver l'existence et l'unicité de certaines racines de l'équation.

Pré-requis :

- Être apte à l'étude de la monotonie ;

Activité :

Soient f et g deux fonctions numériques d'une variable réelle définies respectivement par : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ et $g(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-5; 5]$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = -5$ a au moins une solution dans l'intervalle $[-1; 3]$, puis en subdivisant l'intervalle $[-1; 3]$ en plusieurs sous intervalles, localiser toutes les solutions.

Théorème 3.1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$.

Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]a; b[$, $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$), et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]a; b[$.

Exemple 3.0.4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x - 1$.
- Montrer que l'équation $f(x) = o$, admet une solution une seule dans l'intervalle $]-2; 2[$.

Solution :
- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-2; 2[$.
f étant une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$.
Signe de $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad & \text{si et seulement si} & 3(x^2-1) = 0 \\ & \text{si et seulement si} & 3(x-1)(x+1) = 0 \\ & \text{si et seulement si} & x-1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ & \text{si et seulement si} & x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
			1				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-3		

L'étude ci-dessus montre que f est dérivable et strictement monotone sur $]-2; 2[$. De plus $f(-2) = -3$ et $f(2) = 1$.
On remarque que $f(-2)$ et $f(2)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]-2; 2[$.

Remarque :
f est une bijection de]-2 ;2[sur]-3 ;1[.

Exercice 3.0.3.
On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie sur [-5 ;5] par :
$f(x) = -x^2 + 3x + 1$

1. Étudier les variations de f sur $[-5; 5]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet :
   - une solution unique dans l'intervalle $[-5; -1]$
   - une solution unique dans l'intervalle $[-2; 5]$

- une solution unique dans l'intervalle $[-4; 3]$

- une solution unique dans l'intervalle $[-1; 1]$

3. f admet-elle une unique solution dans l'intervalle $[-1; 3]$

Exercice 3.0.4.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

1. Calculer $f'(x)$
2. Dresser le tableau de variation de f
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule x_0 appartenant à l'intervalle $]1; 3[$ et une solution unique solution x_1 dans l'intervalle]3 ;4[.

Exercice 3.0.5.

Soit f la fonction définie sur $]o; +\infty[$ par :

$f(x) = \frac{x+\ln(x)}{x^2}$

1. Étudier le sens de variation de f sur son domaine de définition.
2. Montrer que f réalise une bijection réciproque f^{-1} de $]o; +\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. En déduire le sens de variation de f^{-1}.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$

Exercice 3.0.6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (1 - x)e^x - \frac{1}{2}$.

1. Démontrer en étudiant les variations de f que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β et $o \leq \beta \leq 0.5$
2. Soit h la fonction définie sur $[0; \frac{1}{2}]$ par :
   $h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$. Démontrer que β est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

Exercice 3.0.7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = xe^x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2. Étudier les variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'admet aucune solution dans l'intervalle$[0; +\infty[$ et qu'elle admette une unique solution dans l'intervalle $]-\infty; 0]$.
4. On désigne par α cette solution. Montrer que $-0.36 < \alpha < -0.35$
5. Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[0; +\infty[$, et qu'elle admette une solution et une seule notée β, dans l'intervalle $]-\infty; 0]$, et β vérifiant :
   $057 < \beta < -056$.

<u>Exercice</u> 3.0.8.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$f(x) = \cos(x) - x\sin(x)$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on déterminera.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admette une solution unique α dans $[0; \frac{\pi}{2}]$.

⋆ ⋆ Chapitre Quatre ⋆ ⋆

Calcul approché

Objectif pédagogique général :

- Renforcer la capacité de l'élève a faire des meilleurs approximations ;
- Familiariser l'élève avec les différentes positions de la tangente.

Objectifs pédagogiques spécifiques :

A l'issue de ce cours, l'élève doit être capable de :

1. déterminer une bonne approximation affine ;
2. déterminer l'équation de la tangente à une courbe.

Pré-requis :

Être apte au calcul de la dérivée.

4.0.3 Approximation affine d'une fonction

Activité :

Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 6x.(C_f)$ est sa courbe représentative, M_0 le point de (C_f) d'abscisse 1 et (T) la tangente en M_0. Pour tout nombre réel h, on désigne par M et N les points d'abscisse $1 + h$ appartenant respectivement à (C_f) et à (T).

- Y_M et Y_N désignant les ordonnées respectives des points M et N, vérifier que : $Y_M = f(1 + h)$ et $Y_N = f(1) + hf'(1)$.
- Compléter le tableau suivant :

h	1	$0,5$	0,1	$0,01$	$0,0001$
Y_M					
Y_N					

On constate sur la figure ci-dessous que $f(1) + hf'(1)$ est une bonne approximation de $f(h + 1)$, lorsque h est "proche de zéro".

Donc la fonction affine $g : x \mapsto f(1) + (x-1)f'(1)$ permet d'obtenir une bonne approximation de $f(x)$.

Graphique :

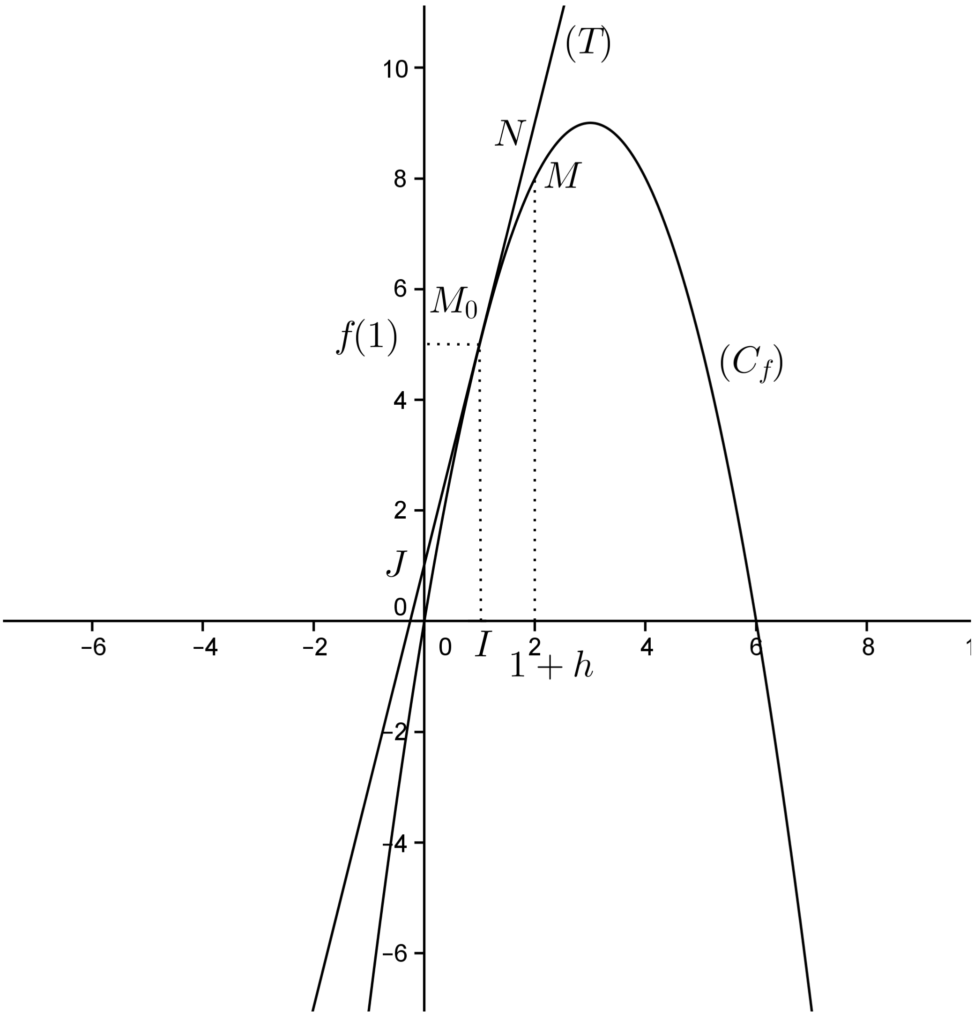

Figure 4.1 –

Activité :

On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$f(x) = x^4$

1. Déterminer une fonction affine g et une fonction φ de limite 0 en 0, tels que pour tout réel h, on a :
   $f(1+h) = g(h) + h\varphi(h)$
2. Que dire de $1 + 4h$ à $7h^2$ près pour $|h| < 10^{-1}$.

Définition 4.1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

- Si f dérivable en a, alors, pour tout réel h tel que $a+h$ appartient à I, on a :
$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$, où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$

.

Interprétation numérique :

Cette définition permet de déterminer une bonne approximation de $f(a+h)$,lorsque $f'(a)$ est non nul.
En effet, pour tout réel h tel que $a+h$ appartient à I, on a : $f(a+h) = f(a)+hf'(a)+h\varphi(h)$.
Lorsque h est suffisamment proche de zéro", $\varphi(h)$ est "négligeable devant $f'(a)$".
On a alors : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$; c'est à dire :
$f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)$, pour x "proche de a".
Nous admettons que la fonction $x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$ est la meilleure approximation de la fonction f par une fonction affine, lorsque x est "proche de a".

Exercice 4.0.9.
Dans chacun des cas suivants, trouver une fonction affine qui permet d'approcher $f(a+h)$ pour h voisin de zéro.

1. $f(x) = 2x^2 + 1$ $\quad a = 2$
2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ $\quad a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{1+x}$ $\quad a = 1$
4. $f(x) = \cos(x)$ $\quad a = \frac{\pi}{3}$
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad a = 2$

4.0.4 Équation de la tangente

Définition 4.2.
soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un réel de I. Si f est dérivable en a, alors la représentation graphique (C_f) de la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une tangente à (C_f) au point $A(a, f(a))$ d'équation :
$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
où $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Remarque 4.0.4.

1. Si la fonction f n'est pas dérivable en a et si :
   $\lim\limits_{x\to a^>} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^>} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ alors, la courbe représentative de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$, une tangente verticale d'équation $x = a$.

2. Si la fonction f est continue et n'est pas dérivable en a et si : $\lim\limits_{x \to a^>} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \neq \lim\limits_{x \to a^<} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty ou - \infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ deux tangentes l'une à gauche et l'autre à droite.

   Le point $A(a, f(a))$ est alors le point anguleux à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple 4.0.5.

Soit f la fonction rationnelle définie par :

$f(x) = \frac{2x+2}{x-2}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_f) représentative de la fonction f au point $a = 0$

Solution :

$f(x) = \frac{2x+2}{x-2}$

1. Domaine de définition de f. $\begin{array}{lll} f(x) \text{ est définie} & \text{si et seulement si} & x-2 \neq 0 \\ & \text{si et seulement si} & x \neq 2 \end{array}$

   $D_f =]-\infty; 2[\bigcup]2; +\infty[$

2. Déterminons l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $a = 0$.

   $(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Or :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-2)-(2x+2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x-4-2x-2}{(x-2)^2} \\ &= -\frac{6}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

   Donc $f'(x) = -\frac{6}{(x-2)^2}$

   Alors, $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f(0) = -\frac{1}{2}$

   D'où $(T) : y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Exercice 4.0.10.

Répondre par "vrai" ou "faux"

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. T est la tangente au point d'abscisse 1.

1. T passe par le point $A(1, 1)$.

2. T passe par le point $A(1,2)$.
3. Le coefficient directeur de T est 1.
4. Le coefficient directeur de T est 2

Exercice 4.0.11.

1. Démontrer que les courbes représentative des fonction f et g définies respectivement par :
   $f(x) = -x^2 + 3$ et $g(x) = \frac{2}{x}$ ont une tangente commune (T) d'équation $y = x + 2$
2. Étudier la position de chacune de ces courbes par rapport à (T).

Exercice 4.0.12.
Soit f la fonction rationnelle définie par :
$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormée $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Trouver le point de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 4$
2. Donner une équation de cette tangente.

Exercice 4.0.13.
On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :
$\phi(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$

1. Donner une équation de la tangente à la courbe (C_ϕ) représentant ϕ au point d'abscisse 1.
2. Existe-t-il des tangentes à la courbe (C_ϕ) dont le coefficient directeur est -4 ?
3. Existe-t-il des tangentes à la courbe (C_ϕ) qui sont parallèle à droite d'équation $3x - 2y + 1$?

Exercice 4.0.14.
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.

1. Justifier que f est définie sur $[-1; 1]$ et étudier la dérivabilité de f sur $[-1; 1]$.
   On désigne par (C_f) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé $(0; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$.
2. Préciser les tangentes (éventuellement la tangente à gauche et la tangente à droite) aux points d'abscisses :-1 ;1 ;$-\frac{1}{2}$,0.

Chapitre Cinq

Dérivée d'ordre supérieur

<u>Activité</u>

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :
$f(x) = \frac{3}{x+2}$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur son domaine de définition
2. Montrer que la fonction f' est dérivable et déterminer la fonction dérivée f'' de f' sur son domaine de définition.
3. En déduire la fonction dérivée $f^{(5)}$ de $f^{(4)}$ sur son domaine de définition.

.

Définition 5.1.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle de I. Sa fonction dérivée f' est appelée fonction dérivée première (ou dérivée d'ordre 1). On la note $f^{(1)}$.
Lorsque f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f'' ou $f^{(2)}$ et est appelée fonction dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f.
Par itération de ce procédé, pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction dérivée $(n)^{ime}$ (ou d'ordre n) de la fonction f comme la dérivée d'ordre $n-1$.
$f' = f^{(1)}$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $f^n = (f^{n-1})'$.

.

<u>Exercice</u> 5.0.15.

Dans chacun des cas suivants, donner les trois premières dérivées de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$
2. $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$
3. $\frac{x}{3x+1}$

4. $2x^5 - 7x^3 + 5x^2 - 3x + 1$

<u>Exercice</u> 5.0.16.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos(3x + 1)$

1. Déterminer f', f'', et $f^{(3)}$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\forall x$ appartenant $\mathbb{R}$,

   $f^{(n)}(x) = 3^{(n)} \cos(3x + 1 + \frac{n\pi}{2})$.

<u>Exercice</u> 5.0.17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$ par :

$f(x) = \frac{2}{3x+5}$.

1. Déterminer les fonctions f',f'',$f^{(3)}$
2. Conjecturer une formule donnant la fonction $f^{(n)}$
3. Démontrer cette formule à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

<u>Exercice</u> 5.0.18.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par :

$f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

1. Trouver a, b, c, et, d tels que pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

   $f(x) = \frac{ax+b}{x+1} + \frac{cx+d}{x-1}$
2. Calculer les dérivées d'ordre n , $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, des fonctions

   $U(x) = \frac{x-2}{x+1}$ et $V(x) = \frac{2x}{x-1}$
3. En déduire la dérivée d'ordre n de f.

.

Application de la dérivée à la résolution de l'intégrale(Intégration Par Partie)

Introduction

Le calcul de l'intégrale d'une fonction continue f entre a et b se réduit généralement à la recherche d'une primitive F de f sur l'intervalle $[a;b]$ et au calcul de $F(b)-F(a)$.
Dans la plupart des cas, ce calcul utilise des transformations d'écritures dont l'une des notions est l'intégrale par partie.Cette partie du cours serait dispensée aux élèves de la terminale après avoir abordé le cours sur le calcul d'intégrale.

Définition 6.1.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On sait que la fonction $f \times g$ est dérivable et que $(f \times g)' = f'g + g'f$. En plus,si les fonctions f' et g' sont continues sur I, alors fg' et $f'g$ sont continues sur I.
On a :
$\int_a^b (f \times g)'(x)dx = \int_a^b (f' \times g)(x)dx + \int_a^b (f \times g')(x)dx.$
Donc : $\int_a^b f(x) \times g'(x)dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b (f' \times g)(x)dx.$

.

Théorème 6.1.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et soient f' et g' leurs fonctions dérivées respectives sur $[a;b]$: alors, on a :
$\int_a^b (f(x) \times g'(x))dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b (f'(x) \times g(x))dx.$

Démonstration

On sait que la fonction $x \mapsto f(x) \times g(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$ sur l'intervalle $[a;b]$.
On a donc :
$\int_a^b (f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x))dx = [f(x) \times g(x)]_a^b$
Par suite, $\int_a^b (f'(x)g(x))dx + \int_a^b (f(x) \times g'(x))dx = [f(x) \times g(x)]_a^b$
D'où : $\int_a^b (f'(x) \times g(x))dx = [f(x) \times g(x)]_a^b - \int_a^b (f(x) \times g'(x))dx$ (1).

Remarque 6.0.5. :
- On dit que l'on fait une intégration par partie lorsque, pour calculer $\int_a^b (f'(x)g(x))dx$, on applique (1) et on recherche une primitive de la fonction $x \mapsto f(x) \times g'(x)$ au lieu de calculer directement une primitive de la fonction $x \mapsto f'(x) \times g(x)$.
- Cette méthode est profitable lorsque les primitives de la fonction $x \mapsto f(x) \times g'(x)$ sont plus faciles à trouver que celle de la fonction $x \mapsto f'(x) \times g(x)$.

Exemple 6.0.6.
Calculer les intégrales suivantes :

1. $U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x\cos(x))dx$
2. $V = \int_1^2 (x\ln(x))dx$
3. $H = \int_0^1 ((2x+5)e^x)dx$
4. $K = \int_0^{\pi} (\sin(x)e^x)dx$.

Solution :
Calculons les intégrales suivantes :

1. $U = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x\cos(x)dx$
   Posons :
   $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
   et
   $g'(x) = \cos(x) \Rightarrow g(x) = \sin(x)$.
   $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Alors :

$$\begin{aligned} U &= [f(x) \times g(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x) \times f'(x))dx \\ &= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 \times \sin(x))dx \\ &= (\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= (\frac{\pi}{8} \times \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} + 1) - 1 \end{aligned}$$

Donc : $U = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\pi}{4} + 1) - 1$

2. $V = \int_1^2 (x\ln(x))dx$

   Posons :

   $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

   et

   $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2$

   $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur $[1; 2]$.

   Alors :

$$\begin{aligned} V &= [f(x) \times g(x)]_1^2 - \int_1^2 (g(x) \times f'(x)dx \\ &= [\frac{1}{2}x^2 \times \ln(x)]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx \\ &= \frac{1}{2} \times 4\ln(2) - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   Donc : $V = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

3. $H = \int_0^2 ((2x+5)e^x)dx$

   Posons :

   $f(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2$

   et

   $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur $[0;1]$.

Alors :

$$\begin{aligned}
H &= [f(x)\times g(x)]_0^2 - \int_0^2 (f'(x)\times g(x))dx \\
&= [(2x+5)\times e^x]_0^2 - 2\int_0^2 e^x dx \\
&= [(2x+5)\times e^x)]_0^2 - 2[e^x]_0^2 \\
&= (9e^2-5) - 2e^2 + 2 \\
&= (5e^2-3)
\end{aligned}$$

Donc :$H = 5e^2 - 3$.

4. $K = \int_0^{\pi}(\sin(x)\times e^x dx$

   Posons :

   $f'(x) = \sin(x) \Rightarrow f(x) = -\cos(x)$

   et

   $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$

   $f'(x)$ et $g'(x)$ sont continues sur $[0;\pi]$

   Alors :

$$\begin{aligned}
K &= [f(x)\times g(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (f'(x)\times g(x))dx \\
&= [-\cos(x)\times e^x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)e^x dx \\
&= \frac{1}{2}[-\cos(x)]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{\pi}+1)
\end{aligned}$$

Donc :$K = \frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$

Exercice 6.0.19.

Utiliser une intégration par parties pour calculer :

1. $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin(x))dx$
2. $B = \int_0^1 x\sqrt{(x+1)}dx$
3. $C = \int_1^2 \ln(x)dx$
4. $D = \int_0^3 (3x-4)e^x dx$

Exercice 6.0.20.

Utiliser deux intégrales par partie pour calculer :

1. $E = \int_1^2 x^2 e^x dx$
2. $F = \int_0^1 x\sqrt{(1-x)}dx$
3. $G = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (x^2 \sin(x))dx$
4. $H = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx$

♣ Bibliographie ♣

[1] Akelé,C.BAYE,O,A.BENDIMAN,K,M.CONDE,R.DJIGUBA,O. DON,P,A.NEULAT,J.TRAORE,S.*CIAM prémières expérimentales*, EDICEF,(1998).

[2] Antibi.A, Barra.R, Destainville.B, Roumilhac.J.P, *TRANSMATH première ES,* NATHAN,(1998).P231-266

[3] Barra,R et al, *TRANSMATH Tle D,* NATHAN,(1989).P177-203

[4] Charles,M.O.Jean,Roland,E.E.François,T.Stanislas,H,N.Séverin,D,F. Issa,O.Benoit,E.Bernard Eto,M.Raoul,A, *MAJORS en Mathématiques Première C-E*,ASVA EDUCATION (2012).P148-163

[5] Charles,M.O.Jean,Roland,E.E.François,T.Stanislas,H,N.Séverin,D,F. Issa,O.Benoit,E.Bernard Eto,M.Raoul,A,*MAJORS en Mathématiques Tle D*,ASVA EDUCATION(2012).P81-106

[6] Fredy,B.Rose,E.M.Ali,H.Georgette,H.Denis,O.Laurent,R.Alain,R.Amadou,S.D. Oumarou,S, *CIAM première sciences mathématiques*, EDICEF,(1998).

[7] Monge,M.Audoin-Egoroff,M-C.Hautcoeur-Tardieu,S,*mathématiques terminale D*,Librairie BELIN,(juillet 1973).p244-268

[8] Monge,M.Audoin-Egoroff,M-C.Lemaire-Body,F,*mathématiques terminale C et E*,Librairie BELIN,(juin 1971)

[9] Touré,S et al,*CIAM Tle sciences expérimentales,* Edicef,(1999).P35-58

[10] Touré,S et al,*CIAM Tle sciences mathématiques,* EDICEF,(1999).P213-232